

40. Sei E ein Elementargebiet und $\phi : E \rightarrow \mathbb{U}$ eine konforme Abbildung. Sei z_n eine Folge von Punkten aus E mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \in \partial E$. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi(z_n)| = 1$ gilt. Verwenden Sie die in Beispiel 38 für $\alpha = \pi$ gefundene Funktion und eine geeignete Folge, um zu zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(z_n)$ nicht existieren muss. Hinweis: Nehmen Sie an, dass $(|\phi(z_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen 1 konvergiert und führen Sie dies unter Verwendung der Konformität von ϕ auf einen Widerspruch.
41. Für eine ganze Funktion f definiert man

$$N_f(R) = \sum_{|z| < R} \text{ord}_z(f),$$

also die Anzahl der Nullstellen von f mit Betrag $< R$ mit Vielfachheit gezählt. Sei f eine Funktion, für die

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N_f(R)}{R^\alpha} = 0$$

für ein $\alpha < 1$ gilt. Zeigen Sie, dass f dann in der Form

$$f(z) = z^k \exp(g(z)) \prod_{\substack{f(\zeta)=0 \\ \zeta \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^{\text{ord}_\zeta(f)}$$

mit $k \geq 0$ und einer ganzen Funktion g geschrieben werden kann.

42. Geben Sie ein Beispiel einer kompakt konvergenten Folge injektiver Funktionen an, deren Grenzfunktion nicht injektiv ist.
43. Sei $Q = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Re(z)| < 1, |\Im(z)| < 1\}$ und $f : B(0, 1) \rightarrow Q$ eine biholomorphe Abbildung mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann $f(iz) = if(z)$ für $z \in B(0, 1)$ gelten muss. Folgern Sie daraus, dass f eine Potenzreihendarstellung der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{4n+1}$$

haben muss.