

**FINANZ- UND  
VERSICHERUNGSMATHEMATIK**

**Hansjörg Albrecher**

**Institut für Mathematik B  
Technische Universität Graz**

**Version: Februar 2006**



# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Risikomodelle</b>                                 | <b>5</b>  |
| 1.1      | Das individuelle Risikomodell . . . . .              | 6         |
| 1.1.1    | Allgemeines . . . . .                                | 6         |
| 1.1.2    | Schadenshöhenverteilungen . . . . .                  | 8         |
| 1.2      | Das kollektive Risikomodell . . . . .                | 8         |
| 1.2.1    | Allgemeines . . . . .                                | 8         |
| 1.2.2    | Modelle für die Verteilung von $N$ . . . . .         | 10        |
| 1.2.3    | Schadenshöhenverteilungen . . . . .                  | 15        |
| 1.3      | Bemerkung zum Individuellen Risikomodell . . . . .   | 16        |
| 1.4      | Approximationen für $S$ . . . . .                    | 17        |
| 1.4.1    | Die Normalapproximation . . . . .                    | 17        |
| 1.4.2    | Die verschobene Gamma-Approximation . . . . .        | 18        |
| 1.4.3    | Die Edgeworth-Approximation . . . . .                | 19        |
| 1.5      | Diskrete Schadenshöhen . . . . .                     | 21        |
| 1.6      | Literatur . . . . .                                  | 23        |
| 1.7      | Übungsaufgaben . . . . .                             | 23        |
| <b>2</b> | <b>Prämienkalkulation</b>                            | <b>27</b> |
| 2.1      | Nutzentheorie . . . . .                              | 27        |
| 2.2      | Prämienkalkulationsprinzipien . . . . .              | 31        |
| 2.3      | Verteilung des Risikos durch Kooperation . . . . .   | 34        |
| 2.4      | Rückversicherung . . . . .                           | 34        |
| 2.4.1    | Ein Beispiel . . . . .                               | 34        |
| 2.4.2    | Rückversicherung im kollektiven Modell . . . . .     | 36        |
| 2.5      | Literatur . . . . .                                  | 39        |
| 2.6      | Übungsaufgaben . . . . .                             | 39        |
| <b>3</b> | <b>Das Cramér-Lundberg Modell</b>                    | <b>41</b> |
| 3.1      | Das Modell . . . . .                                 | 41        |
| 3.2      | Der Anpassungskoeffizient . . . . .                  | 44        |
| 3.3      | Martingale und der Anpassungskoeffizient . . . . .   | 47        |
| 3.4      | Ruinwahrscheinlichkeit ohne Startkapital . . . . .   | 47        |
| 3.5      | Das erste Kapital unter dem Anfangskapital . . . . . | 49        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.6      | Literatur . . . . .                              | 50        |
| 3.7      | Übungsaufgaben . . . . .                         | 50        |
| <b>4</b> | <b>Optionspreistheorie</b>                       | <b>51</b> |
| 4.1      | Das No-Arbitrage-Prinzip . . . . .               | 51        |
| 4.2      | Derivative Finanzprodukte . . . . .              | 52        |
| 4.2.1    | Forwards und Futures . . . . .                   | 52        |
| 4.2.2    | Optionen . . . . .                               | 53        |
| 4.3      | Eigenschaften von Optionspreisen . . . . .       | 54        |
| 4.3.1    | Allgemeines . . . . .                            | 55        |
| 4.3.2    | Berücksichtigung von Dividenden . . . . .        | 59        |
| 4.4      | Handelsstrategien mit Optionen . . . . .         | 60        |
| 4.5      | Das binomiale Optionspreismodell . . . . .       | 62        |
| 4.5.1    | Optionspreismodell mit einer Periode . . . . .   | 62        |
| 4.5.2    | Das Cox-Ross-Rubinstein-Binomialmodell . . . . . | 65        |
| 4.6      | Das Black-Scholes-Modell . . . . .               | 68        |
| 4.7      | Die Formel von Black-Scholes . . . . .           | 71        |
| 4.7.1    | Herleitung . . . . .                             | 71        |
| 4.7.2    | Diskussion . . . . .                             | 74        |
| 4.8      | Weitere Modelle . . . . .                        | 76        |
| 4.9      | Marktgleichgewicht und Derivate . . . . .        | 77        |
| 4.9.1    | Marktgleichgewicht . . . . .                     | 77        |
| 4.9.2    | Preisbestimmung von Derivaten . . . . .          | 80        |
| 4.10     | Literatur . . . . .                              | 82        |
| 4.11     | Übungsaufgaben . . . . .                         | 82        |
| <b>5</b> | <b>Simulationstechniken</b>                      | <b>87</b> |
| 5.1      | Die Monte Carlo Methode . . . . .                | 87        |
| 5.1.1    | Allgemeines . . . . .                            | 87        |
| 5.1.2    | Anwendungen in der Risikotheorie . . . . .       | 88        |
| 5.1.3    | Quasi-Monte Carlo Methoden . . . . .             | 91        |
| 5.1.4    | Ein Beispiel mit asiatischen Optionen . . . . .  | 93        |
| 5.1.5    | Ein Beispiel mit Zinsraten-Derivaten . . . . .   | 95        |
| 5.2      | Literatur . . . . .                              | 97        |
| <b>6</b> | <b>Wahrscheinlichkeitstheorie</b>                | <b>99</b> |

# Kapitel 1

## Risikomodelle

*The function of the expert is not to be more right than other people, but to be wrong for more sophisticated reasons.*

DAVID BUTLER

**Definition 1** *Unter einem Risiko verstehen wir eine Zufallsvariable  $X$ , die nur nicht-negative Werte annimmt.*

In der klassischen Lebensversicherung werden üblicherweise einzelne Lebensversicherungsverträge und deren Eigenschaften (wie erwartete Auszahlungen, Prämien,..) betrachtet. Für Versicherungsgesellschaften ist es jedoch vorteilhaft, ein ganzes Portfolio von Versicherungsverträgen (den *Policen*) auf die zu erwartenden Gesamtausgaben hin zu untersuchen (und dann beispielsweise die notwendige Gesamtprämie auf die einzelnen Policen aufzuteilen). Dies gilt insbesondere für den Schadensversicherungsbereich (z.B. KfZ, Haftpflicht). Allgemein bezeichnen wir in der Folge jede vom Versicherer an den Versicherten zu erbringende finanzielle Leistung als “Schaden”.

Wir bezeichnen mit  $S$  den Gesamtverlust (bzw. Gesamtschaden) eines Portfolios von Versicherungsverträgen einer Versicherungsgesellschaft in einer bestimmten Zeiteinheit (z.B. 1 Jahr). Typischerweise sind in einem solchen Portfolio Verträge derselben Versicherungssparte (z.B. Lebensversicherung, Krankenversicherung, KfZ-Versicherung usw.) enthalten.

$S$  ist eine Zufallsvariable (“das Risiko”), deren Verteilung wir je nach zugrundeliegendem Modell bestimmen wollen. In der Folge werden wir zwei Risikomodelle unterscheiden, das *individuelle* Risikomodell und das *kollektive* Risikomodell. In diesem Kapitel wird der Zeitwert des Geldes (im Gegensatz zum vorigen Kapitel über Lebensversicherungen) der Einfachheit halber nicht berücksichtigt (der Zinssatz wird also gleich Null gesetzt). Es handelt sich hier somit

genaugenommen um Risikomodelle für kurze Zeitspannen (engl. “*risk models for a short term*”). Längere Zeitspannen werden in Kapitel 3 behandelt.

## 1.1 Das individuelle Risikomodell

### 1.1.1 Allgemeines

Im individuellen Risikomodell wird

$$S = Y_1 + \dots + Y_n \tag{1.1}$$

definiert, wobei  $Y_i$  den Schaden (bzw. die zu erbringende Versicherungsleistung) bezeichnet, der aus der  $i$ -ten Police innerhalb des betrachteten Zeitintervalls erwächst, und  $n$  ist die Gesamtanzahl der Policen im Portfolio. Dabei wollen wir voraussetzen, dass die Zufallsvariablen  $Y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) voneinander unabhängig sind.



**Beispiel 1:** In einem Lebensversicherungsportfolio einer Versicherungsgesellschaft befinden sich 1000 Versicherungsverträge vom Typ A sowie 800 Versicherungsverträge vom Typ B, wobei Typ A eine 1-jährige Todesfallversicherung mit Versicherungssumme 1000 € ist und Typ B eine 1-jährige Todesfallversicherung mit Versicherungssumme 3000 €. Unter der (stark vereinfachenden) Annahme, dass jeder der Versicherungsnehmer in diesem Jahr die gleiche Sterbewahrscheinlichkeit  $q_x = 0.003$  besitzt, sollen die ersten beiden Momente des Gesamtschadens  $S$ , der für die Versicherung aus diesem Portfolio entsteht, berechnet werden:

Die Zufallsvariable  $Y_i^{(A)}$ , die den Auszahlungsbetrag an den  $i$ -ten Versicherten vom Typ A beschreibt, hat folgende Zweipunktverteilung:

$$\mathbb{P}[Y_i^{(A)} = 0] = p_x \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[Y_i^{(A)} = 1000] = q_x$$

für  $i = 1, \dots, 1000$ . Analog gilt

$$\mathbb{P}[Y_i^{(B)} = 0] = p_x \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[Y_i^{(B)} = 3000] = q_x$$

für  $i = 1, \dots, 800$ . Es folgt somit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^{1000} Y_i^{(A)} + \sum_{i=1}^{800} Y_i^{(B)} \right] = \sum_{i=1}^{1000} \mathbb{E}[Y_i^{(A)}] + \sum_{i=1}^{800} \mathbb{E}[Y_i^{(B)}] \\ &= 1000 \cdot 3 + 800 \cdot 9 = 10200 \text{ €} \end{aligned}$$

und wegen der Unabhängigkeit der  $Y_i$

$$\begin{aligned} \text{Var}[S] &= \text{Var} \left[ \sum_{i=1}^{1000} Y_i^{(A)} + \sum_{i=1}^{800} Y_i^{(B)} \right] = 1000 \text{Var}[Y_i^{(A)}] + 800 \text{Var}[Y_i^{(B)}] \\ &= 1000 \cdot 10^6 q_x p_x + 800 \cdot 9 \cdot 10^6 q_x p_x = 24.5 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

Falls die Schäden  $Y_i$  alle identisch verteilt sind (mit Verteilungsfunktion  $G$ ), so folgt wegen der Unabhängigkeit und (1.1) für die Verteilung von  $S$

$$\mathbb{P}(S \leq x) = G^{*n}(x). \quad (1.2)$$

Dabei bezeichnet  $G^{*n}$  die  $n$ -fache Faltung von  $G$  mit sich selbst. Man beachte, dass für eine realistische Schadenshöhenverteilung  $G$  der Großteil der Wahrscheinlichkeitsmasse bei 0 liegen muss, da in praktisch allen Versicherungsbranchen die überwiegende Mehrzahl der Risiken (pro Zeiteinheit gesehen) schadenfrei bleibt. Die Verteilungsfunktion  $G$  hat hier also keine stetige Dichte. Der Gesamtschaden  $S$  wird (nach Standardisierung) gemäß dem Zentralen Grenzwertsatz für wachsende Zahl  $n$  von unabhängigen identisch verteilten Schadenshöhen  $Y_i$  einer Nor-

malverteilung immer ähnlicher (im Sinne der Verteilungskonvergenz). Da die  $Y_i$  hier aber meist extrem unsymmetrisch sind, ist dafür eine große Zahl  $n$  an versicherten Risiken notwendig. Um auch für die vielen Fälle kleinerer Risikogruppen eine brauchbare Approximation von  $S$  zu finden, versucht man wegen (1.2) in der individuellen Risikothorie die Schadenshöhen mit stetigen Verteilungen zu approximieren, deren Faltungen leicht berechenbar sind:

### 1.1.2 Schadenshöhenverteilungen

Im allgemeinen hängt es natürlich von der Versicherungssparte ab, welche Verteilungsfunktionen geeignete Modelle für die Schadenshöhen darstellen. Statistische Analysen zeigen jedoch, dass (v.a. im Schadensversicherungsbereich) die folgenden Verteilungen als realistische Modelle für Einzelschäden in Frage kommen:

- Gammaverteilung:

Die Gammaverteilung  $\Gamma(\alpha, \beta)$  ist gegeben durch ihre Dichte

$$g(x) = e^{-\beta x} x^{\alpha-1} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0. \quad (1.3)$$

Dabei muss hier  $\alpha < 1$  sein, damit möglichst viel Wahrscheinlichkeitsmasse bei 0 liegt. Mithilfe der momenterzeugenden Funktion lässt sich leicht zeigen, dass für die Summe  $S = Y_1 + \dots + Y_n$  von  $n$  iid-verteilten Zufallsvariablen  $Y_i \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  gilt:  $S \sim \Gamma(n\alpha, \beta)$ . Also ist in diesem Fall auch der Gesamtschaden  $S$  gammaverteilt.

- Inverse Gauss-Verteilung: Sie besitzt die Dichte

$$g(x) = \frac{\sqrt{\mu\alpha}}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{\alpha}{2}(x/\mu - 2 + \mu/x)}, \quad x > 0.$$

Die Summe von unabhängigen invers-Gauss-verteilten Zufallsvariablen ist wieder invers-Gauss-verteilt.

## 1.2 Das kollektive Risikomodell

### 1.2.1 Allgemeines

Das grundlegende Konzept ist hier ein Zufallsprozess, der Schäden innerhalb des Portfolios der Versicherungsverträge erzeugt. Dieser Prozess ist bezüglich des gesamten Portfolios definiert (und nicht bezüglich der einzelnen Policen wie beim individuellen Modell).



Betrachten wir also ein Versicherungsportfolio in einem festen Zeitintervall  $(0, T]$ , z.B.  $T = 1$  Jahr. Bezeichnen wir mit  $N$  die Anzahl der Schäden in  $(0, T]$  und mit  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$  die entsprechenden Schadenshöhen, so ist

$$S = \sum_{i=1}^N Y_i := \begin{cases} 0, & \text{falls } N = 0 \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N & \text{falls } N > 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

der Gesamtschaden im Zeitraum  $(0, T]$ . (1.4) nennt man eine *zufällige Summe*. Mit den folgenden Modellannahmen kann man dann die Verteilung des Gesamtrisikos  $S$  berechnen:

- i) Die Anzahl  $N$  der Versicherungsfälle ist eine Zufallsvariable, die die Werte  $0, 1, 2, 3, \dots$  annehmen kann.
- ii) Die jeweiligen Schadenshöhen  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$  sind positive Zufallsvariablen, die unabhängig sind, und alle dieselbe Verteilung besitzen mit Verteilungsfunktion  $G$ .
- iii) Die Schadenszahl  $N$  und die Schadenshöhen  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$  sind unabhängig.

In der Folge werden wir häufig zwei wichtige Formeln verwenden:

### Übung 1:

Man zeige, dass für zwei Zufallsvariablen  $W$  und  $V$  gilt:

$$\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[W|V]] \quad (1.5)$$

und

$$\text{Var}[W] = \text{Var}[\mathbb{E}[W|V]] + \mathbb{E}[\text{Var}[W|V]]. \quad (1.6)$$

Sei  $M_{Y_1}(r) = \mathbb{E}[e^{rY_1}]$  die momenterzeugende Funktion (engl. *moment generating function*, kurz: MGF) von  $Y_1$ ,  $\mu_n = \mathbb{E}[Y_1^n]$ , falls dieser Ausdruck existiert und  $\mu := \mu_1$ . Dann kann die Verteilung von  $S$  geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S \leq x] &= \mathbb{E}[\mathbb{P}[S \leq x|N]] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[S \leq x|N = n] \mathbb{P}[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[N = n] G^{*n}(x). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Hierbei bezeichnet  $G^{*n}$  wieder die  $n$ -fache Faltung von  $G$  mit sich selbst (die 0-fache Faltung hat eine auf 0 konzentrierte Dichte). Der Ausdruck (1.7) ist im allgemeinen schwierig zu berechnen. Manchmal ist es aber ausreichend, einige

Charakteristiken der Verteilung zu kennen. In diesem Modell kann der Erwartungswert, die Varianz und die MGF auf folgende Weise durch die entsprechenden Größen der Verteilungen von  $Y_i$  und  $N$  gewonnen werden:

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^N Y_i \right] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^N Y_i \mid N \right] \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^N \mu \right] = \mathbb{E}[N\mu] = E[N]\mu. \quad (1.8)$$

Weiters

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S^2] &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^N Y_i \right)^2 \mid N \right] \right] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Y_i Y_j \mid N \right] \right] \\ &= \mathbb{E} [N\mu_2 + N(N-1)\mu^2] = \mathbb{E} [N^2] \mu^2 + \mathbb{E}[N](\mu_2 - \mu^2), \end{aligned}$$

und somit

$$\text{Var}[S] = \text{Var}[N]\mu^2 + \mathbb{E}[N]\text{Var}[Y_1]. \quad (1.9)$$

Die momenterzeugende Funktion von  $S$  kann man wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} M_S(r) &= \mathbb{E}[e^{rS}] = \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ r \sum_{i=1}^N Y_i \right\} \right] = \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^N e^{rY_i} \right] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^N e^{rY_i} \mid N \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^N M_Y(r) \right] = \mathbb{E}[(M_Y(r))^N] = \mathbb{E}[e^{N \log(M_Y(r))}] = M_N(\log(M_Y(r))), \quad (1.10) \end{aligned}$$

wobei  $M_N(r)$  die MGF von  $N$  bezeichnet. Die höheren Momente von  $S$  können nun aus der MGF von  $S$  bestimmt werden. So ergibt sich beispielsweise die Schiefe der Verteilung von  $S$  mit der Formel

$$\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3] = \frac{d^3}{dr^3} \log(M_S(r)) \Big|_{r=0}.$$

## 1.2.2 Modelle für die Verteilung von N

Je nach Annahmen für die Verteilung der Schadensanzahl  $N$  ergeben sich folgende Modelle:

### 1.2.2.1 Das zusammengesetzte Binomialmodell

Wir treffen folgende zusätzliche Annahmen:

- Das betrachtete Zeitintervall  $[0, T]$  kann in  $n$  unabhängige und austauschbare kleinere Intervalle  $I_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) aufgeteilt werden.
- Es gibt höchstens einen Schadensfall pro Zeitintervall  $I_k$ .

Wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Schaden in einem Zeitintervall gleich  $p$  ist, dann ergibt sich aus obigen Annahmen, dass  $N$  binomialverteilt ist:

$$N \sim B(n, p).$$

Es ist also

$$E[S] = np\mu,$$

$$\text{Var}[S] = np(1-p)\mu^2 + np(\mu_2 - \mu^2) = np(\mu_2 - p\mu^2)$$

und

$$M_S(r) = (pM_Y(r) + 1 - p)^n.$$

### Übung 2:

Berechne die Schiefe von  $S$  im zusammengesetzten Binomialmodell, zuerst allgemein und dann für deterministische Schadenshöhen  $y_0$ .



#### 1.2.2.2 Das zusammengesetzte Poissonmodell

(engl. *compound Poisson model*)

Zusätzlich zu den Annahmen im zusammengesetzten Binomialmodell fordern wir noch

- $n$  ist groß und  $p$  ist klein.

Sei  $\lambda := np$ . Wegen

$$B(n, \lambda/n) \rightarrow \text{Pois}(\lambda) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

ist es naheliegend, die Schadensanzahl mit einer Poisson-verteilter Variable zu modellieren:

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Es gilt dann  $\mathbb{E}[N] = \text{Var}[N] = \lambda$  und man erhält

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S] &= \lambda\mu, \\ \text{Var}[S] &= \lambda\mu^2 + \lambda(\mu_2 - \mu^2) = \lambda\mu_2. \end{aligned}$$

Weiters kennen wir die MGF der Poisson-Verteilung  $M_{\text{Pois}}(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$  und können somit wegen (1.10) die MGF des Gesamtschadens  $S$  im zusammengesetzten Poissonmodell berechnen:

$$M_S(t) = e^{\lambda(M_Y(t) - 1)}.$$

Wir berechnen nun noch die Schiefe von  $S$ :

$$\frac{d^3}{dr^3} \log(M_S(r)) = \frac{d^3}{dr^3} (\lambda(M_Y(r) - 1)) = \lambda M_Y'''(r)$$

und somit

$$\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3] = \lambda\mu_3.$$

Der Schiefekoeffizient ist dann gegeben durch

$$\frac{\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3]}{(\text{Var}[S])^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sqrt{\lambda\mu_2^3}} > 0.$$

**Problem:** Die Schiefe von  $S$  ist in diesem Modell immer positiv. Reale Daten des Gesamtschadens besitzen diese Eigenschaft jedoch nicht immer!



**Beispiel 2: (Feuerversicherung)** Eine Versicherungsgesellschaft modelliert den Gesamtschaden eines Portfolios von Feuerversicherungspolice durch ein zusammengesetztes Poissonmodell, wobei die Höhe der Feuerschäden durch lognormalverteilte Zufallsvariablen  $Y_i \sim \text{LN}(m, \sigma^2)$  gegeben ist. In diesem Fall ergibt sich für die Momente

$$\mu_n = \mathbb{E}[Y_1^n] = \mathbb{E}[e^{n \log Y_1}] = M_{\log Y_1}(n) = \exp\{\sigma^2 n^2 / 2 + nm\}.$$

Somit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S] &= \lambda \exp\{\sigma^2 / 2 + m\}, \\ \text{Var}[S] &= \lambda \mu_2 = \lambda \exp\{2\sigma^2 + 2m\} \end{aligned}$$

und

$$\frac{\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3]}{(\text{Var}[S])^{3/2}} = \frac{\lambda \mu_3}{(\lambda \mu_2)^{3/2}} = \frac{\exp\{9\sigma^2 / 2 + 3m\}}{\sqrt{\lambda \exp\{6\sigma^2 + 6m\}}} = \frac{\exp\{3\sigma^2 / 2\}}{\sqrt{\lambda}}$$

Die Berechnung von charakteristischen Eigenschaften des Risikos ist für das zusammengesetzte Poissonmodell wesentlich einfacher als für das zusammengesetzte Binomialmodell. Aber es gibt einen weiteren großen Vorteil des zusammengesetzten Poissonmodells: Angenommen ein Portfolio besteht aus  $m$  unabhängigen Einzelrisiken, die jeweils zusammengesetzt-Poisson modelliert sind, dann hat auch deren Summe eine zusammengesetzte Poissonverteilung:

**Satz 1:**

Seien  $S_1, S_2, \dots, S_m$  unabhängige Zufallsvariablen derart, dass  $S_i$  eine zusammengesetzte Poissonverteilung mit Parameter  $\lambda_i$  und Schadenshöhenverteilung  $P_i(x)$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) hat, dann ist die Summe  $S = S_1 + \dots + S_m$  ebenfalls zusammengesetzt-Poisson-verteilt mit Parameter

$$\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

und Schadenshöhenverteilung

$$P(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} P_i(x).$$

**Beweis:** siehe VO. □

### 1.2.2.3 Das zusammengesetzte gemischte Poissonmodell

Ein Nachteil des zusammengesetzten Poissonmodells ist, wie bereits erwähnt, dass die Schiefe der Verteilung immer positiv ist. In der Praxis zeigt sich weiters auch oft, dass dieses Modell nicht genügend Fluktuationen zulässt (z.B. gilt ja  $\mathbb{E}[N] = \text{Var}[N]$ ). Eine einfache Methode, mehr Fluktuationen zuzulassen, ist, den Parameter  $\lambda$  stochastisch zu wählen. Sei  $H$  die Verteilungsfunktion von  $\lambda$ . Dann gilt

$$\mathbb{P}[N = n] = \mathbb{E}[\mathbb{P}[N = n|\lambda]] = \mathbb{E}\left[\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\right] = \int_0^\infty \frac{l^n}{n!}e^{-l}dH(l).$$

Hier gilt  $\mathbb{E}[N] < \text{Var}[N]$ . Die Momente ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S|\lambda]] = \mathbb{E}[\lambda\mu] = \mathbb{E}[\lambda]\mu, \\ \mathbb{E}[S^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S^2|\lambda]] = \mathbb{E}[\lambda\mu_2 + \lambda^2\mu^2] = \mathbb{E}[\lambda^2]\mu^2 + \mathbb{E}[\lambda]\mu_2\end{aligned}$$

und

$$\mathbb{E}[S^3] = \mathbb{E}[\lambda^3]\mu^3 + 3\mathbb{E}[\lambda^2]\mu_2\mu + \mathbb{E}[\lambda]\mu_3.$$

Somit gilt für die Varianz

$$\text{Var}[S] = \text{Var}[\lambda]\mu^2 + \mathbb{E}[\lambda]\mu_2$$

und für das dritte zentrierte Moment

$$\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3] = \mathbb{E}[(\lambda - \mathbb{E}[\lambda])^3]\mu^3 + 3\text{Var}[\lambda]\mu_2\mu + \mathbb{E}[\lambda]\mu_3.$$

Der Schiefekoeffizient kann also in diesem Modell auch negativ werden. Nun ist noch die MGF des Gesamtschadens  $S$  auszurechnen:

$$M_S(r) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{rS}|\lambda]] = \mathbb{E}[\exp\{\lambda(M_Y(r) - 1)\}] = M_\lambda(M_Y(r) - 1).$$

### 1.2.2.4 Das zusammengesetzte negative Binomialmodell

Ist im zusammengesetzten gemischten Poissonmodell die Intensität  $\lambda$  gammaverteilt  $\lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ , dann gilt

$$M_N(t) = M_\lambda(e^t - 1) = \left(\frac{\beta}{\beta - (e^t - 1)}\right)^\alpha = \left(\frac{\frac{\beta}{\beta+1}}{1 - \left(1 - \frac{\beta}{\beta+1}\right)e^t}\right)^\alpha.$$

Das ist aber gerade die MGF einer negativ binomialverteilten Zufallsvariablen (vgl. Tabelle C.2 im Anhang). Also ist  $N$  negativ binomialverteilt:

$$\mathbb{P}(N = n) = \binom{r + n - 1}{n} p^r q^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

wobei hier  $r = \alpha$  und  $p = 1 - q = \frac{\beta}{\beta+1}$  gilt. Somit folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S] &= \frac{\alpha \frac{1}{\beta+1}}{\frac{\beta}{\beta+1}} \mu = \frac{\alpha}{\beta} \mu, \\ \text{Var}[S] &= \frac{\frac{\alpha}{\beta+1}}{\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^2} \mu^2 + \frac{\alpha}{\beta} \mu_2\end{aligned}$$

und

$$M_S(t) = \left( \frac{\frac{\beta}{\beta+1}}{1 - \frac{1}{\beta+1} M_Y(t)} \right)^\alpha.$$

Obwohl auch in diesem Modell der Schiefekoeffizient immer positiv ist, wird in der Praxis oft dieses Modell verwendet; meist entspricht es den realen Daten besser als das zusammengesetzte Poissonmodell.

### 1.2.3 Schadenshöhenverteilungen

Im kollektiven Risikomodell wird ja unterstellt, dass für ein gegebenes Portfolio innerhalb einer Zeitspanne ‘‘Schadenshöhe pro Schadensfall’’ unabhängig und identisch verteilt ist. Da in einem Portfolio i.a. Einzelschäden mit unterschiedlichen Verteilungen vorliegen, muss man diese Annahme wie folgt interpretieren: die Schäden sind eine Stichprobe aus einer einzigen Verteilung, nämlich der *Mischverteilung* der einzelnen verschiedenen Schadenshöhenverteilungen.

Ein wichtiger Unterschied zum individuellen Modell ist der Umstand, dass beim kollektiven Risikomodell für die Verteilungsfunktion  $G$  eines Einzelrisikos  $G(0) = 0$  gilt, d.h. die Schadensgröße 0 hat Wahrscheinlichkeit 0. Aus diesem Grund ist zu erwarten, dass realistische Verteilungen für Schadenshöhen sich von denen des individuellen Modells in Abschnitt 1.1.2 unterscheiden. Es zeigt sich weiters, dass in der Praxis meist (wenige) Großschäden den Hauptteil der Gesamtschadenslast ausmachen (siehe Tabelle 1.1: während dort über 85% der Schäden unter dem Mittelwert liegen, tragen diese nur 15% zur Gesamtschadenslast bei!). Eine adäquate Modellierung der großen Schäden (d.h. des ‘‘Tails’’ der Verteilungsfunktion  $G$ ) ist also wesentlich.

**Tabelle 1.1** Schadenshöhenverteilung aus einer Feuerversicherung von Stahlwerken

| Schäden über                  | Anteil an der Gesamtzahl | Anteil am Gesamtschaden |
|-------------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 6 500 000 DM                  | 0.1%                     | 19%                     |
| 750 000 DM                    | 1.1%                     | 50%                     |
| 48 000 DM $\hat{=} \bar{\mu}$ | 12.4%                    | 87%                     |

Statistische Untersuchungen zeigen, dass folgende Verteilungsfunktionen zur Modellierung von  $G$  im kollektiven Risikomodell besonders geeignet sind:

- Lognormal-Verteilung:

$$\text{Dichte} \quad g(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0.$$

- Nullpunkt-Pareto-Verteilung:

$$\text{Dichte} \quad g(x) = \frac{\alpha}{b} \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-\alpha-1} \quad x > 0.$$

- Weibull-Verteilung:

$$\text{Dichte} \quad g(x) = \frac{\alpha}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^\alpha} \quad x > 0.$$

Leider sind diese Verteilungen für analytische Berechnungen schlecht geeignet. Die Gammaverteilung (1.3) wird im kollektiven Risikomodell gerne als Schadenshöhenverteilung verwendet, da sie nette analytische Eigenschaften besitzt (sie ist jedoch keine “heavy-tail”-Verteilung und darum nur von begrenzter Nützlichkeit).

### 1.3 Bemerkung zum Individuellen Risikomodell

Angenommen ein Portfolio besteht aus  $m$  unabhängigen individuellen Verträgen  $(S_i)_{i \leq m}$  und es kann für jeden Vertrag höchstens ein Schadensfall auftreten. So ein Schaden trete mit Wahrscheinlichkeit  $p_i$  auf und dessen Größe habe Verteilungsfunktion  $F_i$  und MGF  $M_i(r)$ . Sei weiters  $\lambda = \sum_{i=1}^m p_i$ . Dann gilt für den Gesamtschaden  $S = S_1 + \dots + S_m$  des Portfolios

$$M_S(r) = \prod_{i=1}^m (1 + p_i(M_i(r) - 1)).$$

Der Ausdruck  $p_i(M_i(r) - 1)$  ist klein, falls  $p_i$  klein ist. Betrachten wir nun den Logarithmus

$$\begin{aligned} \log(M_S(r)) &= \sum_{i=1}^m \log(1 + p_i(M_i(r) - 1)) \\ &\approx \sum_{i=1}^m p_i(M_i(r) - 1) = \lambda \left( \left( \sum_{i=1}^m \frac{p_i}{\lambda} M_i(r) \right) - 1 \right). \end{aligned}$$

Dieser letzte Ausdruck ist aber der Logarithmus einer MGF einer zusammengesetzten Poissonverteilung! Dieser Zusammenhang ist der Grund dafür, dass die zusammengesetzte Poissonverteilung bei Aktuarien so populär ist.



## 1.4 Approximationen für $S$

Durch Zurücktransformieren der MGF könnte man nun die Verteilung des Gesamtschadens  $S$  in jedem der obigen Modelle exakt berechnen. Leider ist dies nur in wenigen Ausnahmen möglich. Wir müssen daher Approximationen verwenden.

