Kurze Zusammenfassung zur Numerik von Stochastischen Differentialgleichungen

Im weiteren sei $X = \{X(t) : 0 \leq t \leq T\}$ Lösung folgender Differential -gleichung:

$$\begin{cases} dX(t) &= b(X(t))\,dt + \sigma(X(t))dB(t), \\ X(0) &= x_0. \end{cases}$$

Das *Euler Maruyama Scheme*: Sei $\{\xi_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Folge unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen, sodass $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, \tau)$, und $\{\hat{X}_k : k \in \mathbb{N}\}$ durch folgende Rekursion gegeben:

$$\begin{cases} \hat{X}_k &= \hat{X}_{k-1} + b(\hat{X}_{k-1})\tau + \sigma(\hat{X}_{k-1})\,\xi_k, \quad k \geq 1, \\ \hat{X}_0 &= x_0. \end{cases}$$

Man unterscheidet folgende drei Arten von Fehlern:

a.) *Der starke Fehler:*

$$\left(\mathbb{E}\left|X(\tau k) - \hat{X}_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

b.) *Der schwache Fehler:* Sei $\phi \in C_b^{(2)}(\mathbb{R})$ fix.

$$\left|\mathbb{E}\phi(X(\tau k)) - \hat{\mathbb{E}}\phi(\hat{X}_k)\right|$$

c.) *Der Fehler fast überall:* Es existiert eine Zufallsvariable sodass gilt:

$$\left|X(\tau k) - \hat{X}_k\right| \leq C(\omega)\,\tau^\alpha.$$

Theorem 0.1. *Sind σ und b mit $b, \sigma \in C_b^{(3)}(\mathbb{R})$ dann ist der starke Fehler von Ordnung $\frac{1}{2}$.*

Proof. **1. Schritt:** Im ersten Schritt schreiben wir die Differenz als alternierende Summe:

$$\left|X(\tau k) - \hat{X}_k\right| \quad = \quad \left|\sum_{n=0}^{k} X((k-(n-1))\tau, \hat{X}_{n-1}) - X((k-n)\tau, \hat{X}_n)\right|$$

Sei $\hat{\mathcal{F}}_k := \mathcal{F}_{k\tau}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|X(\tau k) - \hat{X}_k\right| \\
&\leq \mathbb{E}\Bigg|\sum_{n=0}^{k} X((k-(n-1))\tau, \hat{X}_{n-1}) - X((k-n)\tau, \hat{X}_n) \\
&\qquad - \mathbb{E}\left[X((k-(n-1))\tau, \hat{X}_{n-1}) - X((k-n)\tau, \hat{X}_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[X((k-(n-1))\tau, \hat{X}_{n-1}) - X((k-n)\tau, \hat{X}_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]\Bigg| \\
&\leq \mathbb{E}\Bigg|\sum_{n=0}^{k} X((k-(n-1))\tau, \hat{X}_{n-1}) - X((k-n)\tau, \hat{X}_n) \\
&\qquad - \mathbb{E}\left[X((k-(n-1))\tau, \hat{X}_{n-1}) - X((k-n)\tau, \hat{X}_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]\Bigg| \\
&\qquad + \mathbb{E}\left|\sum_{n=0}^{k} \mathbb{E}\left[X((k-(n-1))\tau, \hat{X}_{n-1}) - X((k-n)\tau, \hat{X}_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]\right| \\
&= S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

