# Übungsblatt 1

1. Seien die Zufallsvariablen $\{\tau_i : i \in \mathbb{N}\}$ iid exponentialverteilt mit Parameter $\lambda$ (also $F_{\tau_i}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ für $t \geq 0$). Zeige, dass die Zufallsvariable
$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$$
folgende Dichte $f_{T_n}$ besitzt
$$f_{T_n}(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

2. Seien $\{\tau_i : i \in \mathbb{N}\}$ und $T_n$ wie in Beispiel 1. Außerdem sei $N_t$ der assoziierte Poisson-Prozess
$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}_{\{t \geq T_n\}}.$$
Zeige, dass gilt
$$\mathbb{P}\left[T_{n+1} - t \leq t_1, \tau_{n+2} \leq t_2, \ldots, \tau_{n+m} \leq t_m \middle|\, N_t = n\right] = \mathbb{P}\left[\tau_1 \leq t_1, \tau_2 \leq t_2, \ldots, \tau_m \leq t_m\right].$$

3. Seien $N_t$ der oben beschriebene Poisson Prozess und $Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} F_Y$, $i \in \mathbb{N}$ gegeben. Zeige, dass der zusammengesetzte Poisson Prozess
$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$
ein Lévy Prozess ist.

4. Seien $(E, \mathcal{E}, \rho)$ ein Maßraum mit $\rho(E) < \infty$, $M$ eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\rho(E)$ und $X_i$, $i \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit
$$\mathbb{P}[X_i \in A] = \frac{\rho(A)}{\rho(E)} \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$
Zeige, dass die Abbildung
$$M(\omega, A) = \sum_{i=1}^{M} \mathbb{I}_A(X_i(\omega)), \qquad \omega \in \Omega,\ A \in \mathcal{E}$$
ein Poisson Zufallsmaß ist.

5. Betrachte den zusammengesetzten Poisson Prozess $X_t$ mit Intensität $\lambda$ aus Beispiel 3. Man nehme an, dass $F_Y(y) = \Phi(y)$, also die $Y_i$ $N(0,1)$ verteilt seien. Berechne das charakteristische Tripel von $X_t$. Können die Stutzfunktion $g(x) \equiv 1$ und $g(x) \equiv 0$ verwendet werden? Wie wirkt sich das auf den ersten Parameter des Tripels aus?

6. Betrachte wiederum den Prozess aus Beispiel 5. Wie sieht die Lévy Itô Dekomposition aus, wie das Poisson Zufallsmaß? Ist der Limes im 4. Teil der Dekomposition nötig? Wie erhält man aus der Dekomposition die Darstellung des Prozesses in Beispiel 3?

7. Sei $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Zufallsvariablen. Zeige: Falls $X_n$ in Verteilung gegen eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann konvergiert $X_n$ auch in Wahrscheinlichkeit. Also:
$$X_n \xrightarrow{d} c \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c.$$

8. Sei $\{X_t : t \geq 0\}$ ein Lévy-Prozess mit charakteristischem Tripel $(\sigma^2, \gamma, \nu)$, sodass $\nu((0,\infty)) > 0$. Sei $Y_t$ der größte Sprung von $\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$, also $Y_t = \max_{s\in(0,t]}(X_s - X_{s-})$. Zeige für $a > 0$
$$\mathbb{P}[Y_t \geq a] = 1 - \mathrm{e}^{-t\nu([a,\infty))}.$$

9. Sei $\{X_t : t \geq 0\}$ ein Lévy-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Zeige dass gilt:
   (a) Der Prozess $\left\{\frac{\mathrm{e}^{iuX_t}}{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuX_t}]} : t \geq 0\right\}$ ist ein Martingal $\forall u \in \mathbb{R}$.
   (b) Der Prozess $\left\{\frac{\mathrm{e}^{uX_t}}{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{uX_t}]} : t \geq 0\right\}$ ist ein Martingal für $u \in \mathbb{R}$, falls gilt $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{uX_t}] < \infty \ \forall t \geq 0$.
   (c) Wenn $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$, dann ist der Prozess $\{X_t - \mathbb{E}[X_t] : t \geq 0\}$ ein Martingal

   (Hinweis: Benutze die Unabhängigkeit der Zuwächse eines Lévy-Prozesses.)

**Definition.** Eine nichtnegative Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt submultiplikativ, falls sie lokal beschränkt ist ($\Leftrightarrow \forall K \subset \mathbb{R}$ kompakt: $g(x) < \infty \ \forall x \in K$) und
$$\exists\, a > 0 : \quad g(x+y) \leq a g(x) g(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

10. Sei $g$ submultiplikativ und $\{X_t : t \geq 0\}$ ein Lévy-Prozess mit charakteristischem Tripel $(\sigma^2, \gamma, \nu)$, wobei $\nu(\mathbb{R}/[-1,1]) = 0$ (also $|\Delta X| \leq 1$). Zeige:
    (a) Es gibt $b, c > 0$, sodass
    $$g(x) \leq b\,\mathrm{e}^{c|x|}.$$
    (b) Für alle $0 \leq t < \infty$ gilt:
    $$\mathbb{E}[g(X_t)] < \infty.$$
    (Hinweis: Verwende Punkt (a) und die Lévy-Khintchine-Darstellung der charakteristischen Funktion.)

11. Sei $\{X_t : t \geq 0\}$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit charakteristischem Tripel $(0, \gamma, \nu)$. Man bemerke, dass $\nu = \lambda F_Y$, wobei $0 < \lambda < \infty$ die Sprungintensität und $F_Y$ die Verteilung der Sprunghöhen ist. Zeige für eine submultiplikative Funktion $g$
$$\mathbb{E}[g(X_1)] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} g(y)\, dF_Y(y) < \infty.$$
    (Hinweis: Benutze die Unabhängigkeit der Sprunghöhen und der Sprungzeitpunkte, sowie die Glättungseigenschaft des bedingten Erwartungswertes)