### 1.4.1 Die Normalapproximation


Die Anzahl  $N$  der Schadensfälle ist in der Praxis oft groß. Für eine deterministische Schadensanzahl wäre wegen des zentralen Grenzwertsatzes eine Approximation mit einer Normalverteilung sinnvoll. Also probieren wir auch hier eine Normalapproximation  $Z$  für den Gesamtschaden  $S$ , und zwar derart, dass die ersten beiden Momente von  $Z$  und  $S$  übereinstimmen:

Mit (1.8) und (1.9) erhalten wir

$$\mathbb{P}[S \leq x] \approx \mathbb{P}[Z \leq x] = \Phi \left( \frac{x - \mathbb{E}[N]\mu}{\sqrt{\text{Var}[N]\mu^2 + \mathbb{E}[N](\mu_2 - \mu^2)}} \right).$$

Im Falle eines zusammengesetzten Poissonmodells erhalten wir auf diese Weise die Approximation

$$\mathbb{P}[S \leq x] \approx \Phi \left( \frac{x - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu_2}} \right).$$

 **Beispiel 3:** Betrachte ein zusammengesetztes Poissonmodell mit  $\lambda = 20$  und Pareto-verteilten Schadenshöhen  $Y_i \sim \text{Pa}(4,3)$  (es ist also  $\mu = 1$  und  $\mu_2 = 3$ ). Will man beispielsweise eine Gesamtprämie  $p$  finden, sodass  $\mathbb{P}[S > p] \leq 0.05$ , so findet man mithilfe der Normalapproximation

$$\mathbb{P}[S > p] \approx 1 - \Phi \left( \frac{p - 20}{\sqrt{60}} \right) = 0.05,$$

d.h.

$$\frac{p - 20}{\sqrt{60}} = 1.6449 \quad \text{bzw.} \quad p = 32.7413.$$

Wenn die akkumulierten Schäden die Prämie nur in 1% der Fälle übersteigen soll, ergibt das entsprechend

$$\frac{p - 20}{\sqrt{60}} = 2.3263 \quad \text{bzw.} \quad p = 38.0194.$$

Die exakten Werte sind 33.94 (das 5%-Quantil von  $S$ ) und 42.99 (1%-Quantil). Die Approximation für das 5%-Quantil ist recht gut, hingegen ist die Approximation für das 1%-Quantil nicht zufriedenstellend.

**Problem:** Oft ist die Schadensverteilung schief. Da die Normalverteilung symmetrisch ist (also das dritte zentrierte Moment = 0 ist), kann man sich keine gute Approximation erwarten. Man braucht also noch einen zusätzlichen Parameter, um die Verteilung zu approximieren.

### 1.4.2 Die verschobene Gamma-Approximation

Da die Gamma-Verteilung positives drittes zentriertes Moment hat, bietet sie sich als Verbesserung der obigen Approximation an. Die Idee der verschobenen Gamma-Approximation ist nun,  $S$  durch  $H := k + Z$  zu approximieren, wobei  $k$  eine reelle Konstante ist und  $Z$  gammaverteilt ist mit  $Z \sim \Gamma(\gamma, \alpha)$ . Auf diese Weise erhalten wir drei freie Parameter, die wir nun so wählen wollen, dass die ersten 3 Momente von  $S$  und  $H$  übereinstimmen. Sei  $m = \mathbb{E}[S]$ ,  $\sigma^2 = \text{Var}[S]$  und  $\beta$  der Schiefekoeffizient von  $S$ . Dann erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} k + \frac{\gamma}{\alpha} &= m, \\ \frac{\gamma}{\alpha^2} &= \sigma^2 \quad \text{und} \\ \frac{2\gamma\alpha^3}{\alpha^3\gamma^{3/2}} &= \frac{2}{\sqrt{\gamma}} = \beta. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt

$$\gamma = \frac{4}{\beta^2}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sigma} = \frac{2}{\beta\sigma}, \quad k = m - \frac{\gamma}{\alpha} = m - \frac{2\sigma}{\beta}. \quad (1.11)$$

#### Bemerkungen:

- i) Hier muss immer  $\beta > 0$  erfüllt sein.
- ii)  $k$  kann negative Werte annehmen. In diesem Fall hat die Approximation also eine positive Masse auf der negativen Halbachse.
- iii) Das Berechnen von Quantilen der Gammaverteilung kann mithilfe von Computerprogrammen erfolgen.

Für das zusammengesetzte Poissonmodell ergibt sich aus (1.11)

$$\gamma = \frac{4\lambda\mu_2^3}{\mu_3^2}, \quad \alpha = \frac{2\mu_2}{\mu_3}, \quad k = \lambda \left( \mu - \frac{2\mu_2^2}{\mu_3} \right).$$

**Beispiel 4:** (Fortsetzung von Beispiel 3)

Eine einfache Rechnung zeigt, dass  $\mu_3 = 27$ . Somit gilt  $\gamma = 2.96296$ ,  $\alpha = 0.2222$ ,  $k = 6.6666$  und weiters

$$\mathbb{P}[S > p] \approx \mathbb{P}[Z > p - 6.6666] = 0.05,$$

woraus  $p=34.9942$  folgt. Für das 1%-Quantil von  $H$  erhalten wir entsprechend  $p = 44.4892$ . Da der Schiefekoeffizient  $\beta = 1.1619$  nicht klein ist, ist es nicht überraschend, dass die Prämie im Tail der Verteilung größer wird als bei der Normalapproximation. Die Approximation der Quantile ist hier also auf jeden Fall besser als bei der Normalapproximation (bei großen Quantilen wird der wahre Wert etwas überschätzt, bei kleinen Quantilen wird der wahre Wert durch diese Approximation etwas unterschätzt.)

### 1.4.3 Die Edgeworth-Approximation

Die Edgeworth-Approximation ist eine Verfeinerung der Normalapproximation und verwendet höhere Momente von  $S$ . Betrachten wir die standardisierte Zufallsvariable

$$Z = \frac{S - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\text{Var}S}}.$$

Die Taylorentwicklung von  $\log M_Z(r)$  um  $r = 0$  hat die Form

$$\log M_Z(r) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{r^j}{j!} = a_0 + a_1 r + a_2 \frac{r^2}{2} + a_3 \frac{r^3}{6} + a_4 \frac{r^4}{24} + \dots$$

mit

$$a_k = \left. \frac{d^k \log M_Z(r)}{dr^k} \right|_{r=0}.$$

Wir wissen bereits, dass  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = \mathbb{E}[Z] = 0$ ,  $a_2 = \text{Var}[Z] = 1$  und  $a_3 = \mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^3] = \beta$ . Für  $a_4$  erhalten wir beispielsweise

$$\begin{aligned} a_4 &= \mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^4] - 3(\text{Var}(Z))^2 = \\ &= \mathbb{E}[Z^4] - 3 = \frac{\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^4]}{\text{Var}[S]^2} - 3. \end{aligned}$$

Für die MGF von  $Z$  erhalten wir also

$$M_Z(r) = e^{\frac{1}{2}r^2} e^{\sum_{k=3}^{\infty} a_k r^k / k!}. \quad (1.12)$$

Eine Taylorreihenentwicklung von (1.12) liefert

$$M_Z(r) = e^{\frac{1}{2}r^2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^k. \quad (1.13)$$

Nun versuchen wir, diesen Term rückzutransformieren. Dazu sind die Hermitepolynome  $H_k$  hilfreich, die folgendermassen definiert sind:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_{k+1}(x) &= -xH_k(x) + H'_k(x), \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$H_k(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^k} = \frac{\phi^{(k)}(x)}{\phi(x)},$$

wobei  $\phi(x)$  die Dichte der Standard-Normalverteilung bezeichnet. Wir benötigen nun im speziellen die folgende Eigenschaft der Hermite-Polynome:

**Satz 2: (Rücktransformation)**

Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$r^k e^{\frac{r^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ru} (-1)^k H_k(u) \phi(u) du$$

**Beweis:** mittels vollständiger Induktion (siehe Übungsaufgabe 11).  $\square$

Daraus folgt für (1.13)

$$M_Z(r) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{ru} (-1)^k \phi^{(k)}(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ru} \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k (-1)^k \phi^{(k)}(u) \right) du.$$

und man erhält für die standardisierte Gesamtschadenverteilungsdichte

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (-1)^k \phi^{(k)}(z)$$

bzw. für die Verteilungsfunktion von  $Z$

$$\mathbb{P}[Z \leq z] = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (-1)^k \Phi^{(k)}(z). \quad (1.14)$$

Nun müssen nur mehr die Koeffizienten  $b_k$  bestimmt werden:

**Satz 3:**

$$b_k = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} H_j(0) \mathbb{E}[Z^{k-j}] \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

**Beweis:** Aus (1.13) erhalten wir unter Beachtung von  $H_k(x) = \frac{\phi^{(k)}(x)}{\phi(x)}$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} b_k r^k &= e^{-\frac{r^2}{2}} M_Z(r) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \phi^{(k)}(0) \sqrt{2\pi} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} M_Z^{(k)}(0) \right) \\
&= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} H_k(0) \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} M_Z^{(k)}(0) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{r^j}{j!} H_j(0) \frac{r^{k-j}}{(k-j)!} M_Z^{(k-j)}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} H_j(0) M_Z^{(k-j)}(0).
\end{aligned}$$

□

Indem wir die ersten  $n$  Terme in (1.14) verwenden, erhalten wir die Edgeworth-Approximation der Ordnung  $n$  für die standardisierte Gesamtschadensverteilung. Die ersten Terme sind dabei von der Form

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Z \leq z] &= \Phi(z) - \frac{m_3}{6} \Phi^{(3)}(z) \\
&+ \frac{1}{24} (m_4 - 3) \Phi^{(4)}(z) \\
&+ \frac{1}{120} (m_5 - 10m_3) \Phi^{(5)}(z) \\
&+ \frac{1}{720} (m_6 - 15m_4 + 30) \Phi^{(6)}(z) \\
&+ R(x),
\end{aligned}$$

wobei  $m_i$  das  $i$ -te Moment von  $Z$  bezeichnet. Bei Verteilungen mit großem „Tail“ (z.B. Pareto- oder Lognormal-Verteilungen) ist die Edgeworthapproximation nicht möglich, da die höheren Momente nicht existieren. Des weiteren konvergiert die Approximation im allgemeinen nicht, und Hinzufügen von Termen verbessert die Approximation daher nicht notwendigerweise. Dennoch können recht gute Ergebnisse im Bereich des Mittelwertes erreicht werden.

## 1.5 Diskrete Schadenshöhen

Aus Formel (1.7) sieht man, dass sogar für einfache Verteilungsfunktionen die Gesamtschadensverteilung  $S$  schon schwierig zu berechnen ist. Als Alternative zu den Approximationen des letzten Abschnitts wird in der Praxis daher oft angenommen, dass die Schadenshöhen diskret verteilt sind bzw. nur ganzzahlige positive Werte annehmen können. Die nötigen Faltungen können dann numerisch

berechnet werden. Für zusammengesetzte Poisson-Prozesse und zusammengesetzte Negativ-Binomial-Prozesse kann die Faltung dann sogar mit einer rekursiven Formel umgangen werden, die direkt die Verteilung von  $S$  liefert:

Wir bezeichnen mit  $f_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner Schaden die Höhe  $k \in$  hat ( $f_0 = 0$ ). Mit  $p_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass  $n$  Schäden in der Zeiteinheit auftreten. Sei  $f_k^{*n} = \mathbb{P}[Y_1 + \dots + Y_n = k]$  die  $n$ -fache Faltung der Schadensverteilung. Dann gilt ja

$$f_k^{*(n+1)} = \sum_{i=1}^{k-1} f_i^{*n} f_{k-i}.$$

Die diskrete Wahrscheinlichkeit, dass der Gesamtschaden in dieser Periode gleich  $k \in$  ist, ist dann gegeben durch

$$g_k = \mathbb{P}[S = k] = \sum_{n=1}^k p_n f_k^{*n},$$

wobei  $g_0 = p_0$ .

Man hat nun also explizite Formeln, um die Verteilung von  $S$  zu berechnen. Die Berechnung der  $f_k^{*n}$ 's ist jedoch numerisch sehr aufwendig. Ein einfacheres Verfahren wurde von PANJER [18] vorgeschlagen. Dazu treffen wir im kollektiven Risikomodell folgende Annahme für die Verteilung der Schadensanzahl  $N$ :

**Annahme:** Es existieren  $a, b \in \mathbb{R}$ , sodass für alle  $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$p_r = \left( a + \frac{b}{r} \right) p_{r-1}.$$

Wie man leicht nachrechnen kann, ist diese Bedingung sowohl für  $N \sim B(n, p)$ ,  $N \sim Pois(\lambda)$  als auch für  $N \sim NB(n, p)$  erfüllt (hingegen erfüllt das zusammengesetzte gemischte Poisson-Modell diese Bedingung nicht immer).

**Satz 4:**

Sei  $n \geq 2$ . Dann gilt

und

$$p_n f_r^{*n} = \sum_{i=1}^{r-1} \binom{n}{a + \frac{b i}{r}} f_i p_{n-1} f_{r-i}^{*(n-1)}.$$

**Beweis:** siehe VO. □

Mit der zweiten Gleichung von Satz 4 und der bereits bekannten Beziehung  $g_0 = p_0$  kann man nun einen rekursiven Ausdruck für  $g_r$  herleiten:

$$\begin{aligned}
 g_r &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_r^{*n} = p_1 f_r + \sum_{n=2}^{\infty} p_n f_r^{*n} \\
 &= (a+b)p_0 f_r + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{r-1} \left(a + \frac{bi}{r}\right) f_i p_{n-1} f_{r-i}^{*(n-1)} \\
 &= (a+b)g_0 f_r + \sum_{i=1}^{r-1} \left(a + \frac{bi}{r}\right) f_i \sum_{n=2}^{\infty} p_{n-1} f_{r-i}^{*(n-1)} \\
 &= (a+b)f_r g_0 + \sum_{i=1}^{r-1} \left(a + \frac{bi}{r}\right) f_i g_{r-i} = \sum_{i=1}^r \left(a + \frac{bi}{r}\right) f_i g_{r-i}.
 \end{aligned}$$

Diese Formeln werden *Panjer'sche Rekursionsformeln* genannt. Man beachte, dass die Faltungen verschwunden sind und eine einfache Rekursion zur Verfügung steht, um  $g_r = \mathbb{P}(S = r)$  zu berechnen (für Beispiele siehe Übungsaufgaben 13 und 14).

## 1.6 Literatur

GERBER: "An Introduction to Mathematical Risk Theory" [9]

HEILMANN: "Grundbegriffe der Risikotheorie" [13]

BOWERS ET AL.: "Actuarial Mathematics" [4]

Einen Überblick über realistische Schadenshöhenverteilungen kann man z.B. im Buch von MACK [15] finden.

## 1.7 Übungsaufgaben

1. Sei  $X$  die Anzahl von "Zahl", die bei 5 Würfeln einer fairen Münze auftritt. Dann werden  $X$  faire Würfel geworfen. Sei  $Y$  die Summe der Augenzahlen bei diesen Würfeln. Man bestimme Erwartungswert und Varianz von  $Y$ .
2. Eine Feuerversicherungsgesellschaft versichert 160 Gebäude gegen Feuer-schäden für folgende Versicherungssummen:

| Versicherungssumme | Anzahl der Verträge |
|--------------------|---------------------|
| 10000              | 80                  |
| 20000              | 35                  |
| 30000              | 25                  |
| 50000              | 15                  |
| 100000             | 5                   |

Die Wahrscheinlichkeit für einen Feuerschaden für jedes der Gebäude pro Jahr sei gleich 0.04 und  $\mathbb{P}(\text{mehr als ein Schaden pro Gebäude pro Jahr})=0$ ; weiters seien die Feuerschäden unabhängige Ereignisse. Die bedingte Verteilung der Schadenshöhe, gegeben dass ein Schaden aufgetreten ist, sei gleichverteilt im Intervall von 0 bis zur versicherten Schadenssumme. Sei  $N$  die Anzahl der Schäden und  $S$  die Gesamtschadenshöhe in einem Jahr.

- a) Man berechne Erwartungswert und Varianz von  $N$ .
- b) Man berechne Erwartungswert und Varianz von  $S$ .
- c) Welcher relative Sicherheitszuschlag  $\theta$  ist nötig, damit die Gesellschaft einen Gesamtprämienbetrag einnimmt, der gleich dem 99%-Quantil der Gesamtschadensverteilung ist? (Man verwende die Normalapproximation)

3. Betrachte ein Portfolio mit 32 Versicherungspolice. Für jede Police sei die Wahrscheinlichkeit für einen Schaden gleich  $1/6$  und die Versicherungssumme  $B$ , die bei einem Schaden ausgezahlt wird, habe die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(y) = \begin{cases} 2(1-y) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei  $S$  der Gesamtschaden des Portfolios. Man berechne  $\mathbb{P}(S > 4)$  mittels einer Normalapproximation.

4. Die Schadensanzahl  $N$  in einem Portfolio habe eine geometrische Verteilung, d.h.

$$\mathbb{P}(N = n) = pq^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

mit  $0 < q < 1$  und  $p = 1 - q$ . Man bestimme  $M_S(t)$

- a) allgemein
- b) für exponentialverteilte Schadenshöhen.

5. Man löse die Übungsaufgabe von Seite 11.
6. Die Zufallsvariable  $S$  habe eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung mit  $\lambda = 2$  und  $\mathbb{P}(Y_i = y) = 0.1y$ ,  $y = 1, 2, 3, 4$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für  $S = 0, 1, 2, 3, 4$ ?
7. Man zeige, dass die Familie der negativ-binomialverteilten Verteilungen mit Parametern  $r$  und  $p$  für  $r \rightarrow \infty$  und  $p \rightarrow 1$  (wobei  $r(1-p) = \lambda$  konstant bleibt) gegen eine Poissonverteilung mit Parameter  $\lambda$  konvergiert.
8.  $S_1$  sei zusammengesetzt-Poisson-verteilt mit  $\lambda_1 = 2$  und Schadenshöhen 1,2 oder 3 mit Wahrscheinlichkeiten 0.2, 0.6 bzw. 0.2. Sei weiters  $S_2$  sei zusammengesetzt Poisson-verteilt mit  $\lambda_2 = 6$  und Schadenshöhen 3 oder 4 mit Wahrscheinlichkeit jeweils 0.5. Bestimme die Verteilung von  $S_1 + S_2$ , falls  $S_1$  und  $S_2$  unabhängig sind!



9. Sei  $S$  zusammengesetzt-Poisson-verteilt mit  $\lambda = 12$  und im Intervall  $[0, 1]$  gleichverteilten Schadenshöhen. Man approximiere  $\mathbb{P}(S < 10)$  unter Verwendung einer
- Normalapproximation
  - verschobenen Gamma-Approximation
  - Edgeworth-Approximation (Ordnung 4)
10. Sei  $S$  zusammengesetzt-Poisson-verteilt mit  $\lambda = 5$  und exponentialverteilten Schadenshöhen (mit Erwartungswert 1). Man approximiere  $\mathbb{P}(S < 10)$  unter Verwendung einer
- Normalapproximation
  - verschobenen Gamma-Approximation
  - Edgeworth-Approximation (Ordnung 4)
11. Man beweise Satz 2 von Seite 20!
12. Sei  $S$  zusammengesetzt-Poisson-verteilt mit  $\lambda = 0.8$  und diskreten Einzelschadenshöhen 1, 2 und 3 mit Wahrscheinlichkeiten 0.25, 0.375 bzw. 0.375. Man berechne  $\mathbb{P}(S = x)$  für  $x = 0, 1, \dots, 6$  mittels
- Faltungen
  - Panjer'schen Rekursionsformeln
13. Sei  $S$  zusammengesetzt-Poisson-verteilt mit  $\lambda = 2$  und die Einzelschadenshöhen seien diskret verteilt mit  $\mathbb{P}(Y_i = n) = \frac{1}{n(n+1)}$ . Man berechne mithilfe der Panjer'schen Rekursionsformeln die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb des nächsten Jahres der Gesamtschaden die Höhe 5 nicht übersteigt!
14. Sei  $S$  zusammengesetzt-Negativ-Binomial-verteilt mit  $r = 2$  und  $p = 0.4$  und die Einzelschadenshöhen seien diskret verteilt mit  $\mathbb{P}(Y_i = n) = \frac{1}{n(n+1)}$ . Man berechne mithilfe der Panjer'schen Rekursionsformeln die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb des nächsten Jahres der Gesamtschaden die Höhe 5 nicht übersteigt!



# Kapitel 2

## Prämienkalkulation

Eine der wichtigsten Aufgaben der Versicherungsmathematik ist es, eine gerechte Prämie für die Versicherung eines Risikos zu finden.

Ein naheliegender Ausgangspunkt für die Festlegung einer Prämie ist das sog. *Nettoprämienprinzip* (oder *Äquivalenzprinzip*), bei dem die Prämie durch den Erwartungswert des Verlustes gegeben ist. Es lässt sich jedoch zeigen, daß eine Versicherung, die dieses Prinzip zur Prämienkalkulation anwendet, auf Dauer mit Wahrscheinlichkeit 1 ruiniert wird, unabhängig von der Höhe des Anfangskapitals. Anders ausgedrückt fällt ihr Kapital bei einer solchen Prämienpolitik mit Wahrscheinlichkeit 1 irgendwann unter jede noch so tiefe Marke.

Um uns der Entwicklung von zufriedenstellenden Prämienkalkulationsprinzipien zu nähern, wollen wir einige grundlegende Überlegungen darüber anstellen, in welchen Situationen der Abschluss einer Versicherung für den Versicherer bzw. den Versicherten von Vorteil ist:

### 2.1 Nutzentheorie

Könnte man die Konsequenzen von Entscheidungen vorhersehen, so würde man diese Entscheidungen entsprechend den Präferenzen für die jeweiligen Konsequenzen treffen. In der Realität ist dies meist nicht möglich. Man kann nur Entscheidungen treffen, die zu einer bestimmten (und nicht zu einer anderen) "Klasse von Unsicherheiten" führen (engl. *decision making under uncertainty*). Die *Nutzentheorie* untersucht die Frage, nach welchen Kriterien Individuen solche Entscheidungen treffen.

Eine erste Möglichkeit, den Wert eines ökonomischen Projektes, dessen Ausgang zufällig ist, zu definieren, ist das bereits eingangs erwähnte Nettoprämienprinzip. Dabei wird also die Verteilung aller möglichen Ausgänge durch eine einzige Zahl, den Erwartungswert, ersetzt. Mit diesem Prinzip wäre man also indifferent zwis-

chen der Übernahme des zufälligen Verlustes  $X$  und der Zahlung einer Prämie  $\mathbb{E}[X]$ , um sich vor diesem Verlust zu schützen.

Das Erwartungswertprinzip ist für die meisten Entscheidungsträger kein realistisches Modell. Vielmehr beeinflussen der eigene Vermögensstand und andere Charakteristiken der Verteilung von  $X$  ihre Entscheidungen.

Das folgende einfache Beispiel soll dies illustrieren:



**Beispiel 1:** Sei die Wahrscheinlichkeit für einen Unfall einer gewissen Person durch  $\mathbb{P}(\text{Unfall}) = 0.1$  und  $\mathbb{P}(\text{kein Unfall}) = 0.9$  gegeben. Der finanzielle Verlust bei einem Unfall für diese Person sei  $A \in \mathbb{R}$ . Der Verlust  $X$  ist also gegeben durch

$$X = \begin{cases} 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0.9 \\ A & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0.1 \end{cases}$$

und der erwartete Verlust ist  $\mathbb{E}[X] = 0.1 A$ . Ist  $A$  nun klein, so wird die Person nicht bereit sein, mehr als  $\mathbb{E}[X]$  für eine Versicherung gegen diesen finanziellen Schaden zu zahlen. Ist hingegen  $A$  sehr groß (z.B. in der Größenordnung des Jahreseinkommens dieser Person), so wird sie bereit sein, auch mehr als den erwarteten Verlust als Versicherungsprämie zu zahlen. Der Umstand, dass ein Versicherungsnehmer bereit ist, eine Prämie zu zahlen, die vom erwarteten Verlust abweicht, zeigt, dass das Erwartungswertprinzip hier nicht adäquat ist.

**Definition 1** Eine **Nutzenfunktion**  $u(w)$  repräsentiert den Wert (bzw. “Nutzen”), den ein Entscheidungsträger einem Vermögen der Größe  $w$  zuordnet (gemessen z.B. in Euro).

Eine Nutzenfunktion ist also eine numerische Beschreibung existierender Präferenzen. Die Bedeutung von Nutzenfunktionen ergibt sich nun aus folgendem Zusammenhang:

Falls ein rationaler Entscheidungsträger für zwei beliebige zufällige Zahlungen  $X$  und  $Y$ , die sein Vermögen beeinflussen, immer entweder eine Präferenz für eine davon, oder aber Indifferenz zwischen beiden ausdrücken kann und seine Präferenzen gewissen Konsistenzbedingungen genügen, dann existiert eine Nutzenfunktion  $u(w)$ , sodass

$$\mathbb{E}[u(X)] > \mathbb{E}[u(Y)]$$

gilt, falls die Verteilung von  $X$  der Verteilung von  $Y$  vorgezogen wird, und im Falle der Indifferenz zwischen  $X$  und  $Y$   $\mathbb{E}[u(X)] = \mathbb{E}[u(Y)]$  gilt.

Eine zufällige Zahlung kann also auf Basis der Nutzenfunktion  $u$  mit einer anderen zufälligen Zahlung verglichen werden.

Wir treffen nun folgende Annahmen:

- (1)  $u(w)$  ist eine monoton steigende Funktion in  $w$ .
- (2)  $u(w)$  ist eine konkave Funktion in  $w$ .

Beide Annahmen sind naheliegend, denn (1) bedeutet einfach: “je mehr Vermögen, desto besser” und (2) bedeutet: “je mehr Vermögen, desto weniger nutzt 1 €”. Üblicherweise wird  $u(w)$  als zweimal differenzierbare Funktion gewählt; demnach gilt dann  $u'(w) > 0$  und  $u''(w) < 0$ . Wenn die Nutzenfunktion diese Eigenschaften besitzt, so nennt man den Entscheidungsträger *risikoavers*.

### Beispiele für Nutzenfunktionen von risikoaversen Individuen:

- Exponentielle Nutzenfunktion:

$$u(w) = \frac{1}{a} (1 - e^{-aw}), \quad -\infty < w < \infty \quad (a > 0). \quad (2.1)$$

Für  $w \rightarrow \infty$  ist die Nutzenfunktion hier beschränkt und strebt gegen den Wert  $\frac{1}{a}$ .

- Quadratische Nutzenfunktion:

$$u(w) = \begin{cases} w - \frac{w^2}{2s} & \text{für } w < s \\ \frac{s}{2} & \text{für } w \geq s \end{cases} \quad (s > 0). \quad (2.2)$$

In diesem Fall ist der maximale Nutzen bereits für ein endliches Vermögen  $s$  erreicht.

- Potenznutzenfunktionen:

$$u(w) = w^\gamma, \quad w > 0 \quad (0 < \gamma < 1). \quad (2.3)$$

**Bemerkung:** Eine Nutzenfunktion braucht nicht (und kann auch nicht) eindeutig bestimmt werden. Man sieht sofort, dass für eine Nutzenfunktion

$$u^*(w) := a u(w) + b, \quad a > 0$$

$\mathbb{E}[u(X)] > \mathbb{E}[u(Y)]$  genau dann gilt, wenn  $\mathbb{E}[u^*(X)] > \mathbb{E}[u^*(Y)]$ . Präferenzen bleiben also unverändert, wenn die Nutzenfunktion eine monotone lineare Transformation der ursprünglichen Nutzenfunktion ist. Deshalb wird  $u^*$  als eine zu  $u$  *äquivalente* Nutzenfunktion bezeichnet.



**Beispiel 2:** Die Nutzenfunktion eines Individuums  $B$  sei durch  $u(w) = -e^{-5w}$  gegeben. Dieses Individuum muss nun zwischen zwei zufälligen Zahlungen  $X$  und  $Y$  wählen.  $X$  sei normalverteilt mit  $X \sim N(5, 2)$  und  $Y$  sei normalverteilt mit  $Y \sim N(6, 2.5)$ . Welche Zahlung soll  $B$  wählen?

**Lösung:** Es gilt

$$\mathbb{E}[u(X)] = -M_X(-5) = -1 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[u(Y)] = -M_Y(-5) \approx -3.49;$$

somit ist die Zahlung  $X$  wegen  $\mathbb{E}[u(X)] > \mathbb{E}[u(Y)]$  zu bevorzugen.

$X$  wird also gegenüber  $Y$  bevorzugt, obwohl  $\mathbb{E}[X] = 5 < \mathbb{E}[Y] = 6$ . Da  $B$  risikoavers ist, wiegt in diesem Fall die größere Varianz von  $Y$  stärker als der größere Erwartungswert und Zahlung  $Y$  wird deshalb nicht gewählt. Wäre  $Y \sim N(6, 2.4)$  und somit  $\mathbb{E}[u(Y)] = -1$ , dann wäre Individuum  $B$  indifferent bezüglich der Wahl zwischen  $X$  und  $Y$ .

Nehmen wir also an, eine Person mit Nutzenfunktion  $u(w)$  (wobei  $w$  in Geldeinheiten, z.B. €, gemessen wird) ist einem möglichen Schaden bzw. einem Risiko  $X$  ausgesetzt (die Verteilung der Zufallsvariable  $X$  werde als bekannt vorausgesetzt;  $X$  kann auch den Wert 0 annehmen). Diese Person wird genau dann indifferent sein zwischen der Zahlung einer fixen Prämie  $P$  an einen Versicherer (der dann die Zahlung  $X$  übernimmt) und dem Unterlassen eines Versicherungsabschlusses (also die Zahlung  $X$  selbst zu übernehmen), falls

$$u(w - P) = \mathbb{E}[u(w - X)]. \quad (2.4)$$

Die rechte Seite ist der erwartete Nutzen, wenn das Risiko selbst übernommen wird und die linke Seite ist der erwartete Nutzen, wenn die Prämie  $P$  an die Versicherung gezahlt wird, wobei  $w$  das derzeitige Vermögen dieser Person ist. Wegen  $u''(w) < 0$  folgt mit der Jensen-Ungleichung (siehe Anhang 6)

$$u(w - P) = \mathbb{E}[u(w - X)] \leq u(w - \mathbb{E}[X]). \quad (2.5)$$

Wegen  $u'(w) > 0$  folgt daraus  $P \geq \mathbb{E}[X]$  (mit  $P > \mathbb{E}[X]$ , falls  $X$  nicht konstant ist). Diese Person ist also bereit, für eine Versicherung eine Prämie zu zahlen, die größer ist als der erwartete Verlust (somit wird auch die Bezeichnung "risikoavers" motiviert).

Sei  $u_I(w)$  die Nutzenfunktion des Versicherers und  $w_I$  sein derzeitiges Vermögen. Die kleinste akzeptierbare Prämie  $P_I$  für die Übernahme des Risikos  $X$  aus Sicht des Versicherers ist dann bestimmt durch

$$u_I(w_I) = \mathbb{E}[u_I(w_I + P_I - X)]. \quad (2.6)$$

Ist der Versicherer risikoavers (also  $u'_I(w) > 0$  und  $u''_I(w) < 0$ ), so folgt aus der Jensen'schen Ungleichung

$$u_I(w_I) = \mathbb{E}[u_I(w_I + P_I - X)] \leq u_I(w_I + P_I - \mathbb{E}[X]).$$

Daraus folgt  $P_I \geq \mathbb{E}[X]$ .