Im Hilberträumen gilt für jedes diskrete Martingal $\{M_k : k \in \mathbb{N}\}$

$$\mathbb{E}\,|M_k|^p \leq \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{k} |M_n - M_{n-1}|^2\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
S_1 &= \mathbb{E}\Bigg|\sum_{n=0}^{k} X((k-(n-1))\tau, \hat{X}_{n-1}) - X((k-n)\tau, \hat{X}_n) \\
&\qquad - \mathbb{E}\left[X((k-(n-1))\tau, \hat{X}_{n-1}) - X((k-n)\tau, \hat{X}_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]\Bigg| \\
&\leq \mathbb{E}\sum_{n=0}^{k} \Bigg|X((k-(n-1))\tau, \hat{X}_{n-1}) - X((k-n)\tau, \hat{X}_n) \\
&\qquad - \mathbb{E}\left[X((k-(n-1))\tau, \hat{X}_{n-1}) - X((k-n)\tau, \hat{X}_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]\Bigg|^2 \\
&\leq \mathbb{E}\sum_{n=0}^{k} \left|X((k-(n-1))\tau, \hat{X}_{n-1}) - X((k-n)\tau, \hat{X}_n)\right|^2 \\
&\qquad + \left|\mathbb{E}\left[X((k-(n-1))\tau, \hat{X}_{n-1}) - X((k-n)\tau, \hat{X}_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]\right|^2 \\
&\leq \sum_{n=0}^{k} \mathbb{E}\left|X((k-(n-1))\tau, \hat{X}_{n-1}) - X((k-n)\tau, \hat{X}_n)\right|^2 \\
&\qquad + \mathbb{E}\left|\mathbb{E}\left[X((k-(n-1))\tau, \hat{X}_{n-1}) - X((k-n)\tau, \hat{X}_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]\right|^2
\end{aligned}$$

Die Lipschitzstetigkeit der Lösung bzgl. den Anfangsbedingungen ergibt:

$$S_1 \quad \leq \quad 2\sum_{n=0}^{k} \mathbb{E}\left|X(\tau,\hat{X}_{n-1}) - \hat{X}_1(\hat{X}_{n-1})\right|^2 .$$

Also, zu berechnen ist

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|[X(\tau,y)-\hat{x}_1(y)] - \mathbb{E}\left[X(\tau,y)-\hat{x}_1(y)\right]\right|^2 \\
&= \quad \Bigg| \int_0^\tau \left(\sigma(X(s))-\sigma(y)\right)\, dB(s) + \int_0^\tau \left(b(X(s))-b(y)\right)\, ds \\
&\qquad -\mathbb{E}\left[\int_0^\tau \left(\sigma(X(s))-\sigma(y)\right)\, dB(s) + \int_0^\tau \left(b(X(s))-b(y)\right)\, ds\right]\Bigg|^2 .
\end{aligned}$$

Die Itô formel ergibt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|[X(\tau,y)-\hat{x}_1(y)] - \mathbb{E}\left[X(\tau,y)-\hat{x}_1(y)\right]\right|^2 \\
&= \quad \mathbb{E}\Bigg| \int_0^\tau \int_0^s \sigma(X(r))\sigma'(X(r))\, dB(r)\, dB(s) + \int_0^\tau \int_0^s b(X(r))\sigma'(X(r))\, dr\, dB(s) \\
&\qquad +\frac{1}{2}\int_0^\tau \int_0^s \sigma(X(r))\sigma''(X(r))\, dr\, ds + \int_0^\tau \int_0^s \sigma(X(r))b'(X(r))\, dB(r)\, ds \\
&\qquad +\int_0^\tau \int_0^s b(X(r))b'(X(r))\, dr\, dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_0^s \sigma(X(r))b''(X(r))\, dr\, ds \\
&\qquad -\mathbb{E}\left[\int_0^\tau \left(\sigma(X(s))-\sigma(y)\right)\, dB(s) + \int_0^\tau \left(b(X(s))-b(y)\right)\, ds\right]\Bigg|^2 \\
&\leq \quad \mathbb{E}\left|\int_0^\tau \int_0^s \sigma(X(r))\sigma'(X(r))\, dB(r)\, dB(s)\right|^2 \\
&+ \quad \mathbb{E}\left|\int_0^\tau \int_0^s b(X(r))\sigma'(X(r))\, dr\, dB(s)\right|^2 \\
&+ \quad \frac{1}{2}\mathbb{E}\left|\int_0^\tau \int_0^s \sigma(X(r))\sigma''(X(r))\, dr\, ds\right|^2 \\
&+ \quad \mathbb{E}\left|\int_0^\tau \int_0^s \sigma(X(r))b'(X(r))\, dB(r)\, ds\right|^2 \\
&+ \quad \mathbb{E}\left|\int_0^\tau \int_0^s b(X(r))b'(X(r))\, dr\, ds\right|^2 \\
&+ \quad \mathbb{E}\left|\int_0^\tau \int_0^s \sigma(X(r))b''(X(r))\, dr\, ds\right|^2 .
\end{aligned}$$

