Höhere Versicherungsmathematik SS 2013
Übungsbeispiele Blatt III

(17) Seien X_1, X_2 i.i.d. Zufallsvariablen auf $(0, \infty)$ mit Verteilungsfunktion F und sei $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ die Tailverteilungsfunktion von F. Weiters sei G die Verteilungsfunktion von $X_1 + X_2$. Dann gilt:

- $\mathbb{P}(\max(X_1, X_2) > x) \sim 2\overline{F}(x), \quad$ für $x \to \infty$
- $\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2$.

(18) Eine Zufallsvariable X heißt subexponential, wenn mit der Notation von Beispiel 17

$$\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} \to 2, \quad x \to \infty,$$

gilt. Zeige: jede Zufallsvariable mit regulär variierendem Tail is subexponential.

(19) Für eine subexpontiale Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und momenterzeugender Funktion $\widehat{F}$ gilt $e^{\epsilon x}\overline{F}(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ und $\widehat{F}(\epsilon) = \infty$ for all $\epsilon > 0$.

(20) Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit Tailverteilungsfunktion $\overline{F}(x) = e^{-x^\beta}$ für $0 < \beta < 1$. Zeige, dass X subexponential ist.

(21) Sei X subexponential und $\overline{F}^n$ die Tailverteilungsfunktion von $X_1 + \ldots + X_n$, wobei die X_i i.i.d. Kopien von X sind. Dann gilt

$$\frac{\overline{F}^n(x)}{\overline{F}(x)} \to n, \qquad \text{für } x \to \infty.$$

(22) Sei X subexponential und $\epsilon > 0$, dann existiert eine Konstante $K = K_\epsilon$ mit

$$\frac{\overline{F}^n(x)}{\overline{F}(x)} \leq K(1+\epsilon)^n,$$

für alle n und x.