Es wird also genau dann zum Abschluss dieser Versicherung kommen, wenn  $\mathbb{E}[X] \leq P_I \leq P$ . In diesem Fall nennt man den Versicherungsvertrag *realisierbar* (engl. *feasible*). Der erwartete Nutzen verringert sich also durch den Versicherungsabschluss für keine der beiden Parteien.

**Bemerkung:** Es lässt sich leicht zeigen, dass das eingangs erwähnte Nettoprämienprinzip konsistent ist mit einer linearen monoton steigenden Nutzenfunktion (eine solche ist in der Praxis jedoch unrealistisch).

Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, dass ein Prämienkalkulationsprinzip, das auf einer exponentiellen Nutzenfunktion basiert, günstige Eigenschaften besitzt:

## 2.2 Prämienkalkulationsprinzipien

Ein Prämienkalkulationsprinzip ist ein Funktional  $H$ , das einer Zufallsvariablen  $Z$  eine reelle Zahl  $P$  zuordnet, d.h.  $P = H[Z]$ . Die praktische Bedeutung eines solchen Prinzips liegt darin, dass der Versicherer für jedes Risiko dadurch eine Prämie angeben kann. Prämien werden im weiteren Verlauf ohne Einbeziehung von ökonomischen Einflüssen (Konkurrenz, Provisionen etc...) untersucht.

**Definition 2** Ist die Prämie für ein gegebenes Risiko unendlich, so nennen wir das Risiko **unversicherbar** (*uninsurable*).

Es folgen nun einige Prämienkalkulationsprinzipien für ein Risiko  $S$ :

1. **Nettoprämienprinzip:**  $P = \mathbb{E}[S]$
2. **Erwartungswertprinzip:** Es gibt einen Sicherheitszuschlag  $\Lambda > 0$ , der proportional zu  $\mathbb{E}[S]$  ist:  $P = (1 + \Lambda)\mathbb{E}[S]$
3. **Das Varianzprinzip:** Der Sicherheitszuschlag ist proportional zur Varianz, d.h.  $P = \mathbb{E}[S] + \alpha \text{Var}[S]$
4. **Standardabweichungsprinzip:** Der Sicherheitszuschlag ist proportional zur Standardabweichung:  $P = \mathbb{E}[S] + \beta \sqrt{\text{Var}[S]}$

5. **Das Null-Nutzenprinzip:** Wie bereits im vorigen Abschnitt motiviert, definieren wir die Prämie  $P$  (aus der Sicht des Versicherers) für eine gegebene Nutzenfunktion  $u_I(w)$  durch

$$u_I(w_I) = \mathbb{E}[u_I(w_I + P - S)]. \quad (2.7)$$

Die Prämie  $P$  hängt also vom Anfangskapital  $w_I$  und dem Risiko  $S$  ab und ist auf diese Weise eindeutig bestimmt. Jedoch ist (2.7) im allgemeinen nicht explizit lösbar (für eine Näherungslösung siehe Übungsaufgabe 1). Ausnahmen sind exponentielle (siehe 6.) und quadratische Nutzenfunktionen.

6. **Das Exponential-Prinzip:** Mit

$$u_I(w) = \frac{1 - e^{-aw}}{a}, \quad a > 0$$

folgt aus (2.7)

$$P = \frac{1}{a} \log \mathbb{E}[e^{aS}]. \quad (2.8)$$

$P$  hängt in diesem Fall also nicht vom Vermögen  $w_I$  ab. Umgekehrt folgt aus (2.5), dass für einen Versicherten mit exponentieller Nutzenfunktion ebenfalls die gerechte Prämie von dessen Vermögen unabhängig ist.

Für steigende Parameter  $a$  steigt auch die Prämie (2.8) für ein festes Risiko (siehe Übungsaufgabe 4). Der Grenzwert für  $a \rightarrow 0$  ist das Nettoprämien-Prinzip und der Grenzwert für  $a \rightarrow \infty$  ist das Prinzip des maximalen Verlustes.

7. **Das Prinzip des maximalen Verlustes:** Hier setzen wir die Prämie als den maximal möglichen Verlust an. Man braucht eine besonders tolerante Versicherungsaufsicht, um mit diesem Prinzip arbeiten zu können, und einen besonders genialen Versicherungsmakler.

Von einem Prämienkalkulationsprinzip wünschen wir uns einige Eigenschaften:

1. Positiver Sicherheitszuschlag  $P \geq \mathbb{E}[S]$ : Im Erwartungswert gibt es keinen Verlust für die Versicherung.
2. Angemessenheit  $P \leq \max[S]$ : Es darf nicht mehr an Prämie verrechnet werden als es maximal an Leistung gibt.
3. Konsistenz  $H[S + c] = H[S] + c$ : Wird eine sichere Summe auf die Schadenssumme aufgeschlagen, so wird sie auch auf die Prämie aufgeschlagen.
4. Additivität  $H[S_1 + S_2] = H[S_1] + H[S_2]$ : Wenn zwei unabhängige Risiken zusammen versichert werden, sollte die Prämie dafür gleich der Summe der Einzelprämien sein.



5. Iterativität: Für zwei beliebige Risiken  $S$  und  $X$  gelte

$$H[S] = H[H[S|X]].$$

Die Prämie für  $S$  kann also in zwei Schritten berechnet werden: Zuerst kann die bedingte Prämie von  $S$  (gegeben  $X$ ) berechnet werden und dann kann  $H$  auf die Zufallsvariable  $H[S|X]$  angewendet werden, um  $H[S]$  zu erhalten.

Die nachstehende Tabelle gibt an, welche dieser Eigenschaften für die oben besprochenen Prämienkalkulationsprinzipien erfüllt sind:

**Tabelle 2.1** Prämien und ihre Eigenschaften

| Prämien-Prinzip           | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 | 7 |
|---------------------------|---|---|---|---|----|---|---|
| Sicherheitszuschlag $> 0$ | j | j | j | j | j  | j | j |
| Angemessenheit            | j | n | n | n | j  | j | j |
| Konsistenz                | j | n | j | j | j  | j | j |
| Additivität               | j | j | j | n | n* | j | j |
| Iterativität              | j | n | n | n | n* | j | j |

\* Außer beim Exponential-, oder Nettoprämien-Prinzip

### Folgerung:

Von den betrachteten Prämienkalkulationsprinzipien erfüllen nur das Exponentialprinzip, das Nettoprämienprinzip und das Prinzip des maximalen Verlustes die von uns geforderten Eigenschaften. Die letzten beiden sind dabei Grenzwerte des Exponentialprinzips (für  $a \rightarrow 0$  bzw.  $a \rightarrow \infty$ ) und von begrenzter Nützlichkeit (für  $a \rightarrow 0$  geht die Versicherung mit Wahrscheinlichkeit 1 in Zukunft bankrott,  $a \rightarrow \infty$  produziert einen exzessiven Sicherheitszuschlag). Somit ist die Familie der Exponentialprinzipien das zu empfehlende Prämienkalkulationsprinzip. Der Parameter  $a$  hat in der Ruintheorie eine anschauliche Interpretation, die Hinweise auf eine sinnvolle Wahl von  $a$  gibt (siehe Kapitel 4).

Die Eigenschaft der **Proportionalität**, also  $H[\alpha Z] = \alpha H[Z]$  wurde bewusst nicht in die Liste aufgenommen. Proportionalität wird jedoch als Arbeitshypothese für die Erstellung von Prämien verwendet, und macht die Verwendung von **Raten** erst sinnvoll. Proportionalität kann aber nur für Risiken gleicher Natur verwendet werden. Eine Lebensversicherung in der Höhe von 100 € ist leicht zu versichern. Eine Lebensversicherung in der Höhe von 1 Mrd. € kann jedoch leicht zum wirtschaftlichen Desaster führen. Zweitere kann also sicherlich nicht proportional zur ersteren behandelt werden.

## 2.3 Verteilung des Risikos durch Kooperation



**Beispiel 3:** Wir gehen von  $n$  befreundeten Versicherungsunternehmen aus, die alle das Exponentialprinzip zur Prämienkalkulation verwenden. Dann ist der Parameter  $a_i$  das Maß der **Risiko-Aversion** des Versicherers  $i$ . Die Versicherungsunternehmen beschließen, ein Risiko  $S$  unter sich aufzuteilen, sodass jeder einen Anteil von  $S_i$  vom Risiko erhält:

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_n = S.$$

Die Prämie  $P$  für das zu versichernde Risiko  $S$  setzt sich zusammen aus den Prämien der einzelnen Versicherungen für ihren Anteil  $S_i$  am Risiko:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \log \mathbb{E}[e^{a_i S_i}]$$

Klarerweise hängt die Gesamtprämie  $P$  von der Wahl der einzelnen Risikoanteile  $S_i$  ab. Wie sollte nun das Risiko  $S$  aufgeteilt werden, um die kooperierenden Versicherungen so konkurrenzfähig wie möglich zu machen? Dazu müssen wir die minimale Prämie finden:

Es zeigt sich, dass es ideal ist, wenn jede Versicherung einen festen, proportionalen Anteil vom Gesamtrisiko versichert:



### Satz 1: Optimale Teilung

Die Prämie  $P$  ist für

$$S_i^* = \frac{a}{a_i} S \text{ mit } a = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$$

minimal und gleich

$$P^* = \frac{1}{a} \log \mathbb{E}[e^{aS}]$$



**Beweis:** siehe VO. □

## 2.4 Rückversicherung

### 2.4.1 Ein Beispiel

In der Praxis ist es nicht in allen Situationen möglich, Prämien gemäß einem der obigen Kalkulationsprinzipien einzufordern. Sei nun  $P$  die tatsächlich erhaltene

Prämie für die Versicherung eines Risikos  $S$ . Im Falle  $P \geq H[S]$  ist die Prämie ausreichend; falls jedoch  $P < H[S]$ , so ist  $H$  verletzt. Eine Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, ist der Abschluss einer *Rückversicherung*, bei der also die Versicherung eine Prämie  $P'$  an den Rückversicherer zahlt, wofür dieser die Zahlung des Risikos  $S'$  übernimmt. Solch ein Vertrag erfüllt seinen Zweck, falls

$$P - P' \geq H[S - S']. \quad (2.9)$$

Typischerweise wird versucht, möglichst wenig Rückversicherung zu beanspruchen (um möglichst viel Prämien einzunehmen). Man kann also in (2.9) “ $\geq$ ” durch “ $=$ ” ersetzen.

**Beispiel:** Für eine 1-jährige Ablebensversicherung (Vertragssumme  $z$ , Sterbewahrscheinlichkeit  $q = 1 - p$ ) erhält die Versicherung eine Prämie von  $P = (1 + \Lambda)qz$ . Für eine Prämie  $P' = (1 + \Lambda')qz'$  wird nun der Versicherung eine Rückversicherung angeboten, bei der der Rückversicherer im Falle  $S = z$  den Betrag  $S' = z'$  zahlt und nichts (also  $S' = 0$ ) im Falle  $S = 0$  (wobei  $0 \leq z' \leq z$ ). Der Betrag  $x = z - z'$  bleibt also im Schadensfall der Versicherung zu zahlen. Wir nehmen nun an, dass die Versicherung ihre Prämien mit dem Varianzprinzip (Parameter  $\alpha$ ) kalkuliert:

Die Prämie  $P$  der Lebensversicherungspolice ist groß genug, wenn  $P \geq H[S]$ , also

$$(1 + \Lambda)qz \geq qz + \alpha pqz^2.$$

Das heißt, für  $z \leq \Lambda/(\alpha p)$  ist keine Rückversicherung notwendig.

Falls  $z > \Lambda/(\alpha p)$ , muss nun die optimale Risikoaufteilung gefunden werden, d.h. die größtmögliche Lösung  $x \leq z$  von

$$\begin{aligned} P - P' &= H[S - S'] \\ (1 + \Lambda)qz - (1 + \Lambda')q(z - x) &= qx + \alpha pqx^2 \\ x^2 - \frac{\Lambda'}{\alpha p}x - \frac{\Lambda - \Lambda'}{\alpha p}z &= 0, \end{aligned}$$

also

$$x = \frac{\Lambda' + \sqrt{\Lambda'^2 + 4\alpha p(\Lambda - \Lambda')z}}{2\alpha p}.$$

Wir unterscheiden folgende Fälle:

- $\Lambda = \Lambda'$ : hier ergibt sich  $x = \Lambda/(\alpha p)$ .
- $\Lambda > \Lambda'$ : hier ist  $x$  eine monoton steigende Funktion von  $z$ .
- $\Lambda < \Lambda' < 2\Lambda$ : hier ist  $x$  eine monoton fallende Funktion von  $z$  und für  $z \geq \Lambda'^2/(4\alpha p(\Lambda' - \Lambda))$  hat das Problem keine Lösung.

- $\Lambda' \geq 2\Lambda$ : Das Problem hat keine Lösung  $x$  im zulässigen Wertebereich.

Das Verhältnis der Sicherheitszuschläge  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  des Versicherers (bzw. Rückversicherers) spielt hier also eine wesentliche Rolle: Für  $\Lambda \geq \Lambda'$  kann obige Ablebensversicherung mit beliebig hoher Vertragssumme verkauft werden; im Falle  $\Lambda < \Lambda' < 2\Lambda$  sollte die Vertragssumme  $z = \Lambda'^2 / (4\alpha p(\Lambda' - \Lambda))$  nicht übersteigen und für  $\Lambda' \geq 2\Lambda$  sollte eine solche Police nur verkauft werden, wenn keine Rückversicherung nötig ist, d.h.  $z \leq \Lambda / (\alpha p)$ .

### 2.4.2 Rückversicherung im kollektiven Modell

Wir wollen nun noch kurz das Prinzip der Rückversicherung im Lichte des kollektiven Risikomodells betrachten (vgl. Kapitel 2):

Für viele Versicherungen ist das gesamte Prämienvolumen nicht groß genug, um die Risiken zu tragen. Dies gilt v.a. bei großen Schadenshöhen, wie sie beispielsweise bei der Versicherung von Naturkatastrophen wie Hurricanes oder Erdbeben auftreten. Deshalb versuchen Versicherungen, einen Teil des Risikos mit anderen Gesellschaften zu teilen. Solch eine Risikoteilung wird durch *Rückversicherung* realisiert.

Sei  $S^I$  der Teil des Risikos, der vom Versicherer getragen wird und  $S^R$  jener Teil, der vom Rückversicherer getragen wird. Rückversicherung kann bezüglich Einzelschäden  $Y_i$  eingegangen werden oder auch bezüglich des Gesamtrisikos  $S$ . Sei  $f$  eine monoton steigende Funktion mit  $f(0) = 0$  und  $f(x) \leq x$  für alle  $x \geq 0$ . Eine Rückversicherungsform, die auf Einzelschäden abgeschlossen ist, ist gegeben durch

$$S^I = \sum_{i=1}^N f(Y_i), \quad S^R = S - S^I.$$

Die gebräuchlichsten Rückversicherungsformen sind

- Proportionale Rückversicherung  $f(x) = \alpha x$ ,  $(0 < \alpha < 1)$ ,
- Exzedenten-Rückversicherung (engl. Excess-of-Loss-reinsurance)  $f(x) = \min\{x, M\}$ ,  $(M > 0)$ .

Eine Rückversicherung, die auf dem gesamten Risiko agiert, hat die Form

$$S^I = f(S), \quad S^R = S - S^I.$$

Wieder unterscheidet man

- Proportionale Rückversicherung  $f(x) = \alpha x$ ,  $(0 < \alpha < 1)$ ,
- Stop-Loss-Rückversicherung  $f(x) = \min\{x, M\}$ ,  $(M > 0)$ .

### 2.4.2.1 Proportionale Rückversicherung

Hier gilt also  $S^I = \alpha S$  und somit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S^I] &= \alpha \mathbb{E}[S] \\ \text{Var}[S^I] &= \alpha^2 \text{Var}[S] \\ \frac{\mathbb{E}[(S^I - \mathbb{E}[S^I])^3]}{(\text{Var}[S^I])^{3/2}} &= \frac{\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3]}{(\text{Var}[S])^{3/2}}\end{aligned}$$

und

$$M_{S^I}(r) = \mathbb{E}[e^{r\alpha S}] = M_S(\alpha r).$$

Man sieht also, dass sich die Schiefe der Gesamtschadensverteilung nicht verändert, jedoch die Varianz viel geringer ist.

Auch die folgende Überlegung zeigt, dass das Risiko in gewisser Weise abgenommen hat: Sei  $P_{ges}$  die Gesamtprämie, die für die zugrundeliegenden Verträge verlangt wurde, und nehmen wir an, dass der Versicherer  $\alpha P_{ges}$  und der Rückversicherer  $(1 - \alpha)P_{ges}$  davon bekommt. Wenn das Anfangskapital der Versicherung  $u$  ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, nach einem Jahr (bzw. der gegebenen Zeiteinheit) in den Ruin zu stürzen für die Versicherung gleich

$$\mathbb{P}[\alpha S > \alpha P_{ges} + u] = \mathbb{P}[S > P_{ges} + u/\alpha].$$

Der Effekt der Rückversicherung für den Versicherer ist also, gleichsam ein höheres Kapital zu besitzen.

### 2.4.2.2 Exzedenten-Rückversicherung

Bei dieser Art der Rückversicherung können Formeln wie oben für die Momente und die MGF nicht angegeben werden. Sie müssen jeweils von der neuen Verteilungsfunktion der Schadenshöhen  $Y_i^I = \min\{Y_i, M\}$  berechnet werden. Jedoch ist die Beschränktheit der Schadenshöhen ein Indikator dafür, dass das Risiko sich vermindert hat.

**Beispiel:** Sei der Gesamtschaden  $S$  modelliert durch ein zusammengesetztes Poissonmodell mit Parameter  $\lambda$  und  $\text{Pa}(\alpha, \beta)$ -verteilten Schadenshöhen. Wir nehmen weiters an, dass  $\alpha > 1$ , damit  $\mathbb{E}[Y_i] < \infty$ . Dann kann man den Er-

wartungswert der Auszahlung bei einem Schaden für den Versicherer berechnen:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y_i^I] &= \int_0^M x \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}} dx + \int_M^\infty M \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}} dx \\
 &= \int_0^M (x+\beta) \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}} dx - \int_0^M \beta \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}} dx + M \frac{\beta^\alpha}{(\beta+M)^\alpha} \\
 &= \frac{\beta}{\alpha-1} - \frac{\beta^\alpha}{(\alpha-1)(\beta+M)^{\alpha-1}} = \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta+M}\right)^{\alpha-1}\right) \frac{\beta}{\alpha-1} \\
 &= \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta+M}\right)^{\alpha-1}\right) \mathbb{E}[Y_i]
 \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\mathbb{E}[S^I] = \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta+M}\right)^{\alpha-1}\right) \mathbb{E}[S].$$

□

Sei nun allgemein

$$N^R = \sum_{i=1}^N 1_{\{Y_i > M\}}$$

die Anzahl der Schadensfälle, in denen der Rückversicherer etwas zahlen muss und  $q = \mathbb{P}[Y_i > M]$  die Wahrscheinlichkeit, dass die Schadenshöhe den Wert  $M$  übersteigt. Wie schaut die Verteilung von  $N^R$  aus?

Zuerst stellen wir fest, dass die momenterzeugende Funktion von  $1_{\{Y_i > M\}}$  gleich  $qe^r + 1 - q$  ist.

i) Sei  $N \sim B(n, p)$ . Die MGF von  $N^R$  ist

$$M_{N^R}(r) = (p(qe^r + 1 - q) + 1 - p)^n = (pqe^r + 1 - pq)^n.$$

Es gilt also  $N^R \sim B(n, pq)$ .

ii) Sei  $N \sim Pois(\lambda)$ . Die MGF von  $N^R$  ist

$$M_{N^R}(r) = \exp\{\lambda((qe^r + 1 - q) - 1)\} = \exp\{\lambda q(e^r - 1)\}.$$

Es gilt also  $N^R \sim Pois(\lambda q)$ .

iii) Sei  $N \sim NB(\alpha, p)$ . Die MGF von  $N^R$  ist

$$M_{N^R}(r) = \left(\frac{p}{1 - (1-p)(qe^r + 1 - q)}\right)^\alpha = \left(\frac{\frac{p}{p+q-pq}}{1 - \left(1 - \frac{p}{p+q-pq}\right)e^r}\right)^\alpha.$$

Es gilt also  $N^R \sim NB(\alpha, \frac{p}{p+q-pq})$ .

## 2.5 Literatur

Als weiterführende Literatur zu Prämienkalkulationsprinzipien und dem Prinzip der Rückversicherung sind die Lehrbücher von GERBER [9] und HEILMANN [13] zu empfehlen. Nutzentheorie wird beispielsweise in BOWERS ET AL. [4] und [10] behandelt.

## 2.6 Übungsaufgaben

1. Die sog. *Risikoaversion* des Versicherers ist durch

$$r(w) := -\frac{u_I''(w)}{u_I'(w)}$$

definiert, wobei  $u_I(w)$  die Nutzenfunktion des Versicherers bezeichnet. Man zeige, dass im Falle  $|u''(w_I)| \ll 1$  für die Nullnutzenprämie näherungsweise gilt:

$$P(S) \approx \mathbb{E}[S] + \frac{r(w_I)}{2} \text{Var}(S)$$

und insbesondere bei exponentieller Nutzenfunktion (2.1)

$$P(S) \approx \mathbb{E}[S] + \frac{a}{2} \text{Var}(S).$$

2. Zeige die Richtigkeit der ja/nein-Einträge in Tabelle 2.2 für Sicherheitszuschlag  $> 0$ , Angemessenheit und Konsistenz!
3. Zeige die Richtigkeit der ja/nein-Einträge in Tabelle 2.2 für Additivität und Iterativität!
4. Zeige, dass beim Exponentialprinzip die Prämie (2.8) bei festem Risiko mit  $a$  steigt!
5. Sei ein Risiko  $S$  gleichverteilt im Intervall  $[0, 100]$ . Man bestimme die Prämie für  $S$  für jedes der im Kapitel angeführten Prämienkalkulationsprinzipien!
6. Sei ein Risiko  $S$  exponentialverteilt mit Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(s) = 3e^{-3s}$ . Man bestimme die Prämie für  $S$  für jedes der im Kapitel angeführten Prämienkalkulationsprinzipien!
7. Sei  $I_M$  die Geldmenge, die ein Rückversicherer dem Versicherer bei einer Stop-Loss-Rückversicherung mit Selbstbehalt  $M$  zahlen muss. Für den Fall, dass der Gesamtschaden  $S$  durch eine Gammaverteilung mit Verteilungsfunktion

$$\Gamma(x; \alpha, \beta) = \int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt$$

approximiert wird, zeige man

$$\mathbb{E}[I_M] = \frac{\alpha}{\beta} \left( 1 - \Gamma(M; \alpha + 1, \beta) \right) - M \left( 1 - \Gamma(M; \alpha, \beta) \right).$$

8. Sei  $S$  zusammengesetzt Poisson-verteilt mit  $\lambda = 0.8$  und diskreten Einzelschadenshöhen 1, 2 und 3 mit Wahrscheinlichkeiten 0.25, 0.375 bzw. 0.375. Berechne  $\mathbb{E}[I_6]$  (Notation siehe Bsp. 7)!
9. Sei  $S$  zusammengesetzt Poisson-verteilt mit  $\lambda = 1.5$  und diskreten Einzelschadenshöhen 1 und 2 mit Wahrscheinlichkeiten  $2/3$  bzw.  $1/3$ . Berechne  $\mathbb{P}(S = x)$  und  $\mathbb{E}[I_x]$  für  $x = 0, 1, \dots, 6$  (Notation siehe Bsp. 7)!



# Kapitel 3

## Das Cramér-Lundberg Modell

*As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain, and as far as they are certain, they do not refer to reality.*

ALBERT EINSTEIN

### 3.1 Das Modell

Wir haben in Kapitel 2 bereits gesehen, dass das zusammengesetzte Poissonmodell wertvolle Eigenschaften besitzt. So kann es beispielsweise als Grenzwert von individuellen Modellen hergeleitet werden. Das war auch der Grund, dass F. LUNDBERG ein Risikomodell in stetiger Zeit postuliert hat, in dem der Gesamtschaden in jedem Zeitintervall einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung unterliegt. Weiters muss das Prämieeinkommen modelliert werden. Da in einem Portfolio von Versicherungsverträgen die Prämienzahlungen über das ganze Jahr aufgeteilt sind, nahm Lundberg an, dass das Prämieeinkommen stetig über die Zeit erfolgt und für jedes Zeitintervall proportional zur Intervalllänge ist. Das führt auf das folgende Modell für die freie Reserve  $C_t$  eines Versicherungsportfolios zur Zeit  $t$

$$C_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

Hierbei ist  $x$  das Ursprungskapital zum Zeitpunkt  $t = 0$  und  $c$  die Prämienrate. Die Anzahl der Schäden in  $(0, t]$  ist ein Poisson-Prozess  $N_t$  mit Parameter  $\lambda$ . Die Schadensgrößen  $(Y_i)$  sind eine Folge unabhängiger und identisch verteilter positiver Zufallsvariablen und unabhängig von  $N_t$ . Dieses Modell wird **Cramér-Lundberg Modell** oder **Klassisches Risikomodell** genannt.

Sei im weiteren wieder  $G$  die Verteilungsfunktion der Schadenshöhen mit Momenten  $\mu_n = \mathbb{E}[Y_1^n]$  und MGF  $M_{Y_1}(r) = \mathbb{E}[e^{rY_1}]$  sowie  $\mu := \mu_1$ . Wir nehmen an, dass  $\mu < \infty$  (sonst würde die Versicherung dieses Risiko nicht versichern). Für eine Versicherungsgesellschaft ist es wichtig, dass  $(C_t)$  über einer bestimmten Schranke bleibt (diese Schranke ist beispielsweise durch rechtliche Richtlinien gegeben). Indem man das Ursprungskapital anpasst, können wir o.B.d.A. annehmen, dass diese Schranke 0 ist. Man spricht dann vom (technischen) **Ruin** einer Versicherungsgesellschaft, sobald die freie Reserve der Gesellschaft negativ wird. Der Ruinzeitpunkt ist dann

$$T = \inf\{t > 0 : C_t < 0\}, \quad (\inf \emptyset = \infty).$$

Von besonderem Interesse ist in diesem Zusammenhang die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ruin

$$\Psi(x) = \mathbb{P}(T < \infty)$$

(in Abhängigkeit vom Ursprungskapital  $x$ ) bzw. die Überlebenswahrscheinlichkeit  $U(x) = 1 - \Psi(x)$ . Die Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit ist definiert durch  $\Psi(x, t) = \mathbb{P}(T < t)$ .

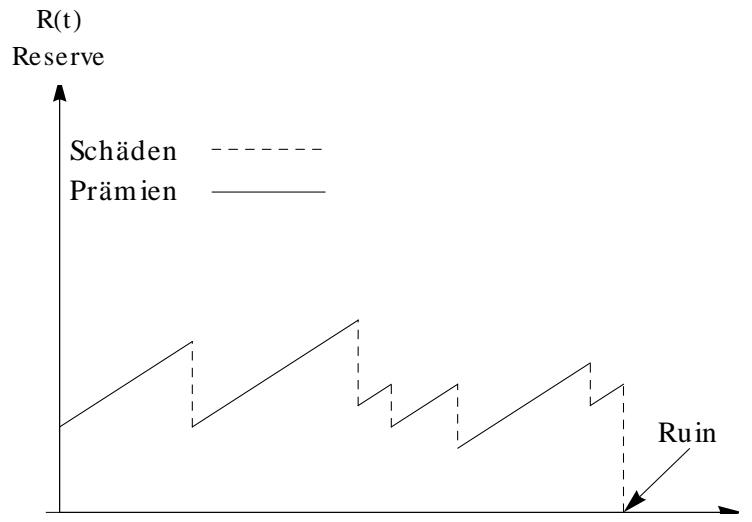


ABB. 1: EIN STICHPROBEN-PFAD VON  $C_t$

### Bemerkungen:

- In der Praxis tritt Ruin so gut wie nie auf. Wenn eine Versicherungsgesellschaft merkt, dass ihre freie Reserve stark abnimmt, wird sie die Prämien erhöhen. Andererseits ist eine Versicherungsgesellschaft aber auf verschiedenen Portfolios aufgebaut. Ruin in einem Portfolio heißt deshalb noch nicht, dass die Gesellschaft bankrott ist. Ruin ist also ein technischer Terminus

und die Ruinwahrscheinlichkeit wird zur Entscheidungsfindung herangezogen, beispielsweise um Prämien, oder auch Selbstbehaltsschranken bei Rückversicherungen zu bestimmen.

- Auch der Begriff der freien Reserve ist in der Praxis nur ein technischer Ausdruck. Wenn die Geschäfte gut gehen, werden die Aktionäre höhere Dividenden ausschütten lassen. Um auch dies zu modellieren, müssten wir eine Prämienrate wählen, die von der Höhe der freien Reserve abhängt. In diesem Fall ist es aber sehr schwierig, brauchbare Ergebnisse zu erarbeiten.

Zur Herleitung einer Gleichung für  $U(x)$  beziehen wir nun den Wert von  $U(x)$  zur Zeit  $t$  aus den Werten von  $U(x)$  zur Zeit  $t + dt$ . Da das Eintreten der Schäden durch einen Poisson-Prozess modelliert ist, ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass kein Schaden in der Zeit von  $t$  bis  $t + dt$  passiert,  $e^{-\lambda dt}$  (also ein von  $t$  unabhängiger Wert). Für  $dt$  klein kann dies mit der Taylorformel durch  $1 - \lambda dt + O(dt^2)$  angenähert werden. Analog ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass es zu genau einem Schaden kommt,  $\lambda dt e^{-\lambda dt} = \lambda dt + O(dt^2)$ , und für die Wahrscheinlichkeit, dass es zu mehr als einem Schaden im Zeitraum  $dt$  kommt, gilt  $O(dt^2)$ . Für  $U(x)$  gilt nun nach dem Gesetz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\text{Überleben}) \\ &= \mathbb{P}(\text{kein Schaden})\mathbb{P}(\text{Überleben}|\text{kein Schaden}) \\ & \quad + \mathbb{P}(\text{ein Schaden})\mathbb{P}(\text{Überleben}|\text{ein Schaden}) + O(dt^2) \\ &= \mathbb{P}(\text{kein Schaden})\mathbb{P}(\text{Überleben}|\text{kein Schaden}) \\ & \quad + \mathbb{P}(\text{Schaden}) \sum_y \mathbb{P}(\text{Schaden} \wedge Y = y)\mathbb{P}(\text{Überleben}|\text{Schaden} \wedge Y = y) \\ & \quad + O(dt^2), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} U(x) &= (1 - \lambda dt)U(x + c dt) + \lambda dt \int_0^{x+c dt} U(x + c dt - y)dG(y) + O(dt^2) \\ &= (1 - \lambda dt)(U(x) + c dt U'(x) + O(dt^2)) + \lambda dt \int_0^x U(x - y)dG(y) + O(dt^2) \\ 0 &= -\lambda dt U(x) + c dt U'(x) + \lambda dt \int_0^x U(x - y)dG(y) + O(dt^2) \end{aligned}$$

Nachdem man durch  $dt$  kürzt, und Teile, die dann noch von der Ordnung  $dt$  sind, wegfallen lässt, erhält man

$$cU'(x) - \lambda U(x) + \lambda \int_0^x U(x - y)dG(y) = 0 \quad (3.1)$$

mit der Nebenbedingung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 1$$



### Übung 1:

Berechne  $U(x)$  für exponentialverteilte Schadenshöhen  $G(x) = 1 - e^{-x}$ .  
(Hinweis: Forme (3.1) in eine Differentialgleichung um!)

