Übungsaufgaben Aktuelle Probleme der Finanz- und Versicherungsmathematik

1. Das n-te Hermite-Polynom sei folgendermaßen definiert:

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n}\Big(e^{-z^2}\Big).$$

   Zeigen Sie dir folgenden Rekursionsrelationen für $n \geq 1$:

   - $$H_{n+1}(z) - 2zH_n(z) + 2nH_{n-1}(z) = 0$$
   - $$H_n'(z) = 2nH_{n-1}(z)$$

   (Hinweis: Verwenden Sie die erzeugende Funktion: $w(x,t) = \exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n}.$)

2. Beweisen Sie für die Hermite Polynome H_n:

   - $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} H_n(z)H_m(z)dz = \sqrt{2\pi}n!\delta_{n,m}$$
   - $$H_n''(z) - 2nH_n'(z) + 2nH_n(z) = 0$$

   (Hinweis: Verwenden Sie die erzeugende Funktion (siehe Bsp 1).)

3. Sei $f(t,x)$ die Dichtefunktion der Brown'schen Bewegung B mit $B(0) = 0$, d.h.

$$f(t,x) = \mathbb{P}(B(t) = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{-x^2}{2t}}.$$

   Berechnen Sie die characteristische Funktion der Brownschen Bewegung.

4. Sei $c \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. Zeigen Sie, dass der Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) := x_0 e^{ct} + \sigma e^{ct} \int_0^t e^{-cs} dB_s, \qquad t \geq 0,$$

   folgende Integralgleichung löst:

$$X(t) = x_0 + c\int_0^t X(s)ds + \sigma \int_0^t dB(s), \qquad t \geq 0.$$

5. Sei $c \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. Zeigen Sie, dass der Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) := x_0 \exp\Big((c - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)\Big), \qquad t \geq 0,$$

   folgende Integralgleichung löst:

$$X(t) = x_0 + c\int_0^t X(s)ds + \sigma \int_0^t X(s)dB(s), \qquad t \geq 0.$$

6. Sei $B = \{B(t) : 0 \leq t < \infty\}$ eine Brownsche Bewegung und $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion. Sei

$$v(t,x) = \mathbb{E}^x e^{-\int_0^t q(B(s))\,ds}\, B(s).$$

Zeigen Sie dass gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dv(t,x)}{dt} &= \frac{d^2 v(t,x)}{dx^2} + q(v(t,x)), \\ v(0,x) &= f(x). \end{aligned}$$

7. Gegeben ist folgende Differentialgleichung (σ ist Lipschitz stetig)

$$dX(s) = \sigma(X(s))dB(s), \quad s \geq 0. \tag{1}$$

Sei X eine Lösung von (1) mit Anfangswert x und sei Y eine Lösung von (1) mit Anfangswert y. Zeigen Sie, dass gilt: Für alle $t \geq 0$ gibt es eine Konstante $C > 0$ sodass gilt

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} |X(s) - Y(s)|^2 \leq C\,|x-y|^2.$$

8. Sie B eine eindimensionale BB und $x > 0$ eine Konstante

$$X(t) := \left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}B(t)\right)^3; \quad t \geq 0.$$

Zeigen Sie dass X eine Lösung folgender Differenzialgleichung ist:

$$dX(t) = \frac{1}{3}X(t)^{\frac{1}{3}}\,dt + X(t)^{\frac{2}{3}}\,dB(t), \text{ mit } X_0 = x, \quad \forall t \geq 0 \tag{2}$$

Was können Sie über die Eindeutigkeit von (2) sagen, gibt es mehrere Lösungen, wie sehen diese aus ?

9. Sei

$$I_n(B) := \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots dB(t_2)\,dB(t_1)\,.$$

Berechnen Sie für $n, m \in \mathbb{N}$

$$I_1(B) \cdot I_n(B)$$

und

$$I_m(B) \cdot I_n(B)$$

Zeigen Sie dass gilt $I_n(B) = H_n(B) \cdot C(n)$.