44. Sei $\{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen in $[0,1]$. Zeigen Sie, dass durch
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{z - e^{2\pi i r_n}}$$
sowohl auf $U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ als auch auf $U_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ je eine holomorphe Funktion definiert ist. Sind diese beiden Funktionen analytische Fortsetzungen von einander?

45. Zeigen Sie durch Anwendung des Satzes von Morera, dass
$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$
auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$ holomorph ist. Durch $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{z(z+1)(z+k-1)}$ $(k \in \mathbb{N})$ ist dann eine analytische Fortsetzung von Γ auf die Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > -k\}$ gegeben. Zeigen Sie, dass
$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \left(e^{-t} - \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{\ell} \frac{t^{\ell}}{\ell!} \right) dt$$
für $-k < \Re(z) < -k+1$ gilt. Hinweis: teilen Sie das ursprüngliche Integral in zwei Teile $\int_0^1$ und $\int_1^{\infty}$ und benützen Sie, dass
$$\int_0^1 t^z\, dt = \frac{1}{z+1} \quad \text{für } \Re(z) > -1 \quad \text{und} \quad \int_1^{\infty} t^z\, dt = \frac{1}{z+1} \quad \text{für } \Re(z) < -1.$$

46. Durch
$$f(z) = C \int_0^z \frac{1}{(1-\zeta^3)^{\frac{2}{3}}}\, d\zeta$$
mit $C \int_0^1 \frac{1}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}\, dx = 1$ ist eine konforme Abbildung von $B(0,1)$ auf das gleichseitige Dreieck mit Eckpunkten $e^{\frac{2k\pi i}{3}}$ $(k = 0,1,2)$ gegeben. Zeigen Sie, dass es eine meromorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, für die
$$f(g(z)) = z$$
(zuerst für z aus dem Dreieck und dann durch analytische Fortsetzung für alle z) und
$$g(z+3) = g(z) \quad \text{und } g\left(z + \frac{3+3i\sqrt{3}}{2}\right) = g(z)$$
gilt.