Die allgemeine Lösung für die Überlebenswahrscheinlichkeit  $U(x)$  im Cramér-Lundberg Modell ist durch die sog. POLLACZEK-KHINCHINE-Formel (siehe [1]) gegeben:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \rho) \rho^n F_I^{n*}(x), \quad (3.2)$$

mit

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(y)) dy, \quad x \geq 0,$$

$F_I^{n*}$  bezeichnet die  $n$ -fache Faltung von  $F_I$  und  $\rho := \lambda\mu/c < 1$ .

Im Falle  $\rho \geq 1$  gilt  $U(x) = 0$  für alle  $x > 0$  (wenn im Erwartungswert mehr ausgezahlt als eingenommen wird, führt das mit Wahrscheinlichkeit 1 zu Ruin).

Im allgemeinen ist der Ausdruck (3.2) nicht praktikabel. Man behilft sich daher mit Abschätzungen und Approximationen.

## 3.2 Der Anpassungskoeffizient

**Definition 1 (Anpassungskoeffizient)** *Wir betrachten die Gleichung*

$$\lambda + rc = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{ry} dG(y) \quad (3.3)$$

*Dies ist eine implizite Gleichung für  $r$ . Die linke Seite ist linear, die rechte Seite ist konvex bzgl.  $r$ . Eine Lösung dieser Gleichung ist trivial:  $r = 0$ . Für  $c > \lambda E[Y]$  ist die Ableitung der linearen linken Seite größer als die Ableitung der rechten Seite. Eine eindeutige zweite Lösung  $R$  existiert (vorausgesetzt  $M_Y(r)$  existiert für ein  $r > 0$ ), da die rechte Seite für  $r \rightarrow \infty$  stärker steigt als die linke Seite (siehe Abb. 2). Diese eindeutige Lösung wird als Anpassungskoeffizient (engl. adjustment coefficient) bezeichnet.*



### Übung 2:

Man zeige, dass der Anpassungskoeffizient  $R$  für exponentialverteilte Schadenshöhen (Parameter  $\beta$ ) gegeben ist durch

$$R = \beta - \frac{\lambda}{c}.$$

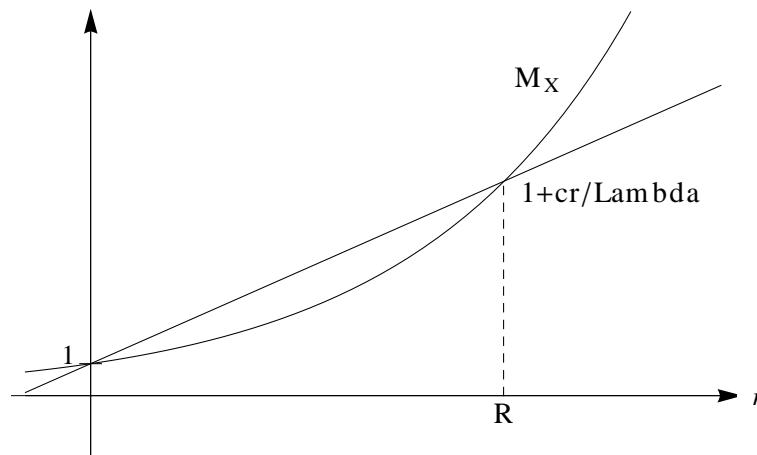


ABB. 2: DER ANPASSUNGSKOEFFIZIENT

Einer der Gründe für die große Bedeutung des Anpassungskoeffizienten in der Ruintheorie ist der enge Zusammenhang mit der Ruinwahrscheinlichkeit:

**Satz 1:**

Falls ein Anpassungskoeffizient  $R > 0$  existiert, so gilt

$$\Psi(x) = \frac{e^{-Rx}}{\mathbb{E}[e^{-RC_T} | T < \infty]} \quad \forall x \geq 0. \quad (3.4)$$

**Beweis:** siehe VO. □

**Bemerkung:** Der Schwankungszuschlag  $\theta$  ist durch  $c = (1 + \theta)\lambda\mu$  definiert. Aus Abbildung 2 sieht man, dass sich für  $\theta \rightarrow 0$  die Sekante an die Tangente von  $M_X(r)$  an  $r = 0$  annähert, woraus  $R \rightarrow 0$  folgt. Das bedeutet dann aber nach (3.4)  $\psi(x) = 1$ , das heißt sicheren Ruin. Weiters ist  $C_t, t > 0$  für  $\theta < 0$  immer kleiner als das entsprechende  $C_t$  für  $\theta \rightarrow 0$  und somit gilt auch für  $\theta < 0$ :  $\psi(x) = 1$ . Aus diesem Grund wird immer ein positiver Schwankungszuschlag vorausgesetzt ( $\theta > 0$  entspricht  $\rho < 1$ , siehe vorige Seite).

Im allgemeinen ist eine explizite Auswertung des Nenners in (3.4) nicht möglich. Ausnahmen sind der Fall  $x = 0$  und exponentialverteilte Schadenshöhen. Jedoch kann Satz 1 verwendet werden, um Ungleichungen herzuleiten: Da  $C_T < 0$ , falls  $T < \infty$ , ist der Nenner immer größer als 1 und daraus folgt:

**Korollar 2:**

Falls ein Anpassungskoeffizient  $R > 0$  existiert, so gilt

$$\Psi(x) < e^{-Rx} \quad \forall x \geq 0. \quad (3.5)$$

**Übung 3:**

Man zeige, dass für  $R > 0$  und beschränkte Schadenshöhen  $Y_i < m$  gilt:

$$\psi(x) > e^{-R(x+m)}.$$

**Übung 4:**

Man leite für exponentialverteilte Schadenshöhen aus (3.4) eine explizite Formel für die Ruinwahrscheinlichkeit her!

Nun gibt es eine interessante Verbindung zwischen dem Anpassungskoeffizienten und dem Exponentialprinzip der Prämienkalkulation. Dort hatten wir die Prämie definiert als  $P = H[S]$ . Im vorliegenden Fall ändert sich die insgesamt zu zahlende Prämie im Verlauf der Zeit, damit ist

$$\begin{aligned} P(t) &= H[S(t)] = \frac{1}{a} \log \mathbb{E}[e^{aS(t)}] = \\ &= \frac{1}{a} \log \{ M_S(a) = e^{\lambda t (M_Y(a) - 1)} \} \\ &= \frac{\lambda t}{a} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{ay} dG(y) - 1 \right) \end{aligned}$$

Wir bezeichnen in Übereinstimmung mit den vorangegangenen Resultaten die Prämie pro Zeiteinheit mit  $c$ , also  $c = \frac{P(t)}{t}$ . Dann ergibt sich

$$c = \frac{\lambda}{a} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{ay} dG(y) - 1 \right)$$

Bei dieser Wahl der Prämie ist der Anpassungskoeffizient gerade  $a$ , wie man durch Umformung der Gleichung erkennt.

Eine weitere interessante Eigenschaft des Anpassungskoeffizienten  $R$  sei nur kurz erwähnt. Falls  $G(x)$  so beschaffen ist, dass ein  $R > 0$  existiert und weiters  $\int_0^{\infty} x e^{Rx} (1 - G(x)) dx < \infty$ , dann gibt eine asymptotische Entwicklung für  $\psi(x)$ : Für große  $x$  gilt

$$\psi(x) \approx C e^{-Rx}$$

Den Beweis findet man beispielsweise in GRANDELL[11].

Falls für die Schadensverteilung  $F(x)$  kein Anpassungskoeffizient  $R > 0$  existiert (falls also  $1 - F(x)$  langsamer als exponentiell fällt), gilt folgende Approximation für große  $u$ :

$$\psi(u) \approx \frac{\rho}{1 - \rho}(1 - F_I(u)),$$

wobei wieder  $F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(y)) dy$  gilt.

### 3.3 Martingale und der Anpassungskoeffizient

Martingale sind ein nützliches Hilfsmittel in der Ruintheorie (eine Definition befindet sich in Anhang 6).

Betrachten wir nochmals den Risikoprozess

$$C_t = x + ct - S_t$$

Der Prozess ist im allgemeinen kein Martingal, da mehr als die Nettoprämie verlangt werden muss. Wir versuchen, durch eine Transformation aus dem Prozess ein Martingal zu machen

$$Z_t = e^{-RCt},$$

und suchen den Exponenten  $R$ , der dies leistet. Dazu überprüfen wir die Martingalbedingung. Den endlichen Erwartungswert (die technische Bedingung) erhalten wir über Bedingungen an die Schadenshöhenverteilung. Die zweite Bedingung erfordert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_0] &= \mathbb{E}[e^{-R(x+ct-S_t)} | \mathcal{F}_0] \\ &= e^{-Rx - Rct} \mathbb{E}[e^{RS_t} | \mathcal{F}_0] \\ &= e^{-Rx - Rct} e^{\lambda t (M_Y(R) - 1)} \\ &= e^{-Rx} \mathbb{E}[e^{-\lambda t - Rct + \lambda t (M_Y(R))}] \end{aligned}$$

und damit, dass der Exponent innerhalb des Erwartungswertes 0 wird. Dies ist dann aber gerade die Definition des Anpassungskoeffizienten

$$\lambda + Rc = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{Ry} dG(y).$$

### 3.4 Ruinwahrscheinlichkeit ohne Startkapital

Im folgenden wird die Ruinwahrscheinlichkeit ohne Startkapital berechnet. Wir betrachten die Gleichung für die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$cU'(x) - \lambda U(x) + \lambda \int_0^x U(x-y) dG(y) = 0$$

und die Laplace-Transformation davon mit  $\tilde{U}(s) = \mathcal{L}(U(x)) = \int_0^\infty e^{-sx} U(x) dx$

$$\begin{aligned} 0 &= cs\tilde{U}(s) - cU(0) - \lambda\tilde{U}(s) + \lambda\tilde{U}(s)\tilde{g}(s) \\ U(0) &= \frac{1}{c} (cs - \lambda + \lambda\tilde{g}(s)) \tilde{U}(s) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nun lassen wir  $s \rightarrow 0$  gehen und beachten die Eigenschaft

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{U}(s) = \lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 1 \text{ für } c > \lambda\mu \quad (3.7)$$

der Laplace-Transformation, sodass

$$\begin{aligned} U(0) &= \frac{1}{c} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{cs - \lambda + \lambda\tilde{g}(s)}{s} \tilde{U}(s)s = \frac{1}{c} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{cs - \lambda + \lambda\tilde{g}(s)}{s} \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{U}(s)s \\ &= \frac{1}{c} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{cs - \lambda + \lambda\tilde{g}(s)}{s} \end{aligned}$$

Diesen Grenzwert kann man nun durch die Formel von de'l Hospital ausrechnen:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{cs - \lambda + \lambda\tilde{g}(s)}{s} = c + \lambda \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{g}'(s)$$

Für den Grenzwert von  $\tilde{g}'(s)$  erhalten wir

$$\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{g}'(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \int_0^\infty e^{-st} dG(t) \right)' = \lim_{s \rightarrow 0} \left( - \int_0^\infty te^{-st} dG(t) \right) = - \int_0^\infty tdG(t) = -\mu.$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$U(0) = \frac{c - \lambda\mu}{c}. \quad (3.8)$$

Wir erhalten das interessante Resultat, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit ohne Ausgangskapital unabhängig von der Schadensverteilung ist. Nur der Erwartungswert des Schadens fließt in das Ergebnis ein.

Die Laplace-Transformation kann manchmal dazu benutzt werden, analytische Formeln für  $U(x)$  zu berechnen:

### Übung 5:

Man berechne die analytische Formel für die Ruinwahrscheinlichkeit bei exponentialverteilten Schadenshöhen (mit Parameter 1) mithilfe der Laplace-Transformation!





### 3.5 Das erste Kapital unter dem Anfangskapital

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, wie hoch das Kapital zu jenem Zeitpunkt ist, an dem es das erste Mal das Anfangskapital  $x$  unterschreitet. Als Anwendung werden wir einen alternativen einfachen Weg finden, um die Ruinwahrscheinlichkeit für Anfangskapital  $x = 0$  zu bestimmen.

**Satz 3:**

Für einen zusammengesetzten Poisson-Prozess ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Kapital jemals unter das Anfangskapital  $x$  fällt und dass dessen Wert dann zwischen  $x - y$  und  $x - y - dy$  ist, wenn dies zum ersten Mal auftritt, gegeben durch

$$\frac{\lambda}{c}[1 - G(y)]dy = \frac{1 - G(y)}{(1 + \theta)\mu}dy, \quad y > 0, \quad (3.9)$$

wobei  $G(y)$  die Verteilungsfunktion der Einzelschadenshöhen bezeichnet.

**Beweis:** siehe VO.

Aus (3.9) ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass das Kapital jemals unter seinen Anfangswert fällt, zu

$$\frac{1}{(1 + \theta)\mu} \int_0^\infty [1 - G(y)]dy = \frac{1}{1 + \theta}, \quad (3.10)$$

da

$$\int_0^\infty [1 - G(y)]dy = \mu.$$

Falls  $x = 0$ , ist demnach die Wahrscheinlichkeit, dass das Kapital jemals kleiner als Null wird, also die Ruinwahrscheinlichkeit, gegeben durch

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta},$$

was Formel (3.8) entspricht.

Wegen (3.10) ist die Funktion  $\frac{\lambda}{c}[1 - G(y)]$  aus (3) keine Wahrscheinlichkeitsdichte. Jedoch kann aus ihr durch Normierung eine Wahrscheinlichkeitsdichte konstruiert werden: Sei  $L_1$  (eine Zufallsvariable) die Differenz zwischen dem Anfangskapital  $x$  und dem Kapital bei der ersten Unterschreitung des Anfangskapitals, falls dies jemals passiert. Dann ist die Dichte von  $L_1$  gegeben durch

$$f_{L_1}(y) = \frac{1}{\mu}(1 - G(y)), \quad y > 0.$$

Die MGF von  $L_1$  ergibt sich zu

$$M_{L_1}(r) = \frac{1}{\mu r}(M_Y(r) - 1).$$

### 3.6 Literatur

- S. ASMUSSEN: “*Ruin Probabilities*” [1]
- BOWERS ET AL: “*Actuarial Mathematics*” [4]
- H. BÜHLMANN: “*Mathematical Methods in Risk Theory*” [5]
- H. GERBER: “*An Introduction to Mathematical Risk Theory*” [9]
- F. DEVYLDER: “*Advanced Risk Theory*” [20]

### 3.7 Übungsaufgaben

1. Bestimme den Anpassungskoeffizienten, falls alle Schadenshöhen gleich 1 sind!
2. Berechne  $\lim_{c \rightarrow \lambda\mu} R$  und  $\lim_{c \rightarrow \infty} R$ .
3. Zeige

$$R < \frac{2\theta\mu}{\mu_2}.$$

(Hinweis: verwende die Abschätzung  $e^{rx} > 1 + rx + \frac{1}{2}(rx)^2$ , ( $r > 0, x > 0$ ))

4. Beweise Korollar 2 durch vollständige Induktion nach der Anzahl  $n$  der Schäden, nach denen Ruin auftritt!
5. Man löse Übungsaufgabe 3 von Seite 46!
6. Man löse Übungsaufgabe 4 von Seite 46!
7. Man löse Übungsaufgabe 5 von Seite 48!
8. Bestimme die Verteilung von  $L_1$  für den Fall, dass die Einzelschäden
  - (a) exponentialverteilt mit Parameter  $\beta$  sind.
  - (b) alle Größe 2 haben.

# Kapitel 4

## Optionspreistheorie

Rechte auf Aktien oder andere zugrundeliegende *Vermögensformen* (engl. *assets*), den *underlyings*, nennt man **Derivate** (abgeleitete Werte). Derivate, die eine Wahlmöglichkeit beinhalten, nennt man **Optionen**. Die Analyse und die Preisbestimmung von solchen Rechten, die man auch als Eventualforderungen (engl. *contingent claims*) bezeichnet, ist eine der Hauptaufgaben der modernen Finanzmathematik.

### 4.1 Das No-Arbitrage-Prinzip

Ein mathematisch gut formalisierbarer Zugang zur Preistheorie für derivative Finanzprodukte wird durch den Begriff des Arbitrage gegeben. Als *Arbitrage* bezeichnen wir einen risikolosen Profit beim Handel mit Finanzgütern, z.B. beim Handeln mit Aktien. Betrachten wir folgendes einfache



**Beispiel 1:** Eine Aktie werde in New York und Frankfurt gehandelt. Es sei der Kurs in New York 100 Dollar, der Kurs in Frankfurt 184 DM, der Wechselkurs 1.86 DM pro Dollar. Als Arbitragemöglichkeit liegt vor:

- Kaufe 100 Aktien in Frankfurt.
- Verkaufe diese Aktien in New York.
- Wechsle Dollar in DM.

Ohne Berücksichtigung von Transaktionskosten ist der risikolose Profit

$$100 \cdot (100 \cdot 1.86 - 184)DM = 200DM.$$

Die Transparenz des Marktgeschehens führt dazu, dass ein solches Arbitrage nur

für kurze Zeit bestehen kann. Das Erkennen dieser Arbitragemöglichkeit führt zu gesteigerter Aktiennachfrage in Frankfurt mit Anhebung des Frankfurter Kurses und erhöhter Aktienabgabe in New York, was den dortigen Kurs senkt, sodass die Arbitragemöglichkeit verschwindet.

Auch wenn konkrete Finanzmärkte in gewissem Umfang Arbitrage ermöglichen sollten, so gehen wir bei einem idealisierten Finanzmarkt davon aus, dass durch Transparenz und Effizienz keine Arbitragemöglichkeiten existieren. Wird in einem solchen idealen Finanzmarkt ein derivatives Finanzgut eingeführt, so ist die Preisfestsetzung sicher so durchzuführen, dass im durch den Handel mit dem Derivat vergrößerten Markt kein Arbitrage entsteht. Überlegungen dieser Art sind grundlegend für die Preistheorie der Finanzmärkte und werden als **No-Arbitrage-Prinzip** bezeichnet (oder auch: **there is no free lunch**).

## 4.2 Derivative Finanzprodukte

### 4.2.1 Forwards und Futures

Ein besonders einfaches Beispiel für ein Derivat, das keine Option ist, stellt der **Forward** dar. Es ist die Pflicht, zu einem bestimmten Zeitpunkt  $T$  in der Zukunft ein Asset  $S$  (also z.B. eine Aktie) für einen jetzt vereinbarten Preis  $K$  zu kaufen (bzw. für den Vertragspartner: zu verkaufen). Zu jenem Zeitpunkt  $T$  wird auch die Auszahlung fällig.

Man wäre nun versucht, zu sagen, dass der Preis für einen solchen Vertrag von der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Aktienpreises zum Zeitpunkt  $T$  abhängen muss. Dem ist aber nicht so: In einem Markt, wo Aktien gebührenfrei gekauft und verkauft werden können und beliebige positive und negative Mengen an Aktien ohne Kosten verwaltet werden können, gibt es einen anderen Mechanismus, der den fairen Preis festlegt:

Die einfache Annahme, dass Investoren “mehr zu haben” gegenüber “weniger zu haben” bevorzugen (das ist es ja, was “rationales Verhalten” auf Märkten ausmacht) und das Beachten des “Zeitwertes von Geld” (also stetige Verzinsung mit der risikolosen Zinsrate  $r$ ), ermöglicht uns, den fairen Preis eines Forwards in folgender Form zu bestimmen:

Sei  $S_t$  der Aktienpreis zum Zeitpunkt  $t \in [0, T]$ . Dann ist der Forward-Preis  $K = F(t, T)$  zur Zeit  $t$  gegeben durch

$$F(t, T) = S_t e^{r(T-t)}. \quad (4.1)$$

Begründung: Wenn der Forward-Preis höher wäre (z.B. gleich  $Y > S_t e^{r(T-t)}$ ), dann könnten wir  $S_t$  Geldeinheiten für das Intervall  $[t, T]$  bei einer Zinsrate von

$r$  von der Bank ausborgen, damit die Aktie kaufen und einen solchen Forward-Vertrag verkaufen. Zum Zeitpunkt  $T$  brauchen wir dann  $S_t e^{r(T-t)}$ , um den Kredit zurückzuzahlen, aber wir erhalten vom Käufer des Forwardvertrages für den Verkauf der Aktie  $Y > S_t e^{r(T-t)}$  zurück und auf diese Weise hätten wir also einen risikolosen Gewinn gemacht. Falls  $F(t, T) = Y < S_t e^{r(T-t)}$  könnten wir auf ähnliche Weise risikolosen Gewinn machen, indem wir eine Aktie zum Zeitpunkt  $t$  um  $S_t$  von jemand anderem ausborgen (“eine *short* position in der Aktie eingehen”), diese um  $S_t$  verkaufen und diesen Betrag verzinslich anlegen. Weiters gehen wir eine long position im Forward ein. Zum Zeitpunkt  $T$  erhalten wir also nach Erfüllung der long position im Forward und Rückgabe der ausgeliehenen Aktie den risikolosen Gewinn  $S_t e^{r(T-t)} - Y > 0$ .

Mit jedem anderen Preis als (4.1) wäre also Arbitrage möglich; anders ausgedrückt: in einem Markt, der kein Arbitrage zulässt, ist der obige Preis der einzig mögliche.

Ein **Future** ist ein Forward Kontrakt, der auf Finanzmärkten gehandelt wird und meist durch zusätzliche Bedingungen interessant gemacht wird.

### 4.2.2 Optionen

Eine Option ist ein Recht (aber nicht die Pflicht!), eine zugrundeliegende Aktie (oder allg. ein Asset) zu einem bestimmten Zeitpunkt  $T$  zu einem bestimmten Preis  $K$  zu kaufen oder zu verkaufen. Dieser Preis  $K$  wird **Ausübungspreis** (engl. *strike-price*) genannt und  $T$  heißt das **Fälligkeitsdatum** (engl. *maturity*). Man unterscheidet Call-Optionen von Put-Optionen, wobei sich die Namensgebung immer auf die Situation des Käufers bezieht. Ein **Put** ist das Recht eine Aktie zu verkaufen (auf den Markt zu werfen, engl. *to put it on the market*). Umgekehrt ist ein **Call** das Recht, eine Aktie zu kaufen. Beim Käufer der Option liegt in der Sprache der Finanzmärkte eine *long position* vor, beim Verkäufer eine *short position*.

Es gibt nun verschiedene Optionstypen (hier für Call-Optionen beschrieben):

- **Amerikanisch:** Die Aktie darf zu jedem Zeitpunkt bis zur Fälligkeit zum vereinbarten Preis gekauft werden. Dieser Optionstyp wird weltweit am häufigsten gehandelt.
- **Europäisch:** Die Aktie darf nur zur Fälligkeit zum vereinbarten Preis gekauft werden. Die Berechnung ist für diesen Fall am einfachsten.
- **Asiatisch:** Die Aktie darf zur Fälligkeit zum Mittelwert des Aktienpreises bis zur Fälligkeit verkauft werden. Durch die Mittelwertbildung gleichen sich Höhen und Tiefen stärker aus.

- **Andere:** Barriere-Optionen (Kontrakt verfällt, falls Aktienpreis ein gewisses Niveau erreicht, z.B. “down-and-out”), Cash-or-Asset-Optionen (Auszahlung einer fixen Summe, oder der Aktie, wenn der Aktienwert über/unter einer Marke liegt)

Alle Optionen, die nicht vom amerikanischen oder europäischen Typ sind, werden als **Exotische Optionen** bezeichnet.

In jeder Transaktion gibt es also zwei Parteien, den **Käufer** und den **Verkäufer** der Option. Im Falle einer europäischen Call-Option auf eine Aktie ( $S_t$ ) mit Ausübungspreis  $K$  ist der Wert (engl. **payoff**)  $C_T$  zur Zeit  $T$  für den Käufer gleich  $S_T - K$ , falls  $S_T > K$  und 0, falls  $S_T \leq K$  (denn dann kann die Aktie ja billiger direkt auf dem Markt gekauft werden), also

$$C_T = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+.$$

Wenn wir den Preis der Call-Option zum heutigen Zeitpunkt  $t = 0$  mit  $C_0$  sowie den Preis der Put-Option zum Zeitpunkt  $t = 0$  mit  $P_0$  bezeichnen, können wir also den Gewinn (bzw. Verlust) bei diesen Optionen für Käufer und Verkäufer graphisch darstellen (siehe Abbildungen 3 und 4). Hierbei wird der Einfachheit halber angenommen, dass die risikolose Zinsrate gleich 0 ist).

Eine Option stellt also ein Recht dar, das zu einem finanziellen Vorteil führen kann (und zu einem finanziellen Nachteil für jemand anderen) und beinhaltet keinerlei Verpflichtungen. Dieses Recht muss also etwas kosten.

Frage: Wie viel?

Der Optionspreis muss so bestimmt werden, dass beide Parteien einwilligen. Eine Möglichkeit, diesen *fairen Preis* für die Option zu beschreiben, ist es, den derzeitigen Wert eines Portfolios (bestehend aus Bargeld und Aktienanteilen) zu betrachten, das zum Zeitpunkt  $T$  (risikolos!) genau den gleichen Ertrag wie die Option liefert (falls ein solches Portfolio existiert!). Man nennt dies dann ein Portfolio, das die Option **repliziert**. Mit einem replizierenden Portfolio kann man sich also gegen das Risiko, das sich durch den Verkauf der Option ergibt (nämlich das Risiko, dass  $S_T$  größer (bzw. kleiner) als  $K$  ist), absichern (engl. **hedge**). Ein zweiter großer Aufgabenbereich in der Finanzmathematik ist somit die Konstruktion von solchen sog. Hedge-Portfolios.

Bevor wir uns der konkreten Berechnung von Optionspreisen zuwenden, wollen wir einige allgemeine Eigenschaften von Optionspreisen untersuchen:

### 4.3 Eigenschaften von Optionspreisen

Wir werden in der Folge nur Optionen auf Aktien (kurz: Aktienoptionen) betrachten.

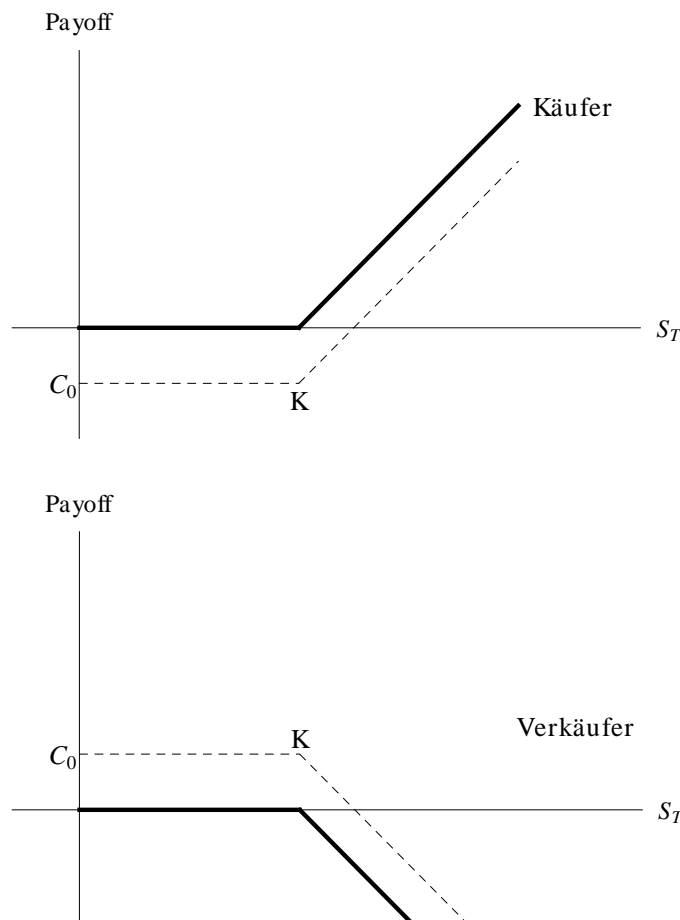


ABB. 3: PAYOFF UND GEWINN BEI EINER EUROPÄISCHEN CALL-OPTION

### 4.3.1 Allgemeines

Es gibt sechs Faktoren, die den Preis einer Aktienoption beeinflussen:

1. der derzeitige Aktienpreis  $S_0$
2. der Ausübungspreis  $K$
3. die Zeit  $T$  bis zum Verfallsdatum der Option
4. die Volatilität  $\sigma$  des Aktienpreises
5. die risikolose Zinsrate  $r$
6. die erwarteten Dividenden während der Laufzeit der Option

Die Volatilität  $\sigma$  des Aktienpreises ist dabei ein Maß dafür, wie “unsicher” die zukünftige Aktienpreisentwicklung ist (konkret ist  $\sigma\sqrt{\Delta t}$  die Standardabweichung des Returns der Aktie für ein kleines Zeitintervall  $\Delta t$ ; siehe Abschnitt 4.6). Dividendenzahlungen reduzieren den Aktienpreis unmittelbar nach der Auszahlung

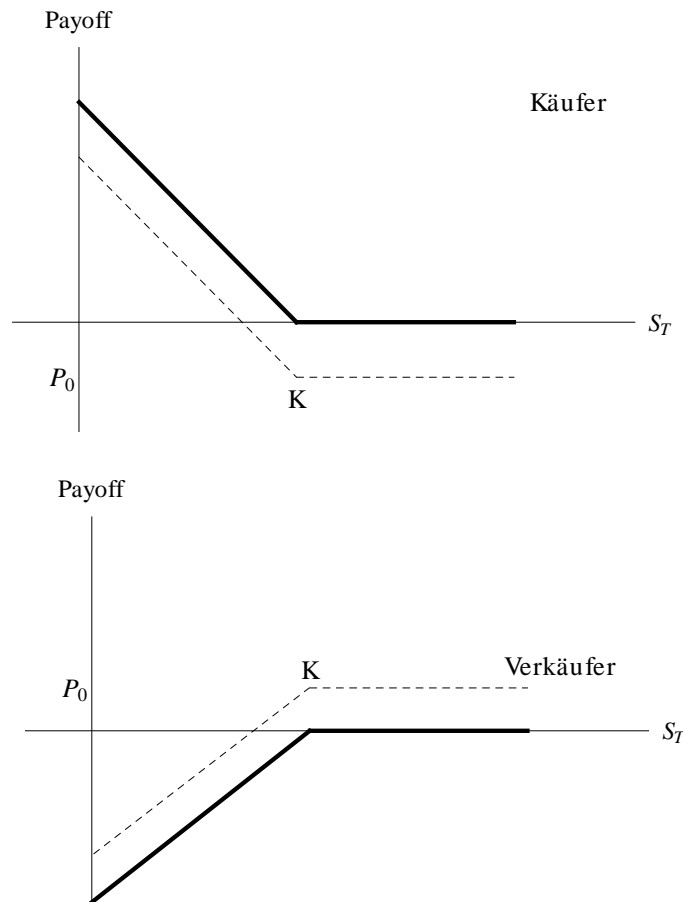


ABB. 4: PAYOFF UND GEWINN BEI EINER EUROPÄISCHEN PUT-OPTION

(und entsprechend wirkt sich das auf den Wert der Option aus). Der Einfachheit halber werden wir Dividendenzahlungen jedoch im weiteren nur berücksichtigen, wenn explizit darauf hingewiesen wird.