Jetzt gilt es jedes einzelnen Term abzuschätzen. Der 'worst case' ist der Term wo jeweils über den Wiener Prozess integriert wird. Das heisst der erste Term. Zweimal die Itô Isometrie angewendet ergibt

$$\mathbb{E}\left|\int_0^\tau \int_0^s \sigma(X(r))\sigma'(X(r))\,dB(r)\,dB(s)\right|^2$$
$$= \mathbb{E}\int_0^\tau \left|\int_0^s \sigma(X(r))\sigma'(X(r))\,dB(r)\right|^2 ds$$
$$= \quad \mathbb{E}\int_0^\tau \int_0^s \left|\sigma(X(r))\sigma'(X(r))\right|^2 \,dr\,ds$$

Da σ Lipschitz stetig ist, ist σ' beschränkt und da $\mathbb{E}|X(t)|^2 \le C$ gilt, erhalten wir die Abschätzung

$$\mathbb{E}\left|\int_0^\tau \int_0^s \sigma(X(r))\sigma'(X(r))\,dB(r)\,dB(s)\right|^2 \quad \le \quad C\,\tau^2.$$

Setzt man diesen Term in die Summe für S_1 ein, erhält man

$$S_1 \quad \le \quad 2\sum_{n=0}^k \mathbb{E}\left|X(\tau,\hat{X}_{n-1}) - \hat{X}_1(\hat{X}_{n-1})\right|^2 \le C\sum_{n=0}^k \tau^2 \le C\,\tau.$$

Die gleichen Überlegungen kann man mit S_2 machen. Zieht man die Wurzel, erhält man als Fehler

$$\mathbb{E}\left|X(\tau k) - \hat{X}_k\right| \quad \le \quad \left(\mathbb{E}\left|X(\tau k) - \hat{X}_k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le C\,\tau.$$

□

1. Der schwache Fehler

Idee: Sei $(P_t)_{t\ge 0}$ die Markovian Halbgruppe von X

$$P_t\phi(x) = \mathbb{E}\phi(u(t,x)), \quad x\in\mathbb{R}, \quad t\ge 0, \quad \phi\in B(\mathbb{R}),$$

und $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die (diskrete) Markovian Halbgruppe von $\hat{X}$, i.e.

$$Q_n\phi(x) = \mathbb{E}\phi(\hat{u}_n(x))), \quad x\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N}, \quad \phi\in B(\mathbb{R}),$$

Dann gilt ja für $t=1$, i.e. $n\tau = 1$

$$P_t - Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} P_{k\tau}\left[P_\tau - Q_1\right] Q_{n-k-1}.$$

Remark 1.1. *Es gilt ja $Q_n = (Q_1)^n$, $n\in\mathbb{N}$.*

Ausarbeitung: Wie Talay und Tubaro (Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations, 1990) führen wir folgende Funktion Φ ein:

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathcal{H}_0 \times [0,T] & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,t) & \mapsto & \Psi(x,y,t), \end{array}$$

wobei

$$\Psi(x,t) := \mathbb{E}^x \left[\phi\left(X(T-t) \right) \right], \quad t \in [0,T].$$

Damit können wir den schwachen Fehler folgendermaßen umschreiben

$$\mathrm{err}(\phi) = \left| \mathbb{E}^{x_0} \Psi(\hat{X}_n, T) - \mathbb{E}^{x_0} \Psi(X(T), 0) \right|.$$

Aufgrund der 'tower property' des bedingten Erwartungswert haben wir

$$\begin{aligned} \mathrm{err}(\phi) &= \mathbb{E}^{x_0} \sum_{i=0}^{n-1} \Psi\left(\hat{X}_{n-i}, (n-i)\tau_h \right) - \Psi\left(\hat{X}_{n-(i+1)}, (n-(i+1))\tau_h \right) \\ &= \mathbb{E}^{x_0} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}^{\hat{X}_{n-i-1}} \left[\Psi\left(\hat{X}_1, (n-i)\tau_h \right) - \Psi\left(x_0, (n-i-1)\tau_h \right) \right]. \end{aligned}$$

Das heißt wir müssen folgende Differenzen abschätzen:

$$\mathrm{err}_\Psi(k) := \left| \mathbb{E}^x \left[\Psi\left(\hat{X}_1, (n-k)\tau \right) - \Psi\left(x, (n-k-1)\tau \right) \right] \right|, \quad k \in \{0, \ldots, n-1\},$$

wobei x eine $\mathcal{F}_{k\tau}$-messbare Zufallsvariable ist. Da wir Konvergenzordnung eins wollen, müssen wir zeigen dass der Ausdruck von Ordnung zwei ist, d.h.

