Höhere Versicherungsmathematik SS 2013
Übungsbeispiele Blatt II

(10) Betrachte das heterogene Credibility Setting aus der Vorlesung: Für fixes $\theta > 0$ seien die Schadenhöhen der i-ten Polizze $X_1, \dots, X_{n_i}$ iid Pareto verteilt mit den Parametern (λ, θ), i.e.

$$1 - F(x|\theta) = \mathbb{P}(X_j > x|\theta) = \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\theta}, \quad x > \lambda.$$

Weiters sei θ aus einer $\Gamma(\gamma, \beta)$ mit der Dichte

$$f_{\gamma,\beta}(x) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

(a) Zeige, dass $\theta|(X_1, \dots, X_{n_i})$ eine Dichte $\Gamma(\gamma + n, \beta + \sum_{i=1}^n \log(X_i/\lambda))$ besitzt.

(b) Für eine Grenze $K > \lambda$, sei $Y_j = I_{(K,\infty)}(X_j)$. Zeigen Sie, dass der Bayes-Schätzer für $p(\theta) = \mathbb{E}\,(Y_1|\theta)$ basierend auf die Daten $Y_1, \dots, Y_{n_i}$ wie folgt gegeben ist:

$$\frac{\left(\beta + \sum_{j=1}^{n_i} \log(X_j/\lambda)\right)^{\gamma+n_i}}{\left(\beta + \sum_{j=1}^{n_i} \log(X_j/\lambda) + \log(K/\lambda)\right)^{\gamma+n_i}}$$

(11) Betrachte das heterogene Credibility Setting aus der Vorlesung: Sei θ der Strukturparameter mit stetiger Dichte f_θ. Weiters sei eine beobachtete Schadenanzahl X der i-ten Polizze vorhanden. Wir nehmen an, dass $X|\theta$ Poison(θ) verteilt ist.

(a) Bestimme die bedingte Verteilung $f_\theta(y|X = k)$ von $\theta|X$ für $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ und bestimme daraus den Bayes Schätzer $m_k = \mathbb{E}(\theta|X = k)$.

(b) Zeige, dass

$$m_k = (k+1)\frac{\mathbb{P}(X = k+1)}{\mathbb{P}(X = k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

(c) Zeige, dass

$$\mathbb{E}(\theta^l|X = k) = \prod_{i=0}^{l-1} m_{k+i}, \quad k \geq 0, l \geq 1.$$

(12) Betrachte die i-te Polizze im heterogenen Credibility Setting aus der Vorlesung. Es sei θ $\beta(a, d)$-verteilt mit Dichte

$$f_\theta(y) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} y^{a-1}(1-y)^{b-1}, \quad 0 < y < 1, \ a, b > 0.$$

Für fixes θ ist die Verteilung der Schadenshöhen $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Bin(k, θ) (Binomial) verteilt.

- Berechne die Dichte $f_\theta(y|\mathbf{X} = \mathbf{x})$ für $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ und $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$.
- Berechne den Bayes Scvhätzer $\widehat{\mu}_B$ von $\mu(\theta) = \mathbb{E}(X_1|\theta)$. (Hinweis: Für eine $\beta(a, d)$-verteilte ZV θ gilt: $\mathbb{E}(\theta) = a/(a+b)$ und $Var(\theta) = ab/((a+b+1)(a+b)^2)$)

(13) Betrachte das heterogene Credibility Setting aus der Vorlesung: Sei θ der Strukturparameter mit bekannten Momenten $m_k = \mathbb{E}(\theta^k) < \infty$, $k = 1, 2, 3, 4$. Weiters sei eine beobachtete Schadenanzahl X der i-ten Polizze vorhanden. Wir nehmen an, dass $X|\theta$ Poison(θ) verteilt ist. Bestimmen Sie den linearen Bayes Schätzer und den mittleren quadratischen Fehler des Schätzers als eine Funktion von X, m_1 und m_2.

(14) Berechne für Beispiel 12 den linearen Bayes Schätzer von $p(\theta) = \mathbb{E}(X_1|\theta)$ basierend auf den Daten $X_1, \dots, X_n$. Berechne zusätzlich das dazugehörige Risiko des linearen Bayes Schätzers.

(15) Betrachte ein Portfolio mit n unabhängigen Polizzen. Seien für fixes $\theta > 0$ die Schadenshöhen $X_{i,t}$, $t = 1, 2, \dots,$ in der i-ten Polizze unabhängig und Pois$(p_{i,t}\theta_i)$ verteilt und seien $p_{i,t} \neq p_{i,s}$ für $s \neq t$. Sind in diesem Fall die Voraussetzungen für das Bühlmann-Straub Modell erfüllt?

(16) Betrachte ein Portfolio mit n unabhängigen Polizzen. Seien für fixes $\theta > 0$ die Schadenshöhen $X_{i,t},\ t = 1, 2, \ldots,$ in der i-ten Polizze unabhängig und $\Gamma(\gamma_{i,t}, \beta_{i,t})$ verteilt. Gebe Bedingungen an $\gamma_{i,t}, \beta_{i,t}$ an unter welchen das Bühlmann-Straub Modell anwendbar ist. Berechne die Parameter μ, ϕ, λ und $p_{i,t}$.