Wenn sich eine dieser Variablen vergrößert, während alle anderen konstant bleiben, hat das folgenden Effekt auf den Optionspreis:

| Variable   | Europäischer Call | Europäischer Put | Amerikanischer Call | Amerikanischer Put |
|------------|-------------------|------------------|---------------------|--------------------|
| $S_0$      | +                 | -                | +                   | -                  |
| $K$        | -                 | +                | -                   | +                  |
| $T$        | ?                 | ?                | +                   | +                  |
| $\sigma$   | +                 | +                | +                   | +                  |
| $r$        | +                 | -                | +                   | -                  |
| Dividenden | -                 | +                | -                   | +                  |



In der Folge werden wie immer folgende Annahmen treffen:

1. Es gibt keine Transaktionskosten.
2. Es ist immer möglich, Geld zur risikolosen Zinsrate  $r$  auszuleihen oder anzulegen (z.B. durch Kauf bzw. Verkauf einer Anleihe (engl. *bond*)).  $r$  sei hier immer als konstant vorausgesetzt.

Wir nehmen weiters an, dass Marktteilnehmer Arbitrage-Möglichkeiten sofort ausnützen, falls sie existieren. Somit verschwindet aber diese Möglichkeit sehr rasch und für die Analyse von Preisen von Finanzderivaten ist deshalb folgende weitere Annahme sinnvoll:

3. Es gibt keine Arbitrage-Möglichkeit.

#### 4.3.1.1 Schranken für Optionspreise

Wir wollen nun mit einfachen Überlegungen Schranken für Optionspreise herleiten. Diese Schranken sind nicht sehr scharf, jedoch sind sie unabhängig vom zugrundeliegenden Marktmodell und basieren einzig und allein auf den obigen drei Annahmen.

Der Wert einer Call-Option (bzw. Put-Option) zum Zeitpunkt  $t$  wird in der Folge immer mit  $C_t$  (bzw.  $P_t$ ) bezeichnet.

Amerikanische Optionen müssen im allgemeinen natürlich mehr wert sein als europäische vom gleichen Typ, da der Besitzer ja größere Flexibilität bezüglich der Ausübung hat. Dies läßt sich an folgendem Beispiel illustrieren: Sei  $C_0(E)$  (der Preis einer europäischen Call-Option mit Ausübungspreis  $K$  und Ausübungsdatum  $T$ ) größer als  $C_0(A)$  (der Preis einer amerikanischen Call-Option mit gleichem  $K$  und  $T$ ), dann könnte man risikolosen Gewinn machen, indem man eine europäische Option verkauft, eine amerikanische Option kauft und die Differenz  $C_0(E) - C_0(A)$  behält. Indem wir die amerikanische Option bis zum Zeitpunkt  $T$  behalten, an dem sie den gleichen Wert wie die europäische hat, haben wir risikolosen Gewinn gemacht. Wenn Arbitrage ausgeschlossen werden soll, gilt also immer

$$0 \leq C_0(E) \leq C_0(A).$$

Beide Optionspreise müssen unter dem derzeitigen Wert  $S_0$  der Aktie liegen (und in der Praxis werden sie viel kleiner sein), denn wäre  $C_0(A) > S_0$ , könnten wir einfach eine Aktie um  $S_0$  kaufen und eine Option verkaufen. Der Gewinn dabei ist risikolos wie sicher, denn die Verpflichtung aus der Option ist durch die Aktie

abgedeckt.

Mit einfachen No-Arbitrage-Argumenten lässt sich weiters zeigen:



**Satz 1:**

*In einem arbitragefreien Markt gilt*

$$S_0 \geq C_0(A) \geq C_0(E) \geq \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0).$$

*sowie*

$$Ke^{-rT} \geq P_0(E) \geq \max(Ke^{-rT} - S_0, 0)$$

*und*

$$P_0(A) \geq \max(K - S_0, 0).$$

**Beweis:** siehe VO.

Diese Schranken sind zwar sehr großzügig, gelten aber in allen Optionspreismodellen!

Mit den Schranken aus Satz 1 lässt sich nun eine überraschend einfache Beziehung zwischen amerikanischen und europäischen Call-Preisen finden (falls, wie wir hier annehmen, keine Dividendenzahlungen stattfinden): es gilt

$$C_0(E) = C_0(A), \tag{4.2}$$

denn wegen  $r \geq 0$  gilt  $C_0(A) \geq C_0(E) \geq S_0 - Ke^{-rT} \geq S_0 - K$ . Der Optionspreis ist also (für beide Typen) mindestens gleich groß dem Gewinn, den man macht, wenn die Option sofort ausgeübt wird. Die Option wird also nicht sofort ausgeübt werden (solange der Investor "mehr" gegenüber "weniger" bevorzugt). Dieses Argument kann aber für jeden Startzeitpunkt  $t < T$  angewandt werden: es gilt  $C_t(E) \geq S_t - Ke^{-r(T-t)}$  und somit  $C_t(A) \geq S_t - K$  (unabhängig von  $T - t$ ). Daraus folgt also, dass eine amerikanische Call-Option auf eine Aktie, die keine Dividenden auszahlt, nicht vor dem Zeitpunkt  $T$  ausgeübt wird, sodass (4.2) gilt! Eine Call-Option auf eine Aktie, die keine Dividenden auszahlt, sollte also nicht vorzeitig ausgeübt werden, da sie den Besitzer (im Gegensatz zum Besitz der Aktie) gegen das Ereignis  $S_T < K$  versichert. Weiters ist ein spätes Zahlen des Ausübungspreises wegen  $r > 0$  zu bevorzugen.

Frühes Ausüben einer amerikanischen Put-Option auf eine Aktie, die keine Dividenden auszahlt, kann hingegen optimal sein. Deshalb gilt für  $r > 0$  immer  $P_0(A) > P_0(E)$ .

### 4.3.1.2 Call-Put-Parität

Zum Zeitpunkt  $T$  gilt aufgrund der Definitionen:

$$C_T - P_T = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K.$$

Man kann nun zeigen, dass Arbitrage nur dann verhindert werden kann, wenn für alle  $t \in [0, T]$  gilt:

**Satz 2: (Call-Put-Parität)**

*In einem arbitrage-freien Markt gilt für europäische Optionen*

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.3)$$

**Beweis:** siehe VO.

Somit kann im Falle von Aktien, die keine Dividenden auszahlen, der Preis einer europäischen Put-Option immer in einfacher Weise aus der entsprechenden Call-Option berechnet werden und wir können uns in Hinkunft o.B.d.A. auf die Untersuchung der Call-Option beschränken.

Für amerikanische Optionen gibt es keine Put-Call-Parität, jedoch gelten folgende Abschätzungen:

**Übung 1:**

Man zeige, dass für amerikanische Optionen auf Aktien, die keine Dividenden auszahlen, gilt:

$$S_t - K < C_t(A) - P_t(A) < S_t - Ke^{-r(T-t)} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.4)$$

### 4.3.2 Berücksichtigung von Dividenden

In den bisherigen Überlegungen haben wir vorausgesetzt, dass keine Dividendenzahlungen an die Aktionäre stattfinden. In diesem Abschnitt wollen wir die Auswirkungen von Dividenden untersuchen. Da  $T$  für die meisten gehandelten Aktienoptionen weniger als ein Jahr beträgt, können die Dividendenzahlungen während der Laufzeit einer Option in der Regel mit hinreichender Genauigkeit vorausgesagt werden. Wir bezeichnen mit  $D_t$  den Barwert der Dividenden während der Laufzeit  $T - t$  der Option zum Zeitpunkt  $t$ . Dann gilt

$$C_t(E) > S_t - D_t - Ke^{-r(T-t)} \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.5)$$

und

$$P_t(E) > D_t + Ke^{-r(T-t)} - S_t \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.6)$$

Wenn Dividenden zu erwarten sind, kann es auch bei einer amerikanischen Call-Option vorteilhaft sein, sie früh auszuüben (speziell vor dem Zeitpunkt einer Dividendenzahlung kann die Ausübung optimal sein, da danach der Aktienpreis fallen wird).

Wenn Dividendenzahlungen stattfinden, ändert sich die Put-Call-Parität (4.3) für europäische Optionen zu

$$C_t(E) - P_t(E) = S_t - D_t - Ke^{-r(T-t)} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.7)$$

Entsprechend gilt für amerikanische Optionen statt (4.4) bei Dividendenzahlungen

$$S_t - D_t - K < C_t(A) - P_t(A) < S_t - Ke^{-r(T-t)} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.8)$$

## 4.4 Handelsstrategien mit Optionen

In Abschnitt 4.2.2 haben wir den Gewinn-Verlauf (in Abhängigkeit des Aktienpreises) bei Investition in eine Option untersucht. Wenn man eine Position in einer europäischen Aktienoption mit einer Position in der Aktie selbst verbindet, so ergeben sich mehrere mögliche Gewinnverläufe (siehe Abb. 5).

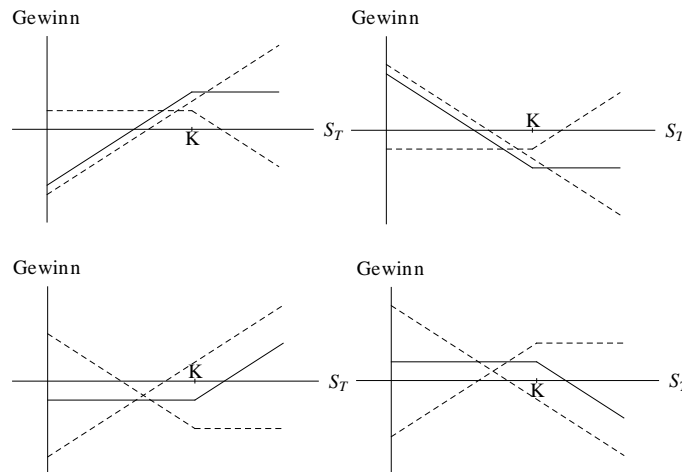


ABB. 5: GEWINN BEI HANDELSSTRATEGIEN MIT EINER OPTION UND EINER AKTIE

Besteht ein Portfolio aus zwei oder mehr Calls oder aus zwei oder mehr Puts, so spricht man von einem *Spread*. Ein *Bull-Spread* wird durch den Kauf einer Call- (bzw. Put-) Option mit niedrigem Ausübungspreis  $K_1$  und dem Verkauf einer Call- (bzw. Put-) Option mit hohem Ausübungspreis  $K_2$  erzeugt (siehe Abb. 6).

Ein Investor mit einem Bull-Spread hofft also auf einen hohen Aktienkurs zum Zeitpunkt  $T$ .

Im Gegensatz dazu wird ein *Bear-Spread* durch den Kauf einer Call-(bzw. Put-) Option mit hohem Ausübungspreis  $K_2$  und dem Verkauf einer Call-(bzw. Put-) Option mit niedrigem Ausübungspreis  $K_1$  erzeugt (siehe Abb. 7). Dieser Spread ist also dann vorteilhaft, wenn der Aktienkurs zum Zeitpunkt  $T$  niedrig ist.

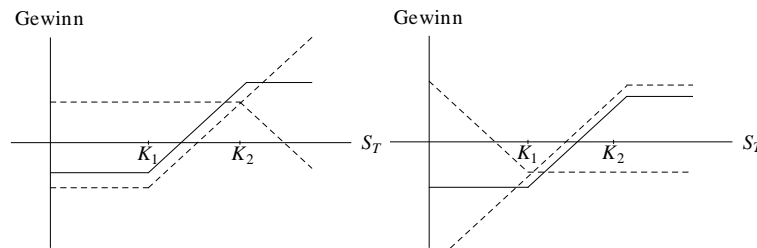


ABB. 6: GEWINN BEI EINEM BULL-SPREAD

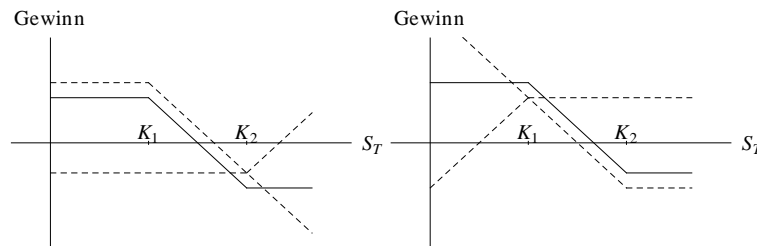


ABB. 7: GEWINN BEI EINEM BEAR-SPREAD

Bei diesen Strategien wird also das Potenzial für einen hohen Gewinn gegen den Erhalt einer fixen Summe (durch den Verkauf der Call- bzw. Put-Option) eingetauscht.

Ein *Butterfly-Spread* besteht aus Optionen mit drei verschiedenen Ausübungspreisen. Er kann erzeugt werden durch den Kauf einer Call-Option mit niedrigem Ausübungspreis  $K_1$ , dem Kauf einer Call-Option mit hohem Ausübungspreis  $K_3$  und dem Verkauf von zwei Call-Optionen zum Ausübungspreis  $K_2$  mit  $K_2 = (K_1 + K_3)/2$ . Typischerweise ist  $K_2$  im Bereich des derzeitigen Aktienpreises  $S_0$ . Der Gewinnverlauf eines Butterfly-Spreads wird in Abb. 8 wiedergegeben. Er führt also dann zu Gewinn, wenn der Aktienpreis nahe bei  $K_2$  bleibt und führt sonst zu relativ geringem Verlust. Ein solcher Butterfly-Spread ist also eine geeignete Strategie für einen Investor, der glaubt, dass sich der Aktienkurs nur wenig ändern wird. Butterfly-Spreads können auch mit Put-Optionen kreiert werden. Wie man in Abb. 8 sieht, ist die dabei entstehende Gewinnfunktion äquivalent zum entsprechenden Spread mit Call-Optionen. Aus der Put-Call-Parität folgt, dass die jeweils anfänglich notwendigen Investitionen für beide der Strategien demnach gleich sein müssen.

Die Liste der Handelsstrategien lässt sich natürlich beliebig erweitern:

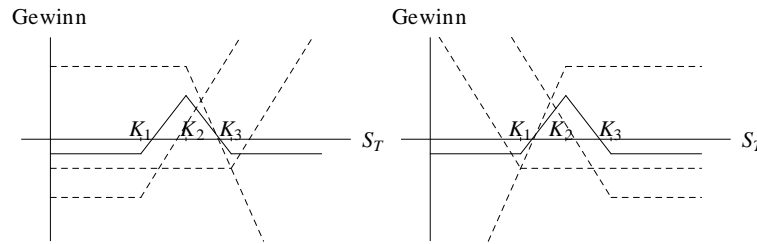


ABB. 8: GEWINN BEI EINEM BUTTERFLY-SPREAD

- gleicher Ausübungspreis, aber unterschiedliche Fälligkeitsdaten  $T$  für die involvierten Optionen (*Kalender-Spreads*)
- unterschiedliche Ausübungspreise und unterschiedliche Ausübungszeitpunkte für die involvierten Optionen (*Diagonal-Spreads*)
- Portfolio mit Calls und Puts auf die gleiche Aktie usw.

Wenn europäische Optionen mit Fälligkeitsdatum  $T$  zu jedem möglichen Strike-Preis  $K$  verfügbar sind, kann man mit ihnen ein Portfolio mit jeder gewünschten Payoff-Funktion erzeugen. Das ist auch einer der Gründe, warum das Handeln mit Optionen so beliebt ist.

## 4.5 Das binomiale Optionspreismodell

### 4.5.1 Optionspreismodell mit einer Periode

Zum Einstieg betrachten wir einen Markt mit einer einzigen Handelsperiode - es gibt also nur Zeitpunkt 0 und  $T$ , d.h.  $\mathbb{T} = \{0, T\}$ . Wir modellieren den Aktienwert  $S_T$  durch eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ . Jeder Claim  $H$ , der eine Funktion von  $S_T$  (oder allgemeiner  $S_t$ ) ist, ist also eine nichtnegative Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ .

**Beispiel:** Nehmen wir vorerst der Einfachheit halber an, dass die Zinsrate  $r = 0$  ist und eine Aktie  $S$  heute den Preis  $S_0 = 10$  (z.B. €) hat und zum Zeitpunkt  $T$  einen der folgenden Werte annehmen wird:

$$S_T = \begin{cases} 20 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p, \\ 7.5 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \end{cases}$$

Betrachte eine europäische Call-Option  $H = (S_T - K)^+$  auf diese Aktie mit Ausübungspreis  $K = 15$ . Wir versuchen nun, ein Hedge-Portfolio  $(\theta_0, \theta_1)$  mit  $\theta_0$  Einheiten von Bargeld und  $\theta_1$  Einheiten dieser Aktie  $S$  zu finden, das den Wert der Option zum Zeitpunkt  $T$  repliziert ( $\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$ ). Da  $S_T$  nur zwei Werte

annehmen kann und wir zwei Variablen zur Verfügung haben ( $\theta_0$  und  $\theta_1$ ), können wir ein solches Portfolio in diesem Modell immer konstruieren. Der Wert dieses Portfolios heute wird also dann den fairen Preis dieser Option liefern (für jeden anderen Preis lässt sich risikoloser Profit machen!). Der Wert des Portfolios ist gegeben durch  $V_t = \theta_0 + \theta_1 S_t$  ( $t \in \mathbb{T}$ ) und kann sich hier (wegen  $r = 0$ ) also nur durch Änderung des Aktienpreises verändern. Damit dieses Portfolio den Wert der Option repliziert, müssen wir nun  $\theta_0, \theta_1$  wie folgt wählen:

$$\begin{aligned} 5 &= \theta_0 + 20 \theta_1 \\ 0 &= \theta_0 + 7.5 \theta_1. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\theta_0 = -3, \theta_1 = 0.4$ . Substituieren in  $V_0 = \theta_0 + \theta_1 S_0$  ergibt  $V_0 = -3 + 0.4(10) = 1$ .

Die Hedging-Strategie ist also wie folgt: Zum Zeitpunkt  $t = 0$  verkaufen wir eine Option, bekommen dafür 1 €, leihen uns weiters 3 € aus und investieren die Summe von 4 € in Aktien. Dafür erhalten wir also  $\frac{4}{10} = 0.4$  Aktienanteile. Zum Zeitpunkt  $T$  gibt es zwei Möglichkeiten:

- (i)  $S_T = 20$ . Die Option wird ausgeübt, d.h. wir müssen die Aktie verkaufen, dabei machen wir 5 € Verlust. Wir zahlen unseren Kredit zurück (3 €) und verkaufen unsere Aktienanteile (dafür erhalten wir  $0.4 \times 20 = 8$  €). Gesamtbilanz dieses Handels: 0.
- (ii)  $S_T = 7.5$ . Die Option wird nicht ausgeübt (keine Kosten). Wir zahlen unseren Kredit zurück (Kosten 3 €) und verkaufen unsere Aktienteile (Gewinn  $0.4 \times 7.5 = 3$  €). Gesamtbilanz dieses Handels: 0.

Der Verkauf der Option und der Besitz des Hedge-Portfolios gleichen sich also genau aus, wenn der Preis der Option gleich  $C_0 = 1$  gesetzt wird. Wieder sieht man sofort, dass kein anderer Preis diese Eigenschaft haben kann: Wenn  $C_0 > 1$ , verkaufen wir die Option und kaufen damit das Hedge-Portfolio und erhalten risikolosen Gewinn  $C_0 - 1$ , und falls  $C_0 < 1$ , wechseln wir mit dem Käufer die Rollen.

Betrachten wir nun etwas allgemeiner ein 1-periodisches Modell mit risikoloser Zinsrate  $r > 0$  und

$$S_T = \begin{cases} s_2 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p, \\ s_1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \end{cases}$$

und einen Claim  $H$  mit Payoff  $V_T = f_2$ , falls  $S_T = s_2$  und  $V_T = f_1$ , falls  $S_T = s_1$ . Betrachten wir wieder ein Portfolio  $(\theta_0, \theta_1)$  aus Aktienanteilen und Bargeld, genauer  $\theta_1$  Einheiten von Aktien (Wert  $\theta_1 S_0$ ) und  $\theta_0$  Einheiten von einer Anleihe

$B_0$ , die zum Zinssatz  $r$  verzinst wird (Wert  $\theta_0 B_0$ ). Dann ergibt sich auf die gleiche Weise wie vorhin als Bedingung für das Hedge-Portfolio

$$\begin{aligned} f_2 &= \theta_0 B_0 e^{rT} + \theta_1 s_2 \\ f_1 &= \theta_0 B_0 e^{rT} + \theta_1 s_1 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{f_2 - f_1}{s_2 - s_1}, \\ \theta_0 &= B_0^{-1} e^{-rT} \left( f_2 - \frac{(f_2 - f_1)s_2}{s_2 - s_1} \right). \end{aligned}$$

Der Wert dieses Portfolios zum Zeitpunkt  $t = 0$  und somit der Preis für diesen Claim  $H$  ist

$$V_0(H) = S_0 \left( \frac{f_2 - f_1}{s_2 - s_1} \right) + e^{-rT} \left( f_2 - \frac{(f_2 - f_1)s_2}{s_2 - s_1} \right). \quad (4.9)$$

**Bemerkung:** Diese einfache Rechnung war nur möglich, da es lediglich zwei mögliche Werte für  $S_T$  gab - schon bei einer Aufspaltung in drei mögliche Werte kann man im allgemeinen kein Hedge-Portfolio mehr konstruieren!

Die Wahrscheinlichkeiten  $p$  und  $1 - p$  für einen Anstieg bzw. Abfall des Aktienkurses kommen in (4.9) nicht vor! Das scheint der Intuition zu widersprechen, denn es ist naheliegend, anzunehmen, dass für größeres  $p$  der Wert der Call-Option größer wird. Dies ist aber nicht der Fall. Die Schätzung von  $p$  ist i.a. abhängig von den Risikopräferenzen der Investoren; das No-Arbitrage-Prinzip legt für die Option einen Preis fest, der unabhängig von diesen Präferenzen ist:

Wenn wir die Variable

$$q = \frac{S_0 e^{rT} - s_1}{s_2 - s_1} \quad (4.10)$$

einführen, so folgt aus (4.9)

$$V_0(H) = e^{-rT} \left( q f_2 + (1 - q) f_1 \right). \quad (4.11)$$

Weiters gilt  $q \in (0, 1)$ . Wir können den Preis für  $H$  also als diskontierten Erwartungswert des Payoffs ausdrücken - jedoch nicht bezüglich  $p$ , sondern bezüglich einer anderen Wahrscheinlichkeit  $q$ , dem sogenannten *risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß*  $Q$ :

$$V_0(H) = e^{-rT} \mathbb{E}_Q[V_T(H)]. \quad (4.12)$$



Die Bezeichnung “risikoneutral” wird durch folgende Beobachtung verständlich: Der Erwartungswert des Aktienpreises unter diesem neuen Wahrscheinlichkeitsmaß ist

$$\mathbb{E}_Q(S_T) = (qs_2 + (1 - q)s_1) = S_0e^{rT},$$

der Aktienpreis wächst also im Durchschnitt wie eine risikolose Vermögensform gemäß der Zinsrate  $r$ .

Dieses Resultat ist ein Beispiel für ein wichtiges allgemeines Prinzip in der Optionstheorie, nämlich der *risikoneutralen Bewertung*. Es besagt, dass wir eine Risikoneutralität annehmen können, wenn wir Preise für Optionen oder andere Derivate bestimmen. Die so erhaltenen Preise sind nicht nur in der risikoneutralen Welt, sondern auch allgemein korrekt.

Man kann also als Alternative zur Optionspreisbestimmung mit No-Arbitrage-Überlegungen im obigen Beispiel den Optionspreis auch mittels risikoloser Bewertung erhalten: In der risikoneutralen Welt muss der erwartete Aktienpreis  $S_T$  am Ende der Periode gleich dem mit der risikolosen Zinsrate  $r > 0$  aufgezinsten Wert  $S_0$  sein; demnach erhält man  $q$  aus der Gleichung

$$s_2q + s_1(1 - q) = S_0e^{rT},$$

woraus (4.10) folgt. Für das so bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  kann man nun mittels (4.12) den Preis des entsprechenden Claims bestimmen. No-Arbitrage-Argumente und risikoneutrale Bewertung liefern also die gleichen Antworten.

### 4.5.2 Das Cox-Ross-Rubinstein-Binomialmodell

Betrachten wir nun ein binomiales Preismodell mit Handelstagen  $0, 1, 2, \dots, T$  für ein festes  $T$ . Der Aktienkurs nimmt also die Werte  $S_0, S_1, \dots, S_T$  an und für jedes  $t \leq T$  gilt

$$S_t = \begin{cases} (1 + b)S_{t-1} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ (1 + a)S_{t-1} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \end{cases}, \quad a < e^r - 1 < b$$

und  $r$  sei die risikolose Zinsrate. Wir wollen nun den Preis für einen Claim  $H$  (z.B. eine europäische Call-Option) bestimmen, der zum Zeitpunkt  $T$  ausgeübt werden kann. Betrachten wir dazu den Wert von  $H$  zum Zeitpunkt  $T - 1$ , so können wir diesen als Startwert für ein 1-periodisches Modell (vgl. Abschnitt 4.5.1) interpretieren; es gibt also eine Hedging-Strategie  $(\theta_0, \theta_1)$ , die den Wert von  $H$  an den Zeitpunkten  $\{T - 1, T\}$  repliziert sowie ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$ . Wir können also den Wert  $V_{T-1}$  von  $H$  zum Zeitpunkt  $T - 1$  als diskontierten Erwartungswert unter  $Q$  berechnen (siehe (4.11)):

$$V_{T-1} = e^{-r} \left( qf_2 + (1 - q)f_1 \right)$$

mit

$$q = \frac{e^r - 1 - a}{b - a}. \quad (4.13)$$

**Bemerkung:** Hier findet die Bezeichnung *risikoneutrales Maß* für  $Q$  wieder eine Begründung: Ein risiko-neutraler Investor ist jemand, der indifferent ist zwischen einer Investition mit einem sicheren Ertrag und einer Investition mit einem unsicheren Ertrag mit gleichem Erwartungswert. Unter  $Q$  gilt nämlich für den Erwartungswert von  $S_T$ , gegeben  $S_{T-1} = S$ ,

$$\mathbb{E}[S_T | S_{T-1} = S] = q(1+b)S + (1-q)(1+a)S = e^r S.$$

Nun kann man analog vorgehen, um  $V_{T-2}$  zu berechnen: die Aktie, deren Wert  $S_{T-2}$  jetzt als  $S$  geschrieben wird, kann zur Zeit  $T$  einen von den drei Werten  $(1+b)^2 S$ ,  $(1+a)(1+b)S$  und  $(1+a)^2 S$  annehmen (siehe Abb. 9), der Claim  $H$  muss also zur Zeit  $T$  einen von drei Werten annehmen, die wir mit  $f_{22}$ ,  $f_{21}$ ,  $f_{11}$  bezeichnen wollen. Die zwei möglichen Werte von  $V_{T-1}$  ( $V^b$ ,  $V^a$ ) können wie oben nach dem 1-periodischen Modell berechnet werden. Somit kann man auch  $V_{T-2}$  wie im 1-periodischen Modell berechnen:

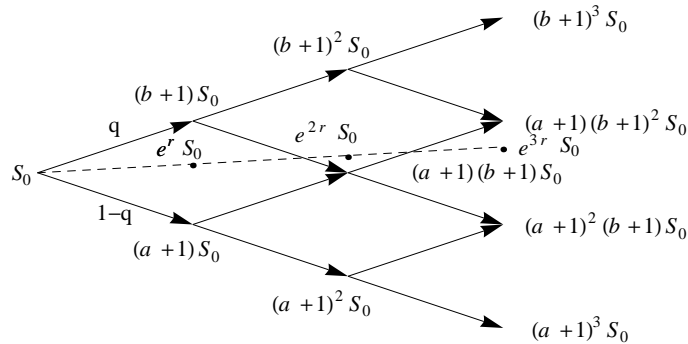


ABB. 9: EREIGNISBAUM FÜR DAS CRR-MODELL

$$\begin{aligned} V_{T-2} &= e^{-r} \left( qV^b + (1-q)V^a \right) \\ &= e^{-2r} \left[ q \left( qf_{22} + (1-q)f_{21} \right) + (1-q) \left( qf_{21} + (1-q)f_{11} \right) \right] \\ &= e^{-2r} \left[ q^2 f_{22} + 2q(1-q)f_{21} + (1-q)^2 f_{11} \right]. \end{aligned}$$

Der Wert des Claims zum Zeitpunkt  $T-2$  ist also vollständig bestimmt durch Größen, die dem Investor schon zum Zeitpunkt  $T-2$  bekannt sind.

Diese Rekursion kann nun fortgesetzt werden und auf diese Weise erhält man  $V_t$  für jedes  $t < T$ .

Speziell erhält man für den Geldbetrag, den man braucht, um eine europäische Call-Option  $H$  zu replizieren,

$$\begin{aligned}
V_0 &= e^{-rT} \sum_{t=0}^T \binom{T}{t} q^t (1-q)^{T-t} \left( (1+b)^t (1+a)^{T-t} S_0 - K \right)^+ \quad (4.14) \\
&= \sum_{t=A}^T \binom{T}{t} \frac{q^t}{e^{rt}} \frac{(1-q)^{T-t}}{e^{r(T-t)}} \left( (1+b)^t (1+a)^{T-t} S_0 \right) \\
&\quad - K e^{-rT} \sum_{t=A}^T \binom{T}{t} q^t (1-q)^{T-t},
\end{aligned}$$

wobei  $A$  die kleinste natürliche Zahl  $k$  ist, für die  $S_0(1+b)^k(1+a)^{T-k} > K$  gilt. Unter Verwendung von (4.13) und  $q' = q(1+b)/e^r$  folgt  $q' \in (0, 1)$  und  $1 - q' = (1-q)(1+a)/e^r$ , sodass schließlich für den fairen Preis einer europäischen Call-Option in diesem Binomialmodell folgt:

$$V_0 = S_0 \Psi(A; T, q') - K e^{-rT} \Psi(A; T, q), \quad (4.15)$$

mit

$$\Psi(m; n, p) = \sum_{j=m}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}.$$

Formel (4.15) ist die sog. *Cox-Ross-Rubinstein*-Binomial-Optionspreis-Formel für einen europäischen Call.