$$\mathrm{err}(k) \le C\, \tau^2, \quad \tau > 0.$$

Interpolieren wir den an sich diskreten Prozess $\hat{X} = \{\hat{X}_n : n \in \mathbb{N}\}$ durch einen stetigen Prozess $\hat{X} = \{\hat{X}(t) : 0 \le t < \infty\}$ der folgende Gleichung löst (der Prozess $\hat{X}$ ist so gewählt, dass $\hat{X}(k\tau) = \hat{X}_k$ gilt): Sei $t \in [k\tau, (k+1)]$:

$$\left\{ \; d\hat{X}(t) = b(\hat{X}_k)\, dt + \sigma(\hat{X}_k) dB(t), \right. \tag{1.1}$$

Da $\hat{X}_k = \hat{X}(k\tau)$ gilt, setzten wir für den diskreten Prozess $\hat{X}$ den stetigen Prozess $\hat{X}$ ein. Dass führt dann zu

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^x \left[\Psi\left(\hat{X}_1, (n-k)\tau \right) - \Psi\left(x, (n-k-1)\tau \right) \right] \\ &\quad = \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \left(\Psi_t(\hat{X}(s), s) + b(\hat{X}_k)\Psi_x(\hat{X}(s), s) + \frac{1}{2}\sigma(\hat{X}_k)^2 \Psi_{xx}(\hat{X}(s), s) \right) ds \end{aligned}$$

Aus der Definition von Ψ folgt dass

$$\Psi_t(x,t) = -b(x)\Psi_x(x,s) + \frac{1}{2}\sigma(x)^2 \Psi_{xx}(x,s).$$

Oben eingesetzt erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^x\left[\Psi\left(\hat{X}_1,(n-k)\tau\right)-\Psi\left(x,(n-k-1)\tau\right)\right]\\
&= \int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\Big(-b(\hat{X}(s))\Psi_x(\hat{X}(s),s)-\frac{1}{2}\sigma(\hat{X}(s))^2\Psi_{xx}(\hat{X}(s),s)\\
&\qquad + b(\hat{X}_k)\Psi_x(\hat{X}(s),s)+\frac{1}{2}\sigma(\hat{X}_k)^2\Psi_{xx}(\hat{X}(s),s)\Big)\,ds\\
&= \int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\Big(b(\hat{X}(k\tau))\Psi_x(\hat{X}(k\tau),k\tau)-b(\hat{X}(s))\Psi_x(\hat{X}(s),s)\Big)\,ds\\
&\qquad +\frac{1}{2}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\Big(\sigma(\hat{X}(k\tau))^2\Psi_{xx}(\hat{X}(k\tau),k\tau)-\sigma(\hat{X}(s))^2\Psi_{xx}(\hat{X}(s),s)\Big)\,ds\\
&\qquad +\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\Big(b(\hat{X}_k)\Psi_x(\hat{X}(s),s)-b(\hat{X}(k\tau))\Psi_x(\hat{X}(k\tau),k\tau)\Big)\,ds\\
&\qquad +\frac{1}{2}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\Big(\sigma(\hat{X}_k)^2\Psi_{xx}(\hat{X}(s),s)-\sigma(\hat{X}(k\tau))^2\Psi_{xx}(\hat{X}(k\tau),k\tau)\Big)\,ds.
\end{aligned}
$$

Wendet man jetzt nochmals die Itô Formel an, bekommt man ein Ausdruck der über zwei Integrale geht:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^x\left[\Psi\left(\hat{X}_1,(n-k)\tau\right)-\Psi\left(x,(n-k-1)\tau\right)\right]\\
&= \int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\int_{k\tau}^{s} b'(\hat{X}(r))\Psi_x(\hat{X}(r),s)+\quad\cdots\quad+\sigma(\hat{X}_k)^2\Psi_{xxxx}(\hat{X}(r),r)\,dr\,ds.
\end{aligned}
$$

Als Voraussetzung für das Theorem erhält man, indem man genau analysiert wie man den letzten Term abschätzen kann.

Department für Mathematik und Informationstechnologie, Montana Universität Leoben