# Höhere Versicherungsmathematik SS 2013
# Übungsbeispiele  Blatt I

(1) Zeigen Sie: Sei $Y \in$ EDF, d.h.

$$f_Y(y;\theta,\phi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{\phi/w} + c\,(y,\phi,w)\right).$$

Dann gilt: Es existiert ein $\delta > 0$, sodass für $|t| < \delta$

$$\mathbb{E}\left[e^{Yt}\right] = \exp\left(\frac{b(\theta + t\phi/w) - b(\theta)}{\phi/w}\right); \qquad \mathbb{E}\,[Y] = b'(\theta); \qquad \text{Var}\ [Y] = b''(\theta)\phi/w.$$

Weiters zeigen Sie: Sei $Y \in$ EDF und $v(\mu) = b''\left(b'^{-1}(\mu)\right) = \mu$. Dann gilt: $Y$ besitzt eine Poissonverteilung.

(2) Zeigen Sie: Sei $Y \in$ EDF mit $v(\mu) = \mu^3$. Dann gilt: $Y$ besitzt eine Inverse Gauss'sche Verteilung.

(3) Fur einen Tarif mit zwei Tarifmerkmalen $i = 1,\ldots,m_1$ und $j = 1,\ldots,m_2$ sei die Schadenanzahl Poisson-verteilt mit $E[X_{i,j}] = w_{i,j}\mu_{i,j}$ und $\mu_{i,j} = \mu_0\mu_{1i}\mu_{2j}$. Zeigen Sie, dass der Maximum Likelihoodschätzer für die Gamma-Parameter mit den Ergebnissen des MMT-Verfahrens (Marginalsummenverfahrens) übereinstimmt.

(4) Seien $T_1,\ldots,T_n$ unanhängige erwartungstreue Schätzer für eine Zielgröße $t$. Zeigen Sie, dass unter alle Linerakombinationen

$$T = \sum_{i=1}^{n} w_i T_i, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

die folgende Kombination minimale Varianz besitzt:

$$w_i = \frac{w}{Var[T_i]}, \quad w = \frac{2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Var[T_i]}}.$$

Berechnen Sie die Varianz des optimalen Schätzers.

(5) Gegeben sei die folgende, durch die Matrix $P$ induzierte, Markov-Kette:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie Werte $p, q$ für die es sich hier um eine ergodische Markov-Kette handelt.
- Berechnen Sie die stationäre Verteilung falls sie existiert.

(6) Gegeben sei eine ergodische Markov-Kette mit Übergangsmatrix $P$ und 3 Zustanden. Sei $N$ so dass $P^N$ keine nicht-positiven Einträge hat. Geben Sie eine obere Schranke für $N$ an.

(7) Berechnen Sie Loimaranta-Effizienz (in Abhängigkeit von $\lambda$) für ein dreistufiges Bonus/Malus-System, wobei die Stufen von oben nach unten mit Prämien $c$,$d$,$d$ ($c > d$) versehen sind.

$$P = \begin{pmatrix} 1-\exp(\lambda) & 0 & \exp(\lambda) \\ 1-\exp(\lambda) & 0 & \exp(\lambda) \\ 0 & 1-\exp(\lambda) & \exp(\lambda) \end{pmatrix}.$$

(8) Betrachten Sie das in Österreich gängige Bonus-Malus-System (siehe ANHANG A) und nehmen Sie an, dass 10000 Versicherungsnehmer gleichzeitig in Stufe 9 starten. Bestimmen Sie (mit Hilfe eines Symbolic-Computation-Pakets wie etwa Mathematica oder Maple) die erwartete Anzahl von Versicherungsnehmern in den jeweiligen Bonus-Malus-Stufen nach 3,4,5,10 Jahren unter folgenden alternativen Annahmen (($a$) gilt immer, das heißt ein Beispiel mit ($a$) + ($b$) und eines mit ($a$) + ($c$)):

(a) Es ist bekannt, dass 5% aller Versicherungsnehmer jährlich ihren Vertrag stornieren (unabhängig von der aktuellen Stufe). Statt dieser stornierten Verträge steigt jährlich eine exakt gleich große Gruppe von neuen Versicherungsnehmern in Stufe 9 ein.

(b) die Anzahl der Schäden eines jeden Versicherungsnehmers in einem Jahr ist Poisson(0.05)-verteilt.

(c) Unter der Annahme einer Poisson($\lambda$)-Verteilung für die Anzahl der Schäden in einem Jahr, bestimmen Sie (mit Hilfe eines Symbolic-Computation-Pakets wie etwa Mathematica oder Maple) die stationäre Verteilung des in Österreich gängigen Bonus-Malus-Systems (siehe ausgeteilte Tabelle) als Funktion von $\lambda$ sowie die Loimaranta-Effizienz dieses Systems! Plotten Sie die Loimaranta-Effizienz als Funktion von $\lambda$ im Bereich $\lambda \in [0.05, 2]$ und interpretieren Sie das Resultat!

(9) Betrachten Sie das in Österreich gängige Bonus-Malus-System (siehe ANHANG A). Sei für ein beliebiges Jahr

$$P(1 \text{ Schaden }) = 0.05 = 1 - P(\text{ kein Schaden }).$$

Die Jahresprämie in Stufe 9 sei 100 Euro. In Abhängigkeit von der derzeitigen Bonus-Malus-Stufe, ab welcher Schadenshöhe ist es vorteilhaft, den Schaden in diesem Bonus-Malus-System nicht zu melden, wenn Sie einen Planungszeitraum von 5 Jahren berücksichtigen? (Benutzen Sie ein Symbolic-Computation-Paket wie etwa Mathematica oder Maple).

## ANGANG A

### Beispiel Bonus/Malus System (typisch für Österreich)

Einstieg in Stufe 09.

Nach schadenfreiem Verlauf jedes Zeitraumes vom 1. Oktober bis zum 30. September des folgenden Jahres (Beobachtungszeitraum) wird die Prämie jeweils zur nächsten Hauptfälligkeit ab dem dem Beobachtungszeitraum folgenden 1. Jänner nach der nächstniedrigeren Prämienstufe bemessen. Ein Beobachtungszeitraum gilt als schadenfrei verlaufen, wenn kein zu berücksichtigender Versicherungsfall eingetreten ist und der Versicherungsvertrag mindestens neun Monate bestanden hat.

Für jeden zu berücksichtigenden Versicherungsfall wird die Prämie zur nächsten Hauptfälligkeit ab dem dem Beobachtungsjahr folgenden 1. Jänner um drei Prämienstufen höher als zuvor bemessen.

| Prämienstufe | % von Stufe 09 | Prämienstufe | % von Stufe 09 |
|---|---|---|---|
| 00 | 50 | 09 | 100 |
| 01 | 50 | 10 | 120 |
| 02 | 60 | 11 | 120 |
| 03 | 60 | 12 | 140 |
| 04 | 70 | 13 | 140 |
| 05 | 70 | 14 | 170 |
| 06 | 80 | 15 | 170 |
| 07 | 80 | 16 | 200 |
| 08 | 100 | 17 | 200 |