Wir konnten also durch rekursive Anwendung des 1-periodischen Modells den Preis  $V_0$  eines Claims  $H$  zum Zeitpunkt 0 im Binomialmodell bestimmen. Allgemeiner ist klar, dass der Wert  $V_t$  der Option zum Zeitpunkt  $t \leq T$  durch die Formel

$$V_t = S_t \Psi(A_t; T-t, q') - K e^{-r(T-t)} \Psi(A_t; T-t, q), \quad (4.16)$$

gegeben ist, wobei  $A_t$  die kleinste natürliche Zahl  $k$  ist, für die  $S_t(1+b)^k(1+a)^{T-t-k} > K$  gilt. Analog zu oben kann man nun die Zusammensetzung des Hedge-Portfolios zum Zeitpunkt  $t$  bestimmen. Das Portfolio  $(\theta_{t-1}^0, \theta_{t-1}^1)$  wird über das Zeitintervall  $[t-1, t)$  gehalten und muss  $V_t$  replizieren, d.h.

$$\theta_{t-1}^1 S_t + \theta_{t-1}^0 e^r = V_t.$$

Setzt man nun für  $S_t$  die zwei möglichen Werte in Abhängigkeit von  $S_{t-1}$  und für  $V_t$  die entsprechenden Optionswerte ein, so folgt eine eindeutige Lösung für  $(\theta_{t-1}^0, \theta_{t-1}^1)$ . Allgemein gilt demnach für  $0 \leq t < T$

$$\begin{aligned}
\theta_{t-1}^0 &= -K e^{-r(T-t)} \sum_{s=A_t}^{T-t} \binom{T-t}{s} q^s (1-q)^{T-t-s} \\
\theta_{t-1}^1 &= \sum_{s=A_t}^{T-t} \binom{T-t}{s} (q')^s (1-q')^{T-t-s}.
\end{aligned}$$

Das Hedge-Portfolio besteht also im Zeitintervall  $[t, t + 1)$  aus  $\theta_t^0$  Einheiten an Bargeld und  $\theta_t^1$  Aktienanteilen und wird zum Zeitpunkt  $t + 1$  mit der dann zur Verfügung stehenden Information auf die Zusammensetzung  $(\theta_{t+1}^0, \theta_{t+1}^1)$  umgestellt. Für diese Umstellung sind keine zusätzlichen finanziellen Mittel notwendig. Das Hedge-Portfolio heisst also *selbstfinanzierend*, da während der gesamten Laufzeit, in der die Option repliziert wird, keine finanziellen Zu- oder Abflüsse nach außen stattfinden.

**Bemerkung:** Mit diesem Binomialmodell werden in der Praxis auch häufig numerische Approximationsmethoden für Preise von Optionen entwickelt, für die keine analytischen Lösungen verfügbar sind. Ein Beispiel sind amerikanische Call-Optionen: Da diese Optionen zu jedem Zeitpunkt  $t < T$  ausgeübt werden können, wird der wie oben durch Rückwärtseinsetzen gewonnene Wert  $V_t^G$  der entsprechenden europäischen Call-Option auf einem bestimmten Knoten  $G$  des Zeitpunktes  $t$  durch

$$\max\{V_t^G, S^G - K\}$$

ersetzt, wobei  $S^G$  den Aktienpreis auf diesem Knoten bezeichnet. Analoges gilt natürlich für amerikanische Put-Optionen.

Auf diese Weise gibt es zwar keine geschlossene Summationsformel, jedoch reichen in der Praxis oft Rechentiefen im Bereich von  $n \approx 200$  aus, um brauchbare Näherungen für den Optionspreis zu erhalten.

## 4.6 Das Black-Scholes-Modell

Die mathematische Theorie der Optionspreisberechnung begann 1900 mit der Dissertation von LOUIS BACHELIER, der stochastische Prozesse in stetiger Zeit benutzte, um Optionen und Derivate zu modellieren und deren Preis zu bestimmen. Seine Arbeit blieb lange Zeit unbeachtet. Erst die bahnbrechenden Arbeiten von BLACK UND SCHOLES [3] (1973) und MERTON [17] zeigten, wie effektiv stochastische Methoden bei der Optionspreisberechnung eingesetzt werden können. Obwohl das Black-Scholes-Modell die realen Verhältnisse nicht vollständig widerspiegelt, hat es sich doch in der Praxis der Finanzmärkte bewährt und wird dort mit seinen vielfältigen Modifikationen und Weiterentwicklungen als Marktstandard eingesetzt.

Wir beginnen mit einer Wiederholung der Definition einer Brown'schen Bewegung.

**Definition 1** *Eine Brown'sche Bewegung (bzw. ein Wiener-Prozess) ist eine Zufallsfunktion  $(W_t : t \in \mathbb{R})$ , für die gilt:*

- (i) *Mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt  $W_0 = 0$  und  $W_t$  ist eine stetige Funktion in  $t$ .*

(ii) Für jedes  $t \geq 0$  und  $h > 0$  ist das Inkrement  $W_{t+h} - W_t$  normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz  $h$ , also

$$W_{t+h} - W_t \sim N(0, h).$$

(iii) Aufeinanderfolgende Inkremente  $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  und  $W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$  sind stochastisch unabhängig.

Daraus folgt insbesondere, dass  $W_t$  für jedes  $t$  selbst normalverteilt ist mit Mittelwert 0 und Varianz  $t$ . Die Inkremente von  $W_t$  sind auch *stationär*, d.h. die Verteilung von  $W_{t+h} - W_t$  ( $h > 0$ ) ist unabhängig von  $t$ .

Wir betrachten nun einen verallgemeinerten Wiener Prozess  $W_t^g$  mit

$$dW_t^g = a dt + b dW_t.$$

Für jedes  $t \geq 0$  und  $h > 0$  ist das Inkrement  $W_{t+h}^g - W_t^g$  dann normalverteilt mit Mittelwert  $ah$  und Varianz  $b^2h$ . Somit hat dieser verallgemeinerte Wiener Prozess erwartete Driftrate (d.h. durchschnittlicher Drift pro Zeiteinheit)  $a$  und Varianzrate (d.h. Varianz pro Zeiteinheit)  $b^2$ .

Auf Basis dieses stochastischen Prozesses wird nun ein Aktienpreis ( $S_t : t \in \mathbb{R}$ ) durch eine sogenannte *geometrische Brown'sche Bewegung* modelliert:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad (S_0 = S; \mu, \sigma \dots \text{const.}) \quad (4.17)$$

Mit dieser Wahl ist einerseits gesichert, dass der Aktienpreis immer positiv ist und zweitens ist der erwartete prozentuelle Return  $\mu$  pro Zeiteinheit (das ist die erwartete Driftrate dividiert durch den Aktienpreis) bei Investition in eine Aktie unabhängig von der Höhe des Aktienpreises. Weiters ist auch die Variabilität des prozentuellen Returns unabhängig von der Höhe des Aktienpreises. Die Variable  $\sigma$  wird als *Volatilität* des Aktienkurses bezeichnet und  $\mu$  nennt man die *erwartete Return-Rate*.



**Beispiel 2:** Eine Aktie, die keine Dividenden ausbezahlt, habe eine Volatilität von 30% per annum und einen erwarteten Return von 15% per annum mit stetiger Verzinsung. Dann ist  $\mu = 0.15$  und  $\sigma = 0.30$  und der stochastische Prozess für den Aktienpreis ist gegeben durch

$$\frac{dS_t}{S_t} = 0.15 dt + 0.30 dW_t.$$

Für ein kleines  $h > 0$  gilt dann

$$\frac{S_{t+h} - S_t}{S_t} = 0.15 h + 0.30 \epsilon \sqrt{h},$$

wobei  $\epsilon \sim N(0, 1)$ .

Das Analogon zur geometrischen Brown'schen Bewegung in diskreter Zeit ist gegeben durch

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}.$$

Die Variable  $\Delta S$  ist dabei die Änderung des Aktienpreises  $S$  in einem kleinen Zeitintervall  $\Delta t$  und  $\epsilon \sim N(0, 1)$ . Der Return  $\frac{\Delta S}{S}$  der Aktie in einer kurzen Zeitspanne  $\Delta t$  setzt sich also zusammen aus dem erwarteten Return  $\mu \Delta t$  und einer stochastischen Komponente  $\sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$ , wobei  $\sigma \sqrt{\Delta t}$  die Standardabweichung des Returns in der kurzen Zeitspanne  $\Delta t$  bezeichnet. Es gilt

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t).$$

Das *Black-Scholes-Modell* ist nun ein kontinuierliches Finanzmarktmodell mit endlichem Zeithorizont  $T$  und zwei Finanzgütern, nämlich einer festverzinslichen Anlage (dem Bond) mit kontinuierlicher Verzinsung (Zinsrate  $r$ ; ihr deterministischer Preisverlauf ist somit gegeben durch  $B_t = e^{rt}$ ,  $t \in [0, T]$ ) sowie eines Underlyings (z.B. einer Aktie) mit Preisverlauf  $S_t$ . Die grundlegende Annahme im Black-Scholes-Modell ist, den Preis ( $S_t : t \in \mathbb{R}$ ) durch eine geometrische Brown'sche Bewegung gemäß (4.17) zu modellieren. Es zeigt sich, dass dies der Annahme einer Lognormalverteilung für  $S_T$  entspricht (siehe Abb. 10). Weiters werden im Black-Scholes-Modell folgende Annahmen getroffen:

1.  $\mu$  und  $\sigma$  sind konstant.
2. Wertpapiere können zu beliebigen Mengen gekauft und verkauft werden.
3. Es gibt keine Transaktionskosten und Steuern. Alle Vermögensformen sind beliebig teilbar.

4. Es gibt keine Dividenden während der Lebenszeit des Derivats.
5. Es gibt keine Arbitrage-Möglichkeiten.
6. Die risikolose Zinsrate  $r$  ist konstant.

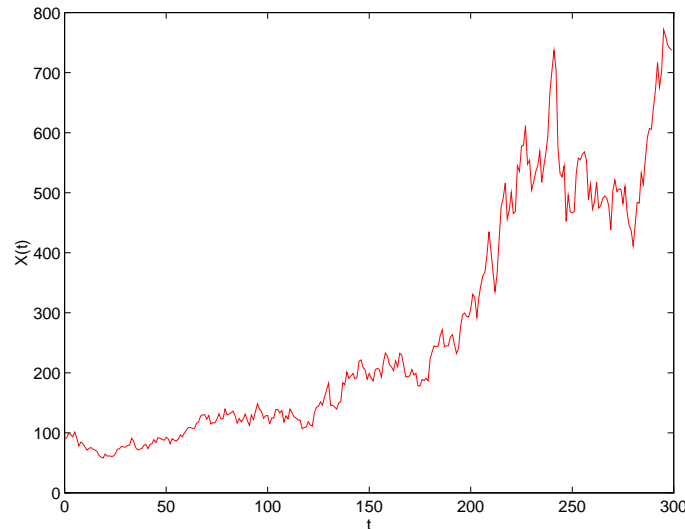


ABB. 10: PFAD EINER GEOMETRISCHEN BROWN'SCHEN BEWEGUNG

**Bemerkung:** Aktienkurse sind charakterisiert durch kleine Auf- und Abwärtsbewegungen, die sich aufgrund von Käufen und Verkäufen ergeben. Die Größe dieser Bewegungen sind grob gesehen proportional zum Preis des Assets; unter der Annahme von Unabhängigkeit ergibt sich, wenn man diese Bewegungen gegen Null gehen läßt, mit dem zentralen Grenzwertsatz für den Aktienkurs eine geometrische Brown'sche Bewegung. Aus diesem Grund und vor allem der mathematischen Einfachheit halber wird dieses Modell häufig verwendet. Statistische Untersuchungen legen jedoch nahe, dass die meisten realen Aktienkurse durch andere Modelle besser beschrieben werden (siehe Abschnitt 4.8).

## 4.7 Die Formel von Black-Scholes

Das CRR-Binomial-Modell beinhaltet alle notwendigen Informationen, um die berühmte Black-Scholes-Formel, die den Preis einer europäischen Call-Option in einem Markt mit stetiger Zeit, der die Annahmen des Black-Scholes-Modells erfüllt, herzuleiten:

### 4.7.1 Herleitung

Dazu betrachten wir den Preisprozess  $S = (S_t)$  auf einem endlichen Zeitintervall  $[0, T]$  auf der reellen Achse und transformieren ihn in ein Problem mit diskreter

Zeit, indem wir ein Binomialmodell  $S^N$  betrachten, das an  $S_0$  beginnt und an einer endlichen Anzahl  $N$  von (äquidistant gewählten) Zeitpunkten seinen Wert ändern kann. Die Handelszeitpunkte sind also durch  $\mathbb{T} = \{0, h, 2h, \dots, Nh\} \subset [0, T]$  mit  $h = T/N$  gegeben. In einem solchen Modell betrachten wir den Wert  $C_0^N$  einer europäischen Call-Option mit Payoff  $(S_T - K)^+$ . Nach (4.14) gilt

$$\begin{aligned} C_0^N &= e^{-rT} \sum_{t=0}^T \binom{T}{t} q^t (1-q)^{T-t} \left( S_0 \prod_{n=1}^N R_n^N - K \right)^+ \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}_Q \left[ \left( S_0 \prod_{n=1}^N R_n^N - K \right)^+ \right], \end{aligned}$$

wobei  $R_n^N = S_{nh}^N / S_{(n-1)h}^N$  die Werte  $(1+b)$  und  $(1+a)$  annimmt. Wir fixieren  $r \geq 0$  und wählen für ein festes  $\sigma > 0$  (das die Volatilität pro Zeiteinheit des Aktienpreises in stetiger Zeit repräsentieren wird) und festes  $N$  die Parameter  $a$  und  $b$  für  $S^N$  in folgender Weise:

$$\frac{1+b}{e^{rh}} = e^{+\sigma\sqrt{h}} \quad \text{und} \quad \frac{1+a}{e^{rh}} = e^{-\sigma\sqrt{h}}. \quad (4.18)$$

Durch diese Wahl konvergiert der Aktienpreisprozess  $S^N$  für  $N \rightarrow \infty$  gegen eine geometrische Brown'sche Bewegung:

Nach (4.13) folgt aus (4.18)

$$q = \frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{+\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}.$$

Nun definieren wir

$$Y_n^N = \log \left( \frac{R_n^N}{e^{rh}} \right) \quad \text{und} \quad Z_N = \sum_{n=1}^N Y_n^N,$$

sodass

$$e^{-rT} \prod_{n=1}^N R_n^N = \exp \left( \sum_{n=1}^N Y_n^N \right) = e^{Z_N}.$$

Es ergibt sich also

$$C_0^N = \mathbb{E}_Q \left[ \left( S_0 e^{Z_N} - e^{-rT} K \right)^+ \right].$$



**Lemma (Zentraler Grenzwertsatz):**

Sei  $(Y_k^N)_{k \leq N}$  eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Mittelwert  $\mu_N$  derart, dass  $(N\mu_N)_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu < \infty$ , und deren Varianz die Form  $\sigma^2/N + o(1/N)$  hat. Dann gilt

$$Z_N = \sum_{n=1}^N Y_n^N \xrightarrow{d} Z,$$

wobei die Zufallsvariable  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$  normalverteilt ist mit Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ .

Da  $Y_n^N$  die Werte  $\pm\sigma\sqrt{h}$  annimmt, ergibt sich für das zweite Moment  $\sigma^2 T/N$  und der Erwartungswert  $\mu_N$  ist gegeben durch

$$\mathbb{E}[Y_n^N] = \sigma\sqrt{h}q - \sigma\sqrt{h}(1-q) = (2q-1)\sigma\sqrt{h} = \frac{2q-1}{\sqrt{N}}\sigma\sqrt{T}.$$

Damit der zentrale Grenzwertsatz angewendet werden kann, muss also noch gezeigt werden, dass  $2q-1$  von der Ordnung  $1/\sqrt{N}$  ist. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned} 2q-1 &= 1 - 2(1-q) \\ &= 1 - 2 \frac{e^{+\sigma\sqrt{h}} - 1}{e^{+\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}} \end{aligned}$$

und Taylorreihenentwicklung dieser Funktion nach  $\sqrt{h}$  ergibt  $2q-1 = -\frac{1}{2}\sigma\sqrt{h} + O(h)$ , also  $2q-1 = -\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T/N} + O(1/N)$ . Somit folgt  $N\mu_N \rightarrow -\frac{1}{2}\sigma^2 T$  für  $N \rightarrow \infty$ . Aus der obigen Version des zentralen Grenzwertsatzes folgt also  $Z_N \xrightarrow{d} Z$  und da  $(S_0 e^{Z_N} - e^{-rT} K)^+$  gleichgradig integrierbar ist, konvergiert  $C_0^N$  somit gegen

$$\mathbb{E} \left[ \left( S_0 e^Z - e^{-rT} K \right)^+ \right],$$

wobei der Erwartungswert jetzt bezüglich der Verteilung von  $Z \sim N(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T)$  zu berechnen ist. Diesen Ausdruck können wir nun wie folgt berechnen:

Wir standardisieren  $Z$  und sehen, dass die Zufallsvariable  $X = (1/\sigma\sqrt{T})(Z + \frac{1}{2}\sigma^2 T) \sim N(0, 1)$ , bzw.  $Z = \sigma\sqrt{T}X - \frac{1}{2}\sigma^2 T$ , sodass sich der Grenzwert von  $C_0^N$

aus folgendem Integral ergibt:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( S_0 e^{-\sigma^2 T/2 + \sigma \sqrt{T} x} - e^{-rT} K \right)^+ \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
 &= S_0 \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\sigma^2 T/2} e^{\sigma \sqrt{T} x - \frac{1}{2}x^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} - K e^{-rT} (1 - \Phi(\gamma)) \\
 &= S_0 \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\frac{(x - \sigma \sqrt{T})^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} - K e^{-rT} (1 - \Phi(\gamma)) \\
 &= S_0 \left( 1 - \Phi(\gamma - \sigma \sqrt{T}) \right) - K e^{-rT} \left( 1 - \Phi(\gamma) \right),
 \end{aligned}$$

wobei  $\Phi(x)$  die Verteilungsfunktion der Normalverteilung bezeichnet und

$$\gamma = \frac{\log(K/S_0) + (\frac{1}{2}\sigma^2 - r)T}{\sigma \sqrt{T}}.$$

Diese Formel lässt sich nun noch umschreiben und wir erhalten:

**Satz 3: Formel von Black-Scholes**

Sei der Aktienkurs durch eine geometrische Brown'sche Bewegung (4.17) gegeben und  $\mu$ ,  $\sigma$  und  $r$  konstant. Unter den Annahmen von Seite 70 ist dann der Preis einer europäischen Call Option bei gegebenen Parametern  $K$ ,  $T$ ,  $r$ ,  $\sigma$ ,  $S_0$  gegeben durch

$$C_0 = S_0 \Phi(d_+) - e^{-rT} K \Phi(d_-) \quad (4.19)$$

mit

$$d_{\pm} = \frac{\log(S_0/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma \sqrt{T}},$$

wobei  $\Phi(x)$  die Verteilungsfunktion der Normalverteilung bezeichnet. ■

### 4.7.2 Diskussion

Indem wir in (4.19)  $T$  durch  $T - t$  und  $S_0$  durch  $S_t$  ersetzen, ergibt sich sofort der Wert  $C_t$  der Option zum Zeitpunkt  $t$ . Man kann die Option in diesem Fall auch als einen Vertrag betrachten, der zum Zeitpunkt  $t$  abgeschlossen wurde mit Laufzeit  $T - t$ :

$$C_t = S_t \Phi(d_{t+}) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_{t-}), \quad (4.20)$$

mit

$$d_{t\pm} = \frac{\log(S_t/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}.$$

Wenden wir die Call-Put-Parität auf (4.20) an, so ergibt sich der Preis einer europäischen Put-Option  $P_t$  mit den gleichen Parametern im Black-Scholes-Modell zu

$$P_t = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_{t-}) - S_t\Phi(d_{t+}).$$

Wir untersuchen nun das Verhalten des Preises  $C_t$  (analoge Überlegungen können für  $P_t$  erfolgen):

Für steigendes  $S_t$  wachsen  $d_{t\pm}$  in (4.20) unbeschränkt, sodass  $\Phi(d_{t\pm})$  gegen 1 und  $C_t$  somit gegen  $S_t - Ke^{-r(T-t)}$  strebt. Die Option bekommt also die Bedeutung eines Forward-Vertrages mit Ausübungspreis  $K$ , da es "sicher" ist, dass sie zum Zeitpunkt  $T$  ausgeübt wird. Wenn die Volatilität  $\sigma$  gegen 0 geht, wird  $d_{t\pm}$  ebenfalls unendlich groß; die dann risikolose Aktie verhält sich dann wie eine Anleihe (bzw. Geld in der Bank).

Für  $t \rightarrow T$  (d.h. die Laufzeit geht gegen 0) und  $S_t > K$  gilt  $d_{t\pm} \rightarrow +\infty$  und  $e^{-r(T-t)} \rightarrow 1$ , sodass  $C_t$  gegen  $S_t - K$  strebt. Im Fall  $S_t < K$  ist  $\log(S_t/K) < 0$ , sodass  $d_{t\pm} \rightarrow -\infty$  und  $C_t \rightarrow 0$ . Somit gilt, wie erwartet,  $C_t \rightarrow (S_T - K)^+$  für  $t \rightarrow T$ .

Aus (4.20) lässt sich eine natürliche Hedging-Strategie ableiten, da der Wert der Option zum Zeitpunkt  $t$  als Linearkombination von Aktieneinheiten  $S_t$  und Bodeinheiten  $B_t$  gegeben ist mit  $B_0 = 1$  und  $B_t = e^{rt}B_0 = e^{rt}$ . Es folgt also folgende Zusammensetzung für das (die Call-Option) replizierende Portfolio zum Zeitpunkt  $t$ :

**Satz 4: Hedging-Strategie für Black-Scholes**

Der Wert  $C_t$  der Option kann durch Handeln mit der Aktie risikolos erzeugt werden. Dazu muss das Portfolio zum Zeitpunkt  $t$   $\theta_t^0$  Bondanteile und  $\theta_t^1$  Aktienanteile beinhalten mit

$$\theta_t^0 = -Ke^{-rT}\Phi(d_{t-}), \quad \theta_t^1 = \Phi(d_{t+}).$$

**Bemerkung:** Der Optionspreis (4.19) hängt von der risikolosen Zinsrate  $r$  und der Volatilität  $\sigma$  der Aktie ab, nicht jedoch vom Drift  $\mu$  des Aktienpreises, der auch der unmittelbare erwartete Return der Aktie ist. In die Herleitung geht nur ein, dass dieser Wert konstant ist, die Größe von  $\mu$  ist jedoch für den Optionspreis irrelevant. Anders ausgedrückt: Zwei Investoren sind sich bezüglich des Optionspreises einig, obwohl sie sich uneinig bezüglich des erwarteten Returns der Aktie sein können!

**Übung 2:**

Berechne den Preis einer Call Option mit folgenden Daten: Der Zinssatz pro Jahr liegt bei 4%, die geschätzte Volatilität  $\sigma$  bezogen auf ein Jahr bei 0.18, der Preis der Aktie zum Zeitpunkt 0 bei 20 €. Die Option hat einen Ausübungspreis von 25 € in  $T = 2$  Jahren (s.a. Abb. 11). Überprüfe das Ergebnis mit MAPLE [12] und der dort eingebauten Formel

```
> with(finance);
> blackscholes(S,K,r,T,sigma);
```

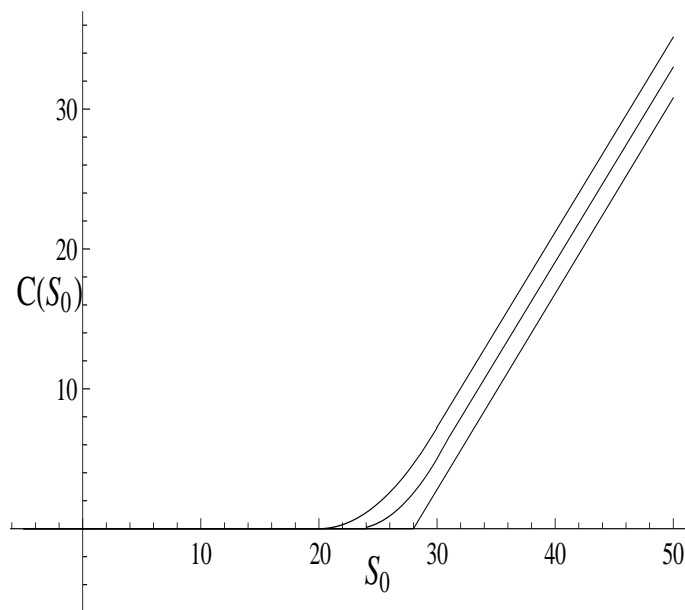


ABB. 11: WERT DER CALL OPTION IN ABHÄNGIGKEIT VON  $S_0$  FÜR  $T = 0, 1, 2$  (ÜBUNG 2)

## 4.8 Weitere Modelle

Es gibt eine Vielzahl von Verallgemeinerungen des Black-Scholes-Modells (z.B. Einbeziehung von Dividendenzahlungen, Verallgemeinerung auf mehrere Aktien, auf stochastische Zinsraten  $r(t)$ , stochastische Volatilität  $\sigma(t)$ , Modellierung von Wechselkursen, Einbeziehung von Transaktionskosten, usw.).

Im allgemeinen gibt es dann keine geschlossenen Formeln mehr.

Das Black-Scholes-Modell basiert auf der Annahme von normalverteilten Log>Returns. Reale Daten weisen jedoch vielfach ein anderes Verhalten auf. Die Entwicklung einer allgemeineren Optionspreistheorie "jenseits" von Black-Scholes

hat sich in den letzten Jahren rasant weiterentwickelt (beispielsweise mit hyperbolischen Verteilungen (vgl. EBERLEIN [7]) oder mit gebrochener Brown'scher Bewegung (vgl. MANDELBRÖT [16])). Allerdings wird die Situation wesentlich komplizierter, wenn man über das Black-Scholes-Modell hinausgeht, da man dann nicht mehr aus reinen No-Arbitrage-Argumenten eindeutige Preise und entsprechenden Handelsstrategien ableiten kann. Aus diesem Grund spielt für Praktiker das Black-Scholes-Modell nach wie vor eine grundlegende Rolle.

## 4.9 Marktgleichgewicht und Derivate

In Abschnitt 4.6 haben wir die Black-Scholes-Formel mit einem Hedging-Argument in stetiger Zeit hergeleitet. Dasselbe Ergebnis erhält man auch mit ökonomischen Argumenten bei der Betrachtung eines Marktgleichgewichts bei risikoaversen Investoren. Diesen Zugang wollen wir hier nachvollziehen:

### 4.9.1 Marktgleichgewicht

Wir definieren zuerst den Begriff eines Pareto-optimalen Risikoaustausches. Dazu betrachten wir  $n$  Firmen (bzw. Entscheidungsträger). Wir nehmen an, dass Firma  $i$  am Ende des Jahres ein Vermögen  $W_i$  besitzt und nach einer Nutzenfunktion  $u_i(w)$  handelt. Hier sind also  $W_1, \dots, W_n$  Zufallsvariablen mit bekannter gemeinsamer Verteilung. Sei  $W = W_1 + \dots + W_n$  das Gesamtvermögen der  $n$  Firmen. Ein Risikoaustausch ist eine Umverteilung des Gesamtvermögens. Bezeichnet  $X_i$  das Vermögen der Firma  $i$  nach dem Risikoaustausch, so muss gelten

$$X_1 + \dots + X_n = W,$$

da das Gesamtvermögen ja gleich bleiben muss. Der Wert des Risikoaustausches für Firma  $i$  wird gemessen durch

$$\mathbb{E}[u_i(X_i)].$$

**Definition 2** Ein Risikoaustausch  $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$  heißt Pareto-optimal, falls es nicht möglich ist, die Situation einer der Firmen zu verbessern, ohne dabei die Situation von mindestens einer anderen Firma zu verschlechtern. Es gibt also keinen Risikoaustausch  $(X_1, \dots, X_n)$  mit

$$\mathbb{E}[u_i(X_i)] \geq \mathbb{E}[u_i(\tilde{X}_i)] \quad \text{für } i = 1, \dots, n,$$

wobei mindestens eine dieser Ungleichungen strikt ist.

Wenn Firmen bereit sind, zu kooperieren, sollten sie also einen Pareto-optimalen Risikoaustausch wählen.

Die Pareto-optimalen Risikoaustausche bilden eine Familie mit  $n-1$  Parametern. Sie können auf folgende Weise bestimmt werden: Wähle  $k_1 > 0, \dots, k_n > 0$  und maximiere den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^n k_i \mathbb{E}[u_i(X_i)], \quad (4.21)$$

wobei das Maximum über alle Risikoaustausche  $(X_1, \dots, X_n)$  zu nehmen ist. Dieses Problem hat eine relativ explizite Lösung:

**Satz 5: (Borch)**

Ein Risikoaustausch  $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$  maximiert (4.21) genau dann wenn die Zufallsvariablen  $k_i u'_i(\tilde{X}_i)$  für  $i = 1, \dots, n$  ident sind.



**Beweis:** siehe Übungsaufgabe 23.

Auf diese Weise bekommt man für jede Wahl von  $k_1 > 0, \dots, k_n > 0$  ein Pareto-optimales Gleichgewicht. Umgekehrt erhält man bei risikoaversen Nutzenfunktionen auf diese Weise jedes mögliche Pareto-optimale Gleichgewicht (siehe [9]).

Betrachten wir nun einen Markt mit  $n$  Firmen (jeweils mit Nutzenfunktion  $u_i$ ). Aus obigem folgt, dass die Firmen sich einem Pareto-optimalen Risikoaustausch unterziehen sollten. Eine Möglichkeit eines solchen Pareto-optimalen Austausches basiert auf dem ökonomischen Gleichgewicht:

Nehmen wir an, dass auf dem Markt zufällige Zahlungen gehandelt werden. Der Preis  $H(Y)$  für eine solche Zahlung  $Y$  (die ja eine Zufallsvariable ist) wird berechnet durch

$$H(Y) = \mathbb{E}[\Psi Y]. \quad (4.22)$$

Hier ist  $\Psi$  eine positive Zufallsvariable. Wir wollen vorerst annehmen, dass  $H(Y)$  den Preis am Ende eines Jahres repräsentiert und die Zinsrate  $r = 0$  beträgt. Der Preis einer konstanten Zahlung muss demnach identisch dieser Konstante sein. Daraus folgt aber  $\mathbb{E}[\Psi] = 1$ . Der Preis kann dann in der Form

$$H(Y) = \mathbb{E}[Y] + \text{Cov}(Y, \Psi) \quad (4.23)$$

geschrieben werden; er ist also darstellbar als Erwartungswert der Zahlung plus einer Korrektur, die die Marktbedingungen widerspiegelt. Eine andere Interpretation ergibt sich aus

$$\mathbb{E}_Q[Y] = \mathbb{E}[\Psi Y] \quad \text{für alle } Y.$$

Demnach ist  $H(Y)$  der Erwartungswert von  $Y$  bezüglich einem neuen Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$ .  $\Psi$  ist also die Radon-Nikodym-Ableitung des  $Q$ -Maßes bezüglich

des ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaßes. Aus diesem Grund wird  $\Psi$  auch *Preisdichte* genannt.

Firma  $i$  wird also eine zufällige Zahlung  $Y_i$  kaufen wollen, um ihren erwarteten Nutzen zu maximieren:

$$\max \mathbb{E}[u_i(W_i + Y_i - H(Y_i))].$$

(Der Vermögensstand  $W_i$  der Firma  $i$  ist dabei selbst eine Zufallsvariable.)

**Satz 6:**

Eine Zahlung  $\tilde{Y}_i$  löst das Problem

$$\max \mathbb{E}[u_i(W_i + Y_i - H(Y_i))]$$

genau dann, wenn

$$u'_i(W_i + \tilde{Y}_i - H(\tilde{Y}_i)) = \Psi \mathbb{E}[u'_i(W_i + \tilde{Y}_i - H(\tilde{Y}_i))]. \quad (4.24)$$

**Beweis:** Siehe Übungsaufgabe 24.

Dieses optimale  $\tilde{Y}_i$  ist eindeutig bis auf eine Konstante, somit ist  $\tilde{Y}_i - H(\tilde{Y}_i)$  eindeutig. Dieser Ausdruck wird als Netto-Bedarf (engl. *net demand*) der Firma  $i$  bezeichnet und ist also eine optimale Zahlung mit Preis 0.

Für ein gegebenes  $\Psi$  definieren wir den Überschussbedarf (engl. *excess demand*)

$$\sum_{i=1}^n [\tilde{Y}_i - H(\tilde{Y}_i)]. \quad (4.25)$$

Die Firmen können ihren jeweils erwarteten Nutzen nur dann gleichzeitig maximieren, wenn dieser Ausdruck gleich Null ist (die sog. *market clearing condition*). Das führt zu folgender

**Definition 3** Eine Preisdichte  $\Psi$  und die Zahlungen  $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n$  bilden ein Gleichgewicht, wenn (4.25) verschwindet und wenn (4.24) für  $i = 1, \dots, n$  erfüllt ist.

Ein Gleichgewicht induziert also einen Risikoaustausch  $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$  mit

$$\tilde{X}_i = W_i + \tilde{Y}_i - H(\tilde{Y}_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Bedingung (4.24) besagt also, dass

$$u'_i(\tilde{X}_i) = \Psi \mathbb{E}[u'_i(\tilde{X}_i)] \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Nach Satz 5 ist ein Risikoaustausch, der durch ein Gleichgewicht impliziert wird, also Pareto-optimal (mit  $k_i = 1/\mathbb{E}[u'_i(\tilde{X}_i)]$ ).

Die Umkehrung gilt in folgendem Sinne: Sei  $(W_1, \dots, W_n)$  bereits Pareto-optimal. Dann bilden  $W_1, \dots, W_n$  und  $\Psi$  ein Marktgleichgewicht, wenn wir

$$\Psi = \frac{u'_i(W_i)}{\mathbb{E}[u'_i(W_i)]}$$

setzen. Darüberhinaus gilt dann wegen (4.24)

$$\tilde{Y}_i - H(\tilde{Y}_i) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

**Beispiel 3:** Falls alle  $n$  Firmen exponentielle Nutzenfunktionen benutzen, erhalten wir aus (4.24)

$$\tilde{Y}_i = -W_i - \frac{1}{a_i} \ln \Psi + \kappa_i,$$

wobei  $\kappa_i$  eine Konstante ist. Der Nettobedarf der Firma  $i$  ist somit

$$\tilde{Y}_i - H(\tilde{Y}_i) = -W_i - \frac{1}{a_i} \ln \Psi + \mathbb{E}[\Psi W_i] + \frac{1}{a_i} \mathbb{E}[\Psi \ln \Psi].$$

Im Gleichgewichtszustand muss die Summe über  $i$  verschwinden, also

$$0 = -W - \frac{1}{a} \ln \Psi + \kappa,$$

wobei  $\kappa$  wieder eine Konstante ist. Wegen  $\mathbb{E}[\Psi] = 1$  folgt daraus

$$\Psi = \frac{e^{-aW}}{\mathbb{E}[e^{-aW}]} \quad (4.26)$$

## 4.9.2 Preisbestimmung von Derivaten

In einem Gleichgewicht ist der Preis einer Zahlung  $Y$  also durch  $H(Y)$  mit (4.22) gegeben, wobei  $\Psi$  die Gleichgewichts-Preisdichte bezeichnet. Die Zufallsvariable  $Y$  ist typischerweise der Wert eines Assets oder eines Derivats am Ende einer Periode. Unter bestimmten Bedingungen kann der Preis eines Derivats durch den Preis des zugrundeliegenden Assets ausgedrückt werden:

Dafür nehmen wir an, dass die Zufallsvariable  $\Psi$  Lognormal-verteilt ist, d.h.

$$\Psi = e^Z,$$

wobei  $Z$  eine Normalverteilung hat, deren Varianz wir mit  $\nu^2$  bezeichnen. Wegen

$$1 = \mathbb{E}[\Psi] = \exp\left(\mathbb{E}[Z] + \frac{1}{2}\nu^2\right)$$



folgt  $\mathbb{E}[Z] = -\frac{1}{2}\nu^2$ .

Aus (4.26) sieht man, dass die Annahme eines lognormalverteilten  $\Psi$  im Falle exponentieller Nutzenfunktionen der Annahme eines normalverteilten Gesamtvermögen  $W$  entspricht.

Wie in Abschnitt 4.6 modellieren wir den Wert eines Assets  $S$  (also z.B. einer Aktie) am Ende der Periode durch eine lognormalverteilte Zufallsvariable:

$$S = S_0 e^R,$$

wobei  $S_0$  der beobachtete Preis des Assets zu Beginn der Periode ist und  $R \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Weiters nehmen wir an, dass die gemeinsame Verteilung von  $(Z, R)$  bivariat normal ist mit Korrelationskoeffizient  $\rho$ . Dann folgt für die MGF von  $R$  bezüglich des  $Q$ -Maßes:

$$\mathbb{E}_Q[e^{tR}] = \mathbb{E}[\Psi e^{tR}] = \mathbb{E}[e^{Z+tR}] = \exp\left(t(\mu + \rho\nu\sigma) + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right). \quad (4.27)$$

Die Verteilung von  $R$  bezüglich  $Q$  ist immer noch normal, mit Varianz  $\sigma^2$  und neuem Erwartungswert

$$\mu_Q = \mu + \rho\nu\sigma.$$

Für  $\mu_Q$  lässt sich nun ein praktischerer Ausdruck finden: Wenn wir eine risikolose Zinsrate  $r \geq 0$  voraussetzen, so gilt (da  $S_0$  ja der Preis des Assets zu Beginn der Periode ist)

$$S_0 = e^{-r} H(S) = e^{-r} \mathbb{E}_Q[S] \quad (4.28)$$

und es folgt

$$S_0 = e^{-r} S_0 \mathbb{E}_Q[e^R] = e^{-r} S_0 \exp\left(\mu_Q + \frac{1}{2}\sigma^2\right),$$

$$\text{bzw. } \mu_Q = r - \frac{\sigma^2}{2}. \quad (4.29)$$

Für den Preis eines Derivats, dessen Wert am Ende der Periode durch eine Funktion  $f(S)$  gegeben ist, folgt dann

$$V_0 = e^{-r} H(f(S)) = e^{-r} \mathbb{E}_Q[f(S_0 e^R)],$$

wobei  $R$  normalverteilt ist mit Erwartungswert (4.29) und Varianz  $\sigma^2$ .

Für Periodenlänge  $T$  gilt alles analog, indem wir jetzt  $\mu$  durch  $\mu T$ ,  $\sigma^2$  durch  $\sigma^2 T$  und  $r$  durch  $rT$  ersetzen. Für eine europäische Call-Option mit  $f(S) = (S_T - K)^+$  ergibt sich daraus wieder die Black-Scholes-Formel (4.19).

Mit dieser Methode kann man auch Preise von Derivaten in allgemeineren Situationen bestimmen, beispielsweise falls die Derivate von mehreren Assets abhängen oder falls  $S$  eine lineare Funktion von  $W$  ist:



**Beispiel 4:** In der Situation von Beispiel 3 nehme man  $S = qW$  an. Dann gilt

$$\mathbb{E}_Q[S] = \frac{\mathbb{E}[Se^{-aW}]}{\mathbb{E}[e^{-aW}]} = \frac{\mathbb{E}[Se^{-\alpha S}]}{\mathbb{E}[e^{-\alpha S}]} \quad (4.30)$$

mit  $\alpha = a/q$ . Nach (4.28) ist  $\alpha$  durch die Bedingung

$$\frac{\mathbb{E}[Se^{-\alpha S}]}{\mathbb{E}[e^{-\alpha S}]} = e^r S_0 \quad (4.31)$$

bestimmt. Der Preis eines Derivats mit Payoff  $f(S)$  ergibt sich demnach zu

$$V_0 = e^{-r} \mathbb{E}_Q[f(S)] = e^{-r} \frac{\mathbb{E}[f(S)e^{-\alpha S}]}{\mathbb{E}[e^{-\alpha S}]} \quad (4.32)$$

Dies ist die sog. *Esscher-Methode* nach BÜHLMANN.

Mit (4.31) ergibt sich aus (4.32) weiters

$$V_0 = S_0 \frac{\mathbb{E}[f(S)e^{-\alpha S}]}{\mathbb{E}[Se^{-\alpha S}]} \quad (4.33)$$

## 4.10 Literatur

- J. HULL: “*Options, Futures and other Derivatives*” [14]
- R. ELLIOT UND P. KOPP: “*Mathematics of Financial Markets*” [8]
- M. BAXTER UND A. RENNIE: “*Financial Calculus*” [2]
- D. DUFFIE: “*Dynamic Asset Pricing Theory*” [6].
- H. GERBER UND G. PAFUMI: “*Utility Functions: From risk theory to finance*” [10]

## 4.11 Übungsaufgaben

1. (a) Was ist der Unterschied zwischen dem Einnehmen einer long position in einem Forward-Vertrag mit Forward-Preis 50 € und dem Einnehmen einer long position in einer Call-Option mit Ausübungspreis 50 € ?
- (b) Ein Spekulant würde gern vom (subjektiv erwarteten) Anstieg einer bestimmten Aktie profitieren. Der derzeitige Aktienkurs beträgt 29 € und eine europäische Call-Option (T=3 Monate, K=30 €) kostet 2.90 €. Dem

- Spekulanten stehen 5800 € zum Investieren zur Verfügung. Man identifiziere zwei alternative Strategien - eine mit Investition in die Aktie, die andere mit Investition in die Option. Was sind jeweils die potenziellen Gewinne bzw. Verluste?
2. (a) Eine Firma weiß, dass sie in 4 Monaten eine gewisse Geldmenge in einer ausländischen Währung erhalten wird. Mit welchem (i) Forward-Vertrag bzw. (ii) Optionsvertrag kann man diese Transaktion hedgen? Was ist der Unterschied zwischen (i) und (ii)?
 

(b) Der Goldpreis sei derzeit 500 € pro Unze und der Forward-Preis für Goldkauf in einem Jahr sei 700 € pro Unze. Wie kann man damit risikolosen Profit (Arbitrage) machen, wenn man Geld mit einer Verzinsung von 10%p.a. borgen kann? (Man nehme an, dass das Lagern von Gold nichts kostet.)
  3. (a) Beschreibe den Payoff des folgenden Portfolios: eine long position in einem Forward-Vertrag auf ein Asset und eine long position in einer europäischen Put-Option mit jeweils gleicher Fälligkeit  $T$ ; der Ausübungspreis  $K$  der Option sei gleich dem Forward-Preis des Assets zum Zeitpunkt 0.
 

(b) Überprüfe die Richtigkeit folgender Aussage:  
 “Eine long position in einem Forward-Vertrag ist äquivalent mit einer long position in einer europäischen Call-Option und einer short position in einer europäischen Put-Option.”
  4. Man löse die Übungsaufgabe von Seite 59.
  5. Man beweise (4.5),(4.6),(4.7) und (4.8) aus Abschnitt 4.3.2.
  6. (a) Bestimme eine untere Schranke für eine Call-Option auf eine Aktie, die keine Dividenden zahlt, mit  $T = 4$  Monaten und  $K = 25$  €, wenn die risikolose Zinsrate 8% p.a. und  $S_0 = 28$  € beträgt.
 

(b) Der Preis einer amerikanischen Call-Option auf eine Aktie, die keine Dividenden zahlt, sei 4 €. Dabei sei der Aktienpreis  $S_0 = 31$  €,  $K = 30$  €, die risikolose Zinsrate gleich 8% p.a. und  $T = 3$  Monate. Man bestimme obere und untere Schranken für den Preis eines amerikanischen Puts mit den gleichen Parametern.
  7. Seien  $C_1, C_2$  und  $C_3$  die Preise von europäischen Call-Optionen mit Ausübungspreisen  $K_1, K_2$  bzw.  $K_3$ , wobei  $K_3 > K_2 > K_1$  und  $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$ . Man zeige
 
$$C_2 \leq 0.5(C_1 + C_3),$$
 falls alle Optionen den gleichen Ausübungszeitpunkt  $T$  besitzen.
  8. Der Preis einer europäischen Call-Option mit  $T = 6$  Monaten und  $K = 30$  € sei 2 € und es gelte  $S_0 = 29$  € sowie eine risikolose Zinsrate von 8%

- p.a. Wieviel kostet eine europäische Put-Option mit  $T = 6$  Monaten und  $K = 30 \text{ €}$ , wenn eine Dividende von  $0.5 \text{ €}$  in 2 und in 5 Monaten erwartet wird?
9. Drei europäische Put-Optionen auf eine Aktie haben gleiches Ausübungsdatum  $T$  und Ausübungspreise  $55 \text{ €}$ ,  $60 \text{ €}$  bzw.  $65 \text{ €}$ . Ihr Preis am Markt ist  $3 \text{ €}$ ,  $5 \text{ €}$  bzw.  $8 \text{ €}$ . Wie kann man aus diesen einen Butterfly-Spread erzeugen? Man gebe eine Tabelle mit dem Gewinnverlauf bei solch einer Handelsstrategie. In welchem Bereich muss  $S_T$  liegen, damit der Butterfly-Spread zum Verlust führt?
  10. (a) Man zeige mittels Put-Call-Parität, dass die Kosten für das Erstellen eines Butterfly-Spreads mit europäischen Puts und eines solchen mit europäischen Calls gleich groß sind!  
 (b) Wie kann ein Forward-Vertrag auf eine Aktie mit vereinbartem Preis und Verkaufsdatum durch Optionen repliziert werden?
  11. Betrachte folgendes Modell mit  $\mathbb{T} = \{0, 1\}$  und 2 Zuständen am Ende der Periode: Zur Zeit  $T = 0$  sei der Preis von Weizen mit  $70 \text{ €}$  gegeben und es sei bekannt, dass der Wert bis zur Zeit  $T = 1$  auf  $120 \text{ €}$  oder auf  $80 \text{ €}$  steigt. Der effektive Zinssatz für ein Barkonto innerhalb der Periode sei  $r > 0$ . Berechne den Wert  $V_0$  einer europäischen Call Option zum Zeitpunkt  $T = 0$  mit Ausübungspreis  $K = 100 \text{ €}$  auf 3 verschiedene Arten:
    - a) durch Konstruktion einer Hedging-Strategie.
    - b) durch Konstruktion eines risikoneutralen Maßes.
    - c) durch Berechnung der Zustandspreise.
  12. Berechne den Preis  $V_0$  einer europäischen Call-Option im CRR-Modell (siehe Abschnitt 4.5.2) mit  $T = 3$ ,  $r = 0$ ,  $K = 110 \text{ €}$  und  $S_0 = 100 \text{ €}$  unter der Annahme, dass der Aktienpreis an jedem Handelstag um  $20\%$  steigt oder fällt. Berechne weiters die Hedging-Strategie. Wie kann man einen risikolosen Profit von  $1.000.000 \text{ €}$  erzielen, wenn die Option zu einem Preis von  $V_0 + 5 \text{ €}$  gehandelt wird?
  13. Der derzeitige Preis einer Aktie sei  $100 \text{ €}$ . Für jeden der beiden folgenden halbjährigen Perioden sei angenommen, dass der Aktienpreis um  $10\%$  steigt oder um  $10\%$  fällt. Die risikolose Zinsrate sei  $8\%$  p.a. (stetige Verzinsung).
    - a) Was ist der (heutige) Wert einer europäischen Call-Option mit  $T = 1$  Jahr und  $K = 100$ ?
    - b) Was ist der (heutige) Wert einer europäischen Put-Option mit  $T = 1$  Jahr und  $K = 100$ ?
    - c) Man überprüfe die Gültigkeit der Call-Put-Parität.

14. Der derzeitige Preis einer Aktie sei 50 € und es sei bekannt, dass er in 2 Monaten entweder 53 € oder 48 € sein wird. Die risikolose Zinsrate sei 10% p.a. (stetige Verzinsung). Man verwende No-Arbitrage-Argumente, um den Preis einer europäischen Call-Option mit  $T = 2$  Monaten und  $K = 49$  zu bestimmen. Was ist der faire Preis für eine europäische Put-Option mit den gleichen Parametern?
15. Der derzeitige Preis einer Aktie sei 50 € und es sei bekannt, dass er in 6 Monaten entweder 60 € oder 42 € sein wird. Die risikolose Zinsrate sei 12% p.a. (stetige Verzinsung). Man berechne den Preis einer europäischen Call-Option mit  $T = 6$  Monaten und  $K = 48$  zu bestimmen und verifiziere, dass No-Arbitrage-Argumente und die Berechnung mittels eines risikoneutralen Maßes die gleichen Antworten liefern.
16. Der derzeitige Preis einer Aktie sei 40 € und es sei bekannt, dass er in 3 Monaten entweder 45 € oder 35 € sein wird. Der risikolose Zinssatz sei 8% p.a. (vierteljährliche Verzinsung). Man berechne den Preis einer europäischen Call-Option mit  $T = 3$  Monaten und  $K = 40$  und verifiziere, dass No-Arbitrage-Argumente und die Berechnung mittels eines risikoneutralen Maßes die gleichen Antworten liefern.
17. Der derzeitige Preis einer Aktie sei 40 €. Für jede der beiden folgenden 3-Monats-Perioden sei angenommen, dass der Aktienpreis um 10% steigt oder um 10% fällt. Die risikolose Zinsrate sei 12% p.a. (stetige Verzinsung).
  - a) Was ist der Preis einer europäischen Call-Option mit  $T = 6$  Monaten und  $K = 42$ ?
  - b) Was ist der Preis einer amerikanischen Put-Option mit  $T = 6$  Monaten und  $K = 42$ ?
18. Der derzeitige Preis  $S_0$  einer Aktie sei 25 € und es sei bekannt, dass er in  $T = 2$  Monaten entweder  $S_T = 23$  € oder  $S_T = 27$  € sein wird. Die risikolose Zinsrate sei 10% p.a. (stetige Verzinsung). Was ist der faire Preis eines Derivats, das zum Zeitpunkt  $T$  einen Payoff von  $S_T^2$  liefert?
19. Man löse die Übungsaufgabe (2) von Seite 75.
20. Der Aktienpreis sei durch eine geometrische Brown'sche Bewegung mit Volatilität  $\sigma = 0.30$  modelliert und der derzeitige Preis sei  $S_0 = 50$  €. Man berechne den Preis einer europäischen Put-Option ( $T = 3$  Monate,  $K = 50$  €), wenn die risikolose Zinsrate 10% p.a. beträgt (stetige Verzinsung)! Wie kann man daraus den Preis einer europäischen Call-Option berechnen?
21. Der Aktienpreis sei durch eine geometrische Brown'sche Bewegung mit einer Volatilität von 30% pro Jahr modelliert und der derzeitige Preis sei  $S_0 =$

69 € . Man berechne den Preis einer europäischen Put-Option ( $T = 3$  Monate,  $K = 70$  € ), wenn die risikolose Zinsrate 5% p.a. ist (stetige Verzinsung)!

22. Der Aktienpreis sei durch eine geometrische Brown'sche Bewegung mit Volatilität  $\sigma = 0.35$  und einem erwarteten jährlichen Return von 16% modelliert und der derzeitige Preis sei  $S_0 = 69$  € .  
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine

(a) europäische Call-Option

(b) europäische Put-Option

auf die Aktie mit  $K = 40$  € und  $T = 6$  Monaten ausgeübt werden wird?  
Man berechne weiters die Preise der beiden Optionen, wenn der risikolose Zinssatz 5% p.a. beträgt!

23. Man beweise Satz 5 von Seite 78.

24. Man beweise Satz 6 von Seite 79.

# Kapitel 5

## Simulationstechniken

In diesem Kapitel wollen wir einige Simulationstechniken, die in der Versicherungs- und Finanzmathematik verwendet werden, behandeln.

### 5.1 Die Monte Carlo Methode

#### 5.1.1 Allgemeines

Sei  $Z$  eine Zufallsvariable, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mu)$ , und nehmen wir an, wir wollen

$$z = \mathbb{E}[Z] = \int_{\Omega} Z d\mu \quad (5.1)$$

in einer Situation berechnen, in der  $z$  nicht analytisch bestimmbar ist, aber  $Z$  simuliert werden kann. Für gegebene  $(\Omega, \mu)$  und  $Z$  reduziert sich dieses Problem auf die Berechnung von

$$I(f) = \int_{I^s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (5.2)$$

wobei  $f$  eine Funktion auf dem  $s$ -dimensionalen Einheitsintervall  $I^s = [0, 1]^s$  ist. Es handelt sich also um das Problem einer numerischen Integration.

Die grundlegende Idee der Monte Carlo (MC) Methode besteht nun darin,  $N$  zufällige unabhängige Integrationspunkte  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  in  $I^s$  zu wählen (gemäß der Gleichverteilung in  $[0, 1]^s$ ) und (5.2) durch das arithmetische Mittel

$$I_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\mathbf{x}_n) \quad (5.3)$$

zu approximieren. Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt  $I_N(f) \rightarrow I(f)$  für  $N \rightarrow \infty$  mit Wahrscheinlichkeit 1.

Nach dem zentralen Grenzwertsatz kann der Fehler der Approximation

$$I_N - I = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\mathbf{x}_n) - \mathbb{E}[f]$$

näherungsweise durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz  $\sigma^2/N$  beschrieben werden, wobei  $\sigma^2 = \int_{I^s} (f(\mathbf{x}) - I)^2 d\mathbf{x}$ . Dementsprechend liefern Monte Carlo Schätzer eine probabilistische Fehlerschranke  $O(N^{-1/2})$ . Man beachte, dass diese Schranke (im Gegensatz zu klassischen numerischen Integrationsmethoden) nicht von der Dimension  $s$  abhängt!

In praktischen Implementationen werden die Zufallsvektoren  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  durch einen deterministischen Algorithmus generiert, von dem man hofft, dass er die Gleichverteilung möglichst gut "imitiert". Diese Imitationen werden Pseudo-Zufallszahlen genannt und ihre Güte kann durch statistische Tests untersucht werden.

### 5.1.2 Anwendungen in der Risikotheorie

In der Risikotheorie kann man mit der Monte Carlo Methode beispielsweise Ruinwahrscheinlichkeiten mit endlichem Zeithorizont  $z = \psi(u, T)$  simulieren, indem man den Risikoprozess  $\{R_t\}$  bis zur Zeit  $T$  (bzw.  $\min(T, \tau(u))$ ) simuliert und  $Z$  als den Indikator wählt, dass Ruin aufgetreten ist:

$$Z = I\left(\inf_{0 \leq t \leq T} R_t < 0\right) = I(\tau(u) \leq T).$$

Es werden als  $N$  unabhängige Stichproben  $Z_1, \dots, Z_N$  simuliert und  $z = \psi(u, T)$  wird durch den empirischen Mittelwert

$$\bar{z} = \frac{Z_1 + \dots + Z_N}{N}$$

geschätzt. Die Varianz von  $Z$  wird dann durch die empirische Varianz

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Z_i - \bar{z})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i^2 - \bar{z}^2$$

geschätzt und nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt  $\sqrt{N}(z - \bar{z}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_Z^2)$ , wobei  $\sigma_Z^2 = \text{Var}(Z)$ . Somit ist

$$\bar{z} \pm \frac{1.96s}{\sqrt{N}}$$

ein asymptotisches 95%-Konfidenzintervall für  $z$  und in dieser Form wird ein Simulationsresultat typischerweise angegeben.



Die hier dargestellte einfachste Form der MC-Simulation wird auch *Crude Monte Carlo* (CMC) Methode genannt, da sie auf vielfache Weise verbessert werden kann:

### 5.1.2.1 Varianzreduktionstechniken

Um die Varianz des CMC-Schätzers  $Z$  von  $z$  zu reduzieren, versucht man beispielsweise eine andere Zufallsvariable  $Z'$  zu finden, sodass  $\mathbb{E}[Z'] = \mathbb{E}[Z] = z$ , jedoch (hoffentlich)  $\text{Var}(Z') < \text{Var}(Z)$ . Dies ist ein klassisches Problem in der Simulationstechnik und im allgemeinen ist es sehr aufwendig. Es muss also  $\text{Var}(Z')$  schon bedeutend kleiner sein als  $\text{Var}(Z)$ , damit sich Varianzreduktionsmethoden lohnen (falls beispielsweise  $\text{Var}(Z') = \text{Var}(Z)/2$  gilt, dann kann man durch Verdoppeln der Simulationsläufe  $N$  auf  $2N$  mit der CMC-Methode die gleiche Genauigkeit erreichen wie für  $N$ -malige Simulation von  $Z'$  und in den meisten Fällen ist solch eine geringe Erhöhung der Simulationsläufe unproblematisch).

Wir werden nun zwei Methoden untersuchen, die zum Studium von Ruinwahrscheinlichkeiten geeignet sind:

**Bedingtes Monte Carlo:** Sei  $Z$  ein CMC-Schätzer und  $Y$  eine andere Zufallsvariable, die zur gleichen Zeit wie  $Z$  erzeugt wird. Dann gilt für  $Z' = \mathbb{E}[Z|Y]$ , dass  $\mathbb{E}[Z'] = \mathbb{E}[Z] = z$ , also kommt  $Z'$  für einen Monte Carlo Schätzer von  $z$  in Frage. Wegen

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(\mathbb{E}[Z|Y]) + \mathbb{E}[\text{Var}(Z|Y)]$$

folgt

$$\text{Var}[Z'] \leq \text{Var}[Z],$$

sodass die bedingte Monte Carlo Methode immer zu einer Varianzreduktion führt.

**Importance Sampling:** Hier ist die Idee,  $z = \mathbb{E}[Z]$  durch Simulation bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes  $Q$  zu bestimmen, wobei  $Q$  ein zum ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  äquivalentes Maß ist (d.h. die jeweiligen Nullmengen sind identisch). Dann existiert eine Zufallsvariable  $L$ , sodass

$$z = \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}_Q[LZ].$$

$L = \frac{dP}{dQ}$  ist die Radon-Nikodym-Dichte von  $Q$  bzgl.  $P$  und wird als *likelihood ratio* bezeichnet.

Man generiert nun mit der CMC-Methode  $(Z_1, L_1), \dots, (Z_N, L_N)$  von  $Q$  und verwendet den Schätzer

$$\bar{z}_{IS} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_i Z_i$$

sowie das Konfidenzintervall

$$\bar{z}_{IS} \pm \frac{1.96s_{IS}}{\sqrt{N}},$$

wobei

$$s_{IS}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (L_i Z_i - \bar{z}_{IS})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_i^2 Z_i^2 - \bar{z}_{IS}^2.$$

Dabei hängt es von der Wahl von  $Q$  ab, ob Varianzreduktion erreicht wird oder nicht. Das Problem ist also, ein effizientes  $Q$  zu finden:

Es gibt ein optimales  $Q$ , definiert durch  $\frac{dQ}{dP} = Z/\mathbb{E}[Z] = Z/z$ , d.h.  $L = z/Z$  (das Ereignis  $\{Z=0\}$  ist irrelevant wegen  $Q(Z=0)=0$ ). Dann gilt nämlich

$$\text{Var}_Q(LZ) = \mathbb{E}_Q(LZ)^2 - (\mathbb{E}_Q(LZ))^2 = \mathbb{E}_Q\left[\frac{z^2}{Z^2}Z^2\right] - \mathbb{E}_Q\left[\frac{z}{Z}Z\right]^2 = z^2 - z^2 = 0.$$

Es scheint also, als hätten wir einen Schätzer mit Varianz 0 erzeugt. Jedoch ist  $z$  nicht analytisch verfügbar (wir wollen es ja simulieren!), also können wir  $L = Z/z$  nicht berechnen (außerdem kann es oft unmöglich sein,  $Q$  in einer Form auszudrücken, die es ermöglicht, von  $Q$  zu simulieren).

Jedoch bekommt man durch obiges Ergebnis eine Suchhilfe für  $Q$ : Versuche  $Q$  so zu wählen, dass  $\frac{dQ}{dP}$  "möglichst proportional" zu  $Z$  ist. Dies wird i.a. schwierig sein, jedoch kann man beispielsweise versuchen,  $Q$  so zu wählen, dass größere Werte von  $Z$  wahrscheinlicher werden.

### 5.1.2.2 Simulation seltener Ereignisse

Oft sind Schätzungen von kleinen Werten  $z = \mathbb{P}(A)$  gesucht (z.B. von der Ordnung  $10^{-3}$  oder kleiner); d.h.  $Z = I(A)$  und  $A$  ist ein *seltene Ereignis*. Ein Beispiel sind Ruinwahrscheinlichkeiten ( $A = \{\tau(u) \leq T\}$  oder  $A = \{\tau(u) < \infty\}$ ), die typischerweise, vor allem für große  $u$ , recht klein sind.

Die CMC-Methode führt auf eine Varianz von  $\sigma_Z^2 = z(1-z)$ , was gegen 0 strebt für  $z \rightarrow 0$ . Jedoch ist die relative Genauigkeit schlecht:

$$\frac{\sigma_Z}{z} = \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z} \sim \frac{1}{\sqrt{z}} \rightarrow \infty.$$

Anders ausgedrückt: ein Konfidenzintervall der Breite  $10^{-4}$  mag klein aussehen, wenn jedoch der Schätzer  $\bar{z}$  selbst von der Größenordnung  $10^{-5}$  ist, ist dieses Konfidenzintervall wertlos. Dies lässt sich auch an der Stichprobengröße  $N$  illustrieren, die benötigt wird, um eine vorgegebene relative Breite (z.B. 10%) des Konfidenzintervalls zu erreichen: Aus  $1.96\sigma_Z/(z\sqrt{N}) = 0.1$  folgt

$$N = \frac{100 \cdot 1.96^2 z(1-z)}{z^2} \sim \frac{100 \cdot 1.96^2}{z}.$$

Für kleines  $z$  muss also  $N$  sehr groß sein.

Eine Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, ist Importance-Sampling.

### 5.1.3 Quasi-Monte Carlo Methoden

Quasi-Monte Carlo Methoden werden oft als deterministische Versionen von MC-Methoden bezeichnet. Anstatt von zufällig verteilten Punkten in  $[0, 1]^s$  werden zur Berechnung von (5.2) deterministische Punktfolgen verwendet, von denen man weiß, dass sie “gut” gleichverteilt sind. Ein Maß dafür, wie gut eine Folge von Punkten  $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^N$  in  $I^s$  verteilt ist, ist die sogenannte *Stern-Diskrepanz*

$$D_N^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \sup_{\alpha \in [0, 1]^s} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1_{[0, \alpha)}(\mathbf{x}_n) - \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_s \right|.$$

Hierbei ist  $[0, \alpha) = [0, \alpha_1) \times \dots \times [0, \alpha_s)$  und  $1_A$  ist die charakteristische Funktion der Menge  $A$ . Eine Folge  $\omega = \{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty$  heißt *gleichverteilt*, wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N^*(\omega) = 0.$$

In der Theorie der Gleichverteilung wird bewiesen, dass für den Schätzer (5.3) mit einer gleichverteilten Folge  $\omega = \{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty$  gilt, dass  $I_N \rightarrow I$  für  $N \rightarrow \infty$ . Eine obere Schranke für die Approximation mit  $N$  Punkten wird durch die berühmte Koksma-Hlawka-Ungleichung gegeben:

$$\left| I - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\mathbf{x}_n) \right| \leq V(f) D_N^*(\omega), \quad (5.4)$$

wobei  $V(f)$  die Variation der Funktion angibt, die als endlich vorausgesetzt wird. Je kleiner die Diskrepanz der Folge ist, desto kleiner ist also der Approximationsfehler.

Die Sterndiskrepanz der besten gleichverteilten Folgen hat asymptotische Ordnung  $O((\log N)^s/N)$ . Solche Folgen werden als *Folgen kleiner Diskrepanz* bezeichnet. Wegen (5.4) gilt also bei Verwendung solcher Folgen für den Approximationsfehler  $O((\log N)^s/N)$ . Im Gegensatz zur MC-Methode ist diese Fehlerschranke zwar von  $s$  abhängig, aber sie ist deterministisch!

#### 5.1.3.1 Folgen kleiner Diskrepanz

Einfache Beispiele von Folgen kleiner Diskrepanz sind z.B.

##### Van der Corput- und Halton-Folgen:

Man wählt eine ganze Zahl  $b \geq 2$ . Das  $n$ -te Folgenglied  $x_n$  der *Van der Corput-Folge zur Basis  $b$*  ergibt sich dann aus der eindeutigen Ziffernentwicklung  $n = \sum_{j=0}^\infty a_j(n)b^j$  (wobei  $a_j(n) \in \{0, \dots, b-1\}$ ), indem wir diese Ziffern am Dezimalpunkt spiegeln, d.h. wir erhalten

$$\phi_b(n) = \sum_{j=0}^\infty a_j(n)b^{-j-1}.$$

Nun wählen wir  $x_n = \phi_b(n)$  für alle  $n \geq 0$ .

Diese Konstruktion kann man nun leicht auf  $s > 1$  Dimensionen erweitern, indem man  $s$  ganze Zahlen  $b_1, \dots, b_s \geq 2$  wählt, die relativ prim sind. Dann erhält man die *Halton-Folge in den Basen*  $b_1, \dots, b_s$  durch

$$\mathbf{x}_n = (\phi_{b_1}(n), \dots, \phi_{b_s}(n)) \in I^s \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Die sog. **netzartigen Folgen** haben noch kleinere Diskrepanz. Dabei ist ein  $(t, m, s)$ -Netz zur Basis  $b$  definiert als Punktmenge  $P$  von  $N = b^m$  Punkten in  $[0, 1]^s$ , sodass in jedem Elementarintervall vom Typ

$$E = \prod_{i=1}^s [a_i b^{-d_i}, (a_i + 1) b^{-d_i}), \quad a_i, d_i \in \mathbb{Z}, d_i \geq 0, 0 \leq a_i < b^{d_i}, 1 \leq i \leq s,$$

für das  $\text{vol}(E) = b^{t-m}$  gilt, genau  $b^t$  Punkte von  $P$  liegen. Dementsprechend heißt eine Folge  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$  von Punkten in  $I^s$  eine  $(t, s)$ -Folge in Basis  $b$ , wenn für alle  $k \geq 0$  und  $m > t$  die Punktmenge  $P_{k,m} = \{\mathbf{x}_n : kb^m \leq n < (k+1)b^m\}$  ein  $(t, m, s)$ -Netz ist.

Beispielsweise ist die van der Corput-Folge in Basis  $b$  eine  $(0, 1)$ -Folge in Basis  $b$ .  $(t, s)$ -Folgen in Basis 2 nennt man **Sobol-Folgen**. Sie werden häufig bei der Lösung von finanzmathematischen Problemen eingesetzt (siehe Abschnitt 5.1.5).

Abbildungen 12-14 geben einen visuellen Vergleich der Verteilung der ersten 1000 Punkte einer zweidimensionalen Folge mit Pseudo-Zufallszahlen, einer Haltonfolge (mit Basen 2 und 3) sowie einer Sobolfolge.

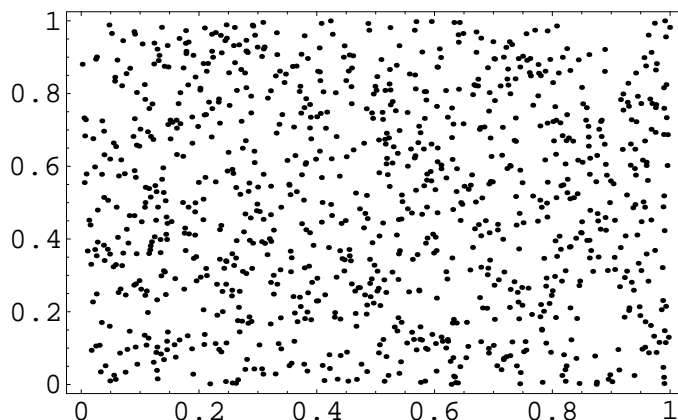
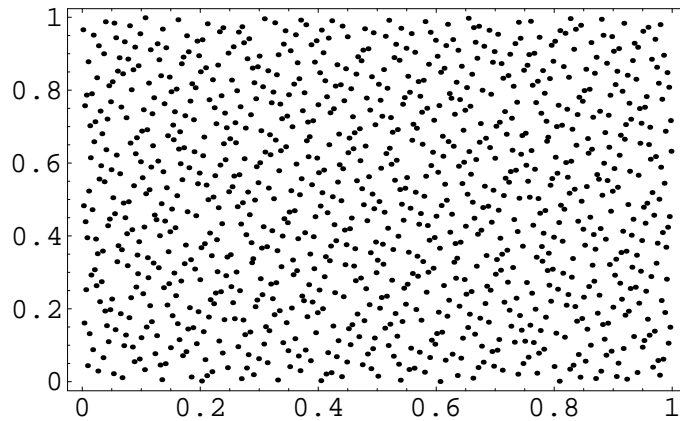
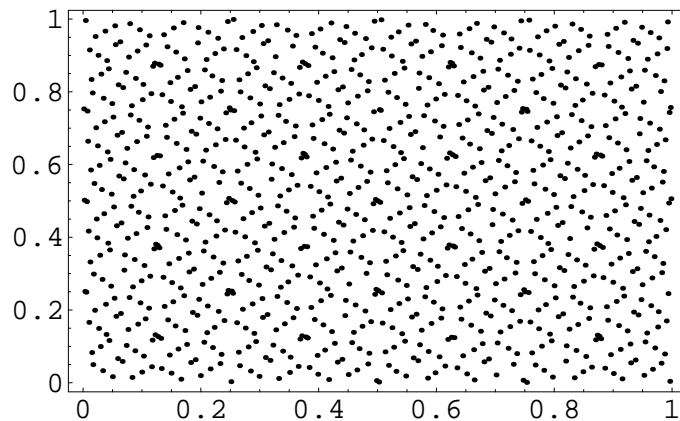


ABB. 12: PSEUDOZUFALLSZAHLENFOLGE IN  $[0, 1]^2$  ( $N=1000$ )

ABB. 13: HALTONFOLGE MIT  $b_1 = 2, b_2 = 3$  ( $N=1000$ )ABB. 14: SOBOLFOLGE ( $N=1000$ )

#### 5.1.4 Ein Beispiel mit asiatischen Optionen

Nun wollen wir MC- und QMC-Algorithmen anwenden, um den Preis einer asiatischen Preis-Option vom europäischen Typ zu bestimmen, deren Payoff vom arithmetischen Mittel der Aktienpreise abhängt. Der Aktienpreis sei wieder durch eine geometrische Brown'sche Bewegung  $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t$  modelliert (siehe Abschnitt 4.6). Wir diskretisieren diesen Prozess:

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \sqrt{\Delta t} Z, \quad (5.5)$$

wobei  $Z \sim N(0, 1)$ . Für eine endliche Folge von Aktienpreisen  $S_0, S_1, \dots, S_k$  ist die Payoff-Funktion dieser Option dann gegeben durch

$$C_T(S_0, S_1, \dots, S_k) = \left( \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k S_i - K \right)^+, \quad (5.6)$$

wobei  $K$  der Ausübungspreis ist und  $\Delta t = \frac{T}{k}$ . Der Preis der Option zum Zeit-

punkt  $t = 0$  ist dann gegeben durch

$$C_0 = \mathbb{E}[e^{-rT} C_T(S_0, S_1, \dots, S_k)] \quad (5.7)$$

mit  $\mu = r$ , wobei  $S_0$ , der Aktienpreis zum Zeitpunkt 0, bekannt ist.

(5.7) kann nun mittels MC- (bzw. QMC)-Methoden geschätzt werden, indem man  $N$  Simulationsläufe für den Aktienpreisverlauf  $w_j = (S_1^j, \dots, S_k^j)$ , ( $j = 1, \dots, N$ ) durchführt und jeweils (5.6) auswertet. Schließlich erhält man den Schätzwert

$$C_0 \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-rT} C_T(w_j).$$

**Beispiel:** Abbildung 15 zeigt den simulierten Preis  $C_0$  für die asiatische Option mit  $K = 35$ ,  $r = 0.1$ ,  $S_0 = 40$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $T = 0.2$ ,  $k = 30$  in Abhängigkeit von der Anzahl  $N$  der Simulationsläufe unter Verwendung einer Pseudo-Zufallsfolge und einer Haltonfolge ( $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 3$ ). Der exakte Wert  $C_0 = 5.42$  (horizontale Linie) wurde mit einer MC-Methode mit  $N = 10^7$  Simulationsläufen geschätzt. Wie aus der Abbildung ersichtlich, liefert die Halton-Folge für große  $N$  gute Ergebnisse. Das Verhalten für kleinere  $N$  kann beispielweise durch Permutation der Halton-Folgenelemente verbessert werden.

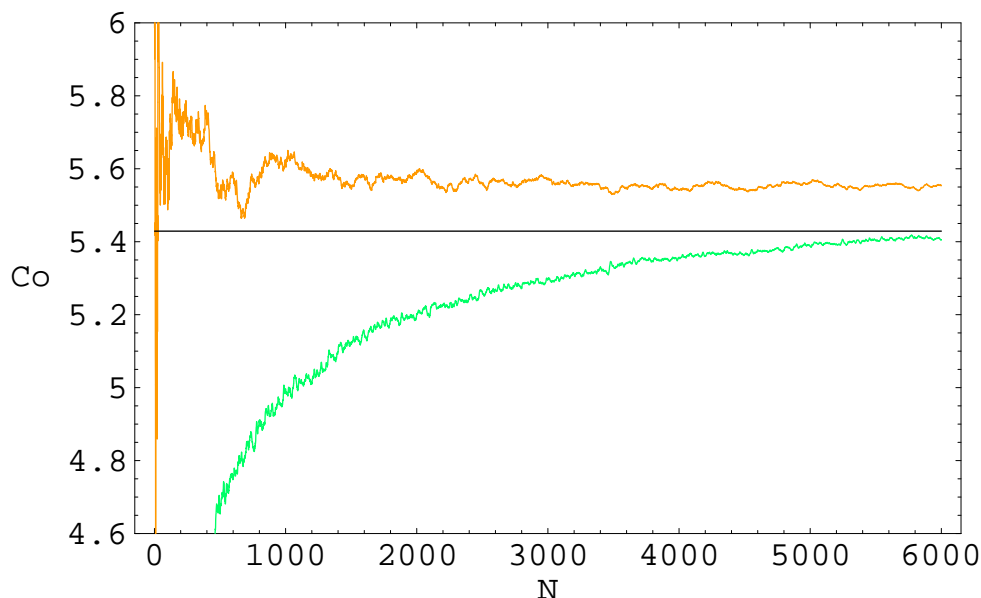


ABBILDUNG 15

### 5.1.5 Ein Beispiel mit Zinsraten-Derivaten

Das folgende Beispiel soll illustrieren, wie Quasi-Monte Carlo Algorithmen in der Finanzmathematik effizient eingesetzt werden können:

Wir betrachten eine sog. Mortgage-backed Security (MBS), die entsteht, wenn sich eine finanzielle Institution entscheidet, einen Teil ihres Hypothekenportfolios an Investoren zu verkaufen. Die Hypotheken kommen in einen Pool und die Investoren kaufen Anteile (die MBS) aus diesem Pool. Wenn also ein Investor mit  $x\%$  am Pool beteiligt ist, so erhält er  $x\%$  des zurückgezahlten Grundkapitals sowie  $x\%$  der Zinszahlungen von den Hypotheken an den Pool. Die Investoren sind dabei gegen einen Ausfall geschützt, da die Hypotheken durch staatliche Organisationen garantiert sind. Die Hypotheken im MBS-Pool haben Vorauszahlungsprivilegien, die für einen Haushalt sehr wertvoll sind (z.B. Hypothek auf 25 Jahre, kann aber jederzeit zum Nominalwert vorzeitig zurückbezahlt werden (bzw. Teile davon); dies wird z.B. geschehen, wenn die Zinsraten sinken oder wenn das entsprechende Haus verkauft wird). Für den Haushalt ist ein MBS also eine Option vom amerikanischen Typ mit  $T = 25$  Jahren. Die Vorauszahlungsfunktion, die den Erwartungswert der Vorauszahlung zum Zeitpunkt  $t$  (in Abhängigkeit z.B. der Zinsrate) angibt, ist also für die Bewertung der MBS wichtig.

Bei einer *collateralized mortgage obligation* (CMO) werden die Investoren in verschiedene Klassen (engl. *tranches*) geteilt und es gibt vorab definierte Regeln, wie etwaige Nominalwert-Rückzahlungen aufgeteilt werden (z.B. alle Nominalwert-Rückzahlungen betreffen Investoren in Klasse A, bis diese komplett ausbezahlt sind, dann erst B usw. - Klasse A hat hier das größte Vorauszahlrisiko).

Um den Wert einer CMO zu ermitteln, wollen wir den Erwartungswert der Summe der Barwerte der zukünftigen Zahlungen für jede der Klassen schätzen. Dazu verwenden wir ein Modell von PASKOV UND TRAUB:

Ein Hypothekenpool habe Fälligkeitsdauer  $T = 30$  Jahre und monatliche Zahlungen  $C$  (also 360 Zahlungen insgesamt) und die CMO sei in 10 Klassen unterteilt. Sei  $i_j$  die monatliche Zinsrate im Monat  $j$  ( $j = 1, \dots, 360$ ) und  $w_j$  der Vorauszahlungsprozentsatz im Monat  $j$  sowie  $a_{360-j+1}$  der Barwert der verbleibenden monatlichen Zahlungen nach Monat  $j$  (bzgl. dem Anfangszinssatz  $i_0$ ), d.h.

$$a_j = 1 + v_0 + \dots + v_0^{j-1} \quad \text{mit} \quad v_0 = \frac{1}{1 + i_0}.$$

Hier sind  $C$  und  $a_j$  Konstanten und  $i_j$  und  $w_j$  stochastische Variablen. Nun werden die Zinsraten in der Form

$$i_j = K_0 e^{\xi_j} i_{j-1} = K_0^j i_0 e^{\xi_1 + \dots + \xi_j}$$

modelliert, wobei  $\{\xi_j\}_{j=1}^{360}$  unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen sind mit  $\mathbb{E}[\xi_j] = 0$  und  $\text{Var}(\xi_j) = \sigma^2$  ( $K_0 \dots$  Konstante). Sei weiters  $w_j$  (in Abhängigkeit von  $i_j$ ) modelliert durch

$$\begin{aligned} w_j &= w_j(\xi_1, \dots, \xi_j) = K_1 + K_2 \arctan(K_3 i_j + K_4) \\ &= K_1 + K_2 \arctan(K_3 K_0^j i_0 e^{\xi_1 + \dots + \xi_j} + K_4), \end{aligned}$$

wobei  $K_1, \dots, K_4$  wieder Konstanten sind.

Dann ist die Zahlung in den Hypothekenpool im Monat  $j$  ( $j = 1, \dots, 360$ ) gegeben durch

$$\begin{aligned} M_j = M_j(\xi_1, \dots, \xi_j) &= C(1 - w_1(\xi_1)) \cdots (1 - w_{j-1}(\xi_1, \dots, \xi_{j-1})) \cdot \\ &\quad \cdot [1 + w_j(\xi_1, \dots, \xi_j)(a_{360-j+1} - 1)]. \end{aligned}$$

Diese Zahlung wird entsprechend den Regeln des CMO's auf die verschiedenen Klassen aufgeteilt. Sei  $G_{j;T}(\xi_1, \dots, \xi_j)$  der Anteil der Zahlung  $M_j$  für Monat  $j$ , der in die Klasse  $T$  geleitet wird. Diese Funktion hat eine sehr komplexe Gestalt (es ist aber auf jeden Fall eine stetige Funktion). Für den Barwert der Zahlung des Monats  $j$  an Klasse  $T$  benötigen wir den Diskontierungsfaktor

$$u_j(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}) = v_0 v_1(\xi_1) \cdots v_{j-1}(\xi_1, \dots, \xi_{j-1})$$

mit

$$v_k(\xi_1, \dots, \xi_k) = \frac{1}{1 + K_0^k i_0 e^{\xi_1 + \dots + \xi_k}}, \quad (k = 1, \dots, 359).$$

Der Barwert  $PV_T$  der Klasse  $T$  ergibt sich aus der Summe der Barwerte der einzelnen Monatszahlungen zu

$$PV_T(\xi_1, \dots, \xi_{360}) = \sum_{j=1}^{360} G_{j;T}(\xi_1, \dots, \xi_j) u_j(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}).$$

Der Erwartungswert dieses Barwerts ergibt sich dann nach einer Variablentransformation zu

$$\mathbb{E}[PV_T] = \int_{[0,1]^{360}} PV_T(y_1(x_1), \dots, y_{360}(x_{360})) dx_1 \cdots dx_{360},$$

wobei  $y_j = y_j(x_j)$  implizit gegeben ist durch

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{y_j} e^{-t^2/2\sigma} dt.$$

Das Problem hat sich also reduziert auf die Berechnung von 10 (= die Anzahl der Klassen) multivariate Integrationen auf dem 360-dimensionalen Einheitsintervall, das nun numerisch berechnet wird. Nach dem Generieren eines Punktes



$x_1, \dots, x_{360}$  muss dann  $y_1, \dots, y_{360}$  für jedes  $j$  als das entsprechende Quantil der Normalverteilung berechnet werden ( $j = 1, \dots, 360$ ).

Wie in der Arbeit von PASKOV [19] ausführlich dokumentiert, konvergiert das numerische Lösungsverfahren für dieses Integral mit Quasi-Monte Carlo Verfahren (v.a. unter Verwendung der Sobol-Folgen) 3-5 mal schneller als das entsprechende Monte Carlo Verfahren. Da Zeit auf den Finanzmärkten sprichwörtlich Geld ist, sind aus diesem Grund in verschiedensten finanzmathematischen Anwendungen Quasi-Monte Carlo Verfahren von großem Interesse.

## 5.2 Literatur

- J. HULL: *“Options, Futures and other Derivatives”* [14]
- S. ASMUSSEN: *“Ruin Probabilities”* [1]



# Kapitel 6

## Wahrscheinlichkeitstheorie

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -meßbare Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt (reelle) *Zufallsvariable*. Durch

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)) \quad (B \in \mathcal{B})$$

wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  festgelegt. Dieses  $P_X$  wird die *Verteilung* von  $X$  genannt. Sei  $\mu$  ein Maß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  und ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  eine positive meßbare Funktion, dann wird durch

$$P(B) = \int_B f(x) d\mu(x) \quad (B \in \mathcal{B})$$

ein Maß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  festgelegt. Falls  $\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x) = 1$  und  $f \geq 0$ , dann heißt  $f$  Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich  $\mu$ .

Eine Verteilung heißt *stetig*, wenn sie eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes  $\lambda$  besitzt. Eine Verteilung heißt *diskret*, wenn sie eine Dichte bezüglich eines Zählmaßes besitzt.

Ist  $X$  eine reelle Zufallsvariable, dann heißt die durch

$$F_X(x) := P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

definierte Funktion  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  Verteilungsfunktion von  $X$ . Eine solche Verteilungsfunktion ist *rechtsseitig stetig*, *monoton wachsend* und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  sowie  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ .  $P$  ist durch  $F$  eindeutig bestimmt.

Um eine Unterscheidung von diskreten und stetigen Variablen zu vermeiden, wird das Riemann-Stieltjes Integral eingeführt. Danach wird der Erwartungswert  $\mathbb{E}[g(X)]$  ausgedrückt als  $\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_X(x)$ . Für eine Zufallsvariable  $X$  sind mehrere charakteristische Größen von Interesse:

**Tabelle 6.1** Charakteristische Größen einer Zufallsvariablen  $X$ 

| Name                        | Definition  |
|-----------------------------|---|
| Verteilungsfunktion         | $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$   |
| Dichtefunktion              | $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$ , falls $X$ stetige ZV  |
| Erwartungswert              | $m_1 = \mathbb{E}[X]$   |
| $k$ -tes Moment             | $m_k = \mathbb{E}[X^k]$ , $k = 1, 2, \dots$   |
| $k$ -tes zentriertes Moment | $\mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^k\right]$ , $k = 1, 2, \dots$               |
| Varianz                     | $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$     |
| Schiefe                     | $\frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3]}{\text{Var}[X]^{3/2}}$ , falls $\text{Var}[X] > 0$ |

Der Nenner im Schiefeausdruck ist dabei so gewählt, dass die Schiefe gerade das dritte Moment der standardisierten Zufallsvariable  $\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$  angibt.

**Definition 1 (Momenterzeugende Funktion)** Für eine Zufallsvariable  $X$  ist die momenterzeugende Funktion (MGF) von  $X$  gegeben durch

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF_X(x), \quad t < t_0.$$

Die Zahl  $t_0$  ist eine von  $X$  abhängende Konstante, die den Definitionsbereich der MGF einschränkt. Im Falle nichtnegativer Zufallsvariablen  $X$  existiert  $M_X(t)$  für  $t \leq 0$ . (Mit  $s = -t$ , ( $s \geq 0$ ) ist  $L_X(s) = M_X(t)$  die Laplacetransformierte von  $X$ ).

### Satz 1: Eigenschaften der MEF



1. Eine Verteilung  $Q$  ist durch ihre momenterzeugende Funktion eindeutig bestimmt.
2. Die momenterzeugende Funktion der Faltung von Verteilungen  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$  ist gleich dem Produkt der einzelnen momenterzeugenden Funktionen.
- 3.

$$\mathbb{E}[X^n] = \left. \frac{d^n M_X(t)}{dt^n} \right|_{t=0}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Weiters gilt beispielsweise

$$\left. \frac{d^2 \log M_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \text{Var}[X], \quad \left. \frac{d^3 \log M_X(t)}{dt^3} \right|_{t=0} = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3],$$

$$\left. \frac{d^4 \log M_X(t)}{dt^4} \right|_{t=0} = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^4] - 3(\text{Var}[X])^2$$

**Satz 2: Tschebyscheff'sche Ungleichung**

Für beliebiges  $k > 0$  gilt

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq k) \leq \frac{1}{k^2} \text{Var}(X). \quad (6.1)$$

■

**Tabelle 6.2** Verschiedene diskrete Verteilungen

| Name      | Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = n)$                   | Parameter                               | $\mathbb{E}$   | Var              | MGF $M(t)$                        | $t_0$     |
|-----------|--|---|----------------|------------------|-----------------------------------|-----------|
| Binomial  | $\binom{N}{n} p^n q^{N-n} \quad n = 0 \dots N$           | $N=1,2,\dots$<br>$0 < p < 1$<br>$q=1-p$ | $Np$           | $Npq$            | $(pe^t + q)^N$                    | $\infty$  |
| Bernoulli | Spezialfall $N = 1$                                      |   |                |                  |                                   |           |
| Neg. Bin. | $\binom{r+n-1}{n} p^r q^n \quad n = 0, 1 \dots$          | $r > 0$<br>$0 < p < 1$<br>$q=1-p$       | $\frac{rq}{p}$ | $\frac{rq}{p^2}$ | $\left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$ | $-\log q$ |
| Geometr.  | Spezialfall $r = 1$                                      |   |                |                  |                                   |           |
| Poisson   | $e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad n = 0, 1 \dots$ | $\lambda > 0$                           | $\lambda$      | $\lambda$        | $e^{\lambda(e^t-1)}$              | $\infty$  |

**Tabelle 6.3** Verschiedene stetige Verteilungen

| Name        | Dichtefunktion   | Parameter                                 | $\mathbb{E}$                                      | Var  | MGF $M(t)$                                  | $t_0$     |
|-------------|--|---|---|--|---|-----------|
| Gleichvert. | $\frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b$  | $a < b$                                   | $\frac{a+b}{2}$                                   | $\frac{(b-a)^2}{12}$   | $\frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$            | 0         |
| Normal      | $e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \sqrt{2\pi\sigma} \quad -\infty < x < \infty$  | $-\infty < \mu < \infty$<br>$\sigma > 0$  | $\mu$   | $\sigma^2$   | $e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \mu t}$       | $\infty$  |
| Log-Normal  | $\frac{e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \quad x > 0$ | $-\infty < \mu < \infty$<br>$\sigma > 0$  | $e^{\mu + \sigma^2/2}$                            | $e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$                            |   |           |
| Gamma       | $\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \quad x \geq 0$   | $\beta > 0$<br>$\alpha > 0$               | $\frac{\alpha}{\beta}$                            | $\frac{\alpha}{\beta^2}$   | $\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$ | $\beta$   |
| Exponential | $\lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$  | $\lambda > 0$                             | $\frac{1}{\lambda}$                               | $\frac{1}{\lambda^2}$  | $\frac{\lambda}{\lambda-t}$                 | $\lambda$ |
| Pareto      | $\frac{\alpha \cdot c^\alpha}{x^{1+\alpha}} \quad c \leq x < \infty$             | $0 < c < \infty$<br>$0 < \alpha < \infty$ | $c \frac{\alpha}{\alpha-1}$<br>falls $\alpha > 1$ | $\frac{c^2 \alpha}{(\alpha-1)^2 (\alpha-2)}$<br>falls $\alpha > 2$ |   |           |


**Satz 3: Jensen'sche Ungleichung**

Sei  $X$  eine integrierbare Zufallsvariable, die nur Werte in einem offenen Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  annimmt und sei  $q : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine konvexe Funktion. Dann gilt

$$q(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[q(X)]. \quad (6.2)$$

**Tabelle 6.4** Funktionen mehrerer Zufallsvariablen

| Name               | Symbol             | Definition   |
|--------------------|--------------------|--|
| Bedingte W!        | $\mathbb{P}(A B)$  | $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$   |
| Kovarianz          | $\text{cov}[X, Y]$ | $\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[XY]$  |
| Bedingte Erwartung | $\mathbb{E}[X B]$  | $\mathbb{E}[X B]$ =deterministische Funktion von B<br>$\mathbb{E}[\chi_A B] = \mathbb{P}(A B)$<br>$X, B$ unabh. $\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X B]$<br>$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X A]] = \mathbb{E}[X]$ |
| Faltung            | $f_{X+Y}$          | $f_{X+Y}(x) = f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-t)f_Y(t)dt$  |

**Definition 2** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Filtration ist eine aufsteigende Folge  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  von Unter- $\sigma$ -Algebren von  $\mathcal{A}$ , d.h.

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_\infty := \sigma(\cup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n).$$

Eine Folge von Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \geq 1}$  heißt an die Filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  adaptiert, wenn  $X_n$   $\mathcal{F}_n$ -messbar ist für alle  $n \geq 0$ .

Eine Folge reeller integrierbarer Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \geq 1}$ , die an  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  adaptiert ist, heißt ein Martingal, falls für alle  $n \geq 0$

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \quad f.s.$$


**Satz 4: Konvergenz eines Martingals**

Sei  $(X_n)_{n \geq 1}$  ein Martingal bezüglich  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , und es gelte  $\mathbb{E}[|X_n|] < M$  für alle  $n$  und für eine von  $n$  unabhängige Konstante  $M$ . Dann existiert eine Zufallsvariable  $X$ , sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$  mit Wahrscheinlichkeit 1. ■

**Satz 5: Das schwache Gesetz der großen Zahlen**

Sei  $(X_n)_{n \geq 1}$  eine Folge paarweise unabhängiger Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i$  und  $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$ . Unter der Voraussetzung

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \xrightarrow{p} 0.$$

**Satz 6: 1. starkes Gesetz der großen Zahlen**

Sei  $(X_n)_{n \geq 1}$  eine Folge paarweise unabhängiger quadratisch integrierbarer Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}[X_n] = \mu_n$  und  $\text{Var}(X_n) = \sigma_n^2$ . Unter der Voraussetzung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sigma_n^2 < \infty$$

gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \xrightarrow{f.s.} 0.$$

**Satz 7: 2. starkes Gesetz der großen Zahlen**

Für jede unabhängige Folge  $(X_n)_{n \geq 1}$  identisch verteilter, integrierbarer reeller Zufallsvariablen gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{f.s.} \mu$$

mit  $\mu = \mathbb{E}[X_n]$ .



**Satz 8: Der zentrale Grenzwertsatz**

Sei  $(X_n)_{n \geq 1}$  eine Folge unabhängiger, identisch verteilter reeller Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}[X_n] = \mu$ ,  $\text{Var}(X_n) = \sigma^2$  und  $0 < \sigma^2 < \infty$ . Sei  $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  das arithmetische Mittel der  $X_i$ , dann gilt

$$Z_n := \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Der zentrale Grenzwertsatz kann auf den Fall unabhängiger, nicht notwendig identisch verteilter Zufallsvariablen verallgemeinert werden (Zentraler Grenzwertsatz von Lindeberg).



# Literaturverzeichnis

- [1] S. Asmussen and H. Albrecher. *Ruin probabilities*. World Scientific, Singapore, 2010.
- [2] M. Baxter and A. Rennie. *Financial Calculus*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [3] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637–654, 1973.
- [4] N. L. Bowers, H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, and C. J. Nesbitt. *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, Itasca, Illinois, 1986.
- [5] H. Bühlmann. *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer, New York, 19876.
- [6] D. Duffie. *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1992.
- [7] E. Eberlein and U. Keller. Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli*, 1:281–299, 1995.
- [8] R. Elliott and P. Kopp. *Mathematics of Financial Markets*. Springer Finance, Berlin, 1999.
- [9] H. U. Gerber. *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Huebner Foundation Monograph 8, Homewood, 1979.
- [10] H. U. Gerber and G. Pafumi. Utility functions: From risk theory to finance. *North America Actuarial Journal*, 2:74–100, 1998.
- [11] J. Grandell. *Aspects of Risk Theory*. Springer, New York, 1992.
- [12] A. Heck. *Introduction to Maple*. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1992.
- [13] W. Heilmann. *Grundbegriffe der Risikotheorie*. Verlag Versicherungswirtschaft E.V., Karlsruhe, 1987.

- [14] J. Hull. *Options, futures and other derivatives*. Prentice Hall, London, 1997.
- [15] T. Mack. *Schadensversicherungsmathematik*. Verlag Versicherungswirtschaft E.V., Karlsruhe, 1996.
- [16] B. Mandelbrot. *Fractals and scaling in Finance*. Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [17] R. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4:141–183, 1973.
- [18] H. H. Panjer. Recursive evaluations of a family of compound distributions. *ASTIN Bull*, 12:22–26, 1981.
- [19] S. H. Paskov. *Computing high dimensional integrals with applications to finance*. Technical Report CUCS-023-94, Columbia University, New York, 1994.
- [20] F. De Vylder. *Advanced risk theory*. Editions de l'universite de Bruxelles, Bruxelles, 1996.