Zinseszins- und Rentenrechnung

1 Ein edler und gut betuchter Spender beschließt angesichts seiner Affinität zu Zahlen eine Stiftung einzurichten, die - ähnlich dem Nobelpreis - jährlich die herausragendste mathematische Leistung würdigen soll. Berechnen Sie das notwendige Einlagekapital, um bei jährlicher Verzinsung von 7% und jährlicher Inflationsrate von 2% eine Dotation 1 Mio. Euro (mit Inflationsanpassung) vom nächstem Jahr an für die nächsten **a)** 10 Jahre, **b)** 100 Jahre und **c)** auf ewig zu garantieren.

2 Zeigen Sie, dass für $i > 0$:

$$d < d^{(2)} < d^{(3)} < \cdots < \delta < \cdots < i^{(3)} < i^{(2)} < i$$

und

$$i^{(m)} - d^{(n)} \leq \frac{i^2}{\min(m,n)}.$$

Die zukünftige Lebensdauer eines x-jährigen

3 Zeigen Sie:
a) ${}_tp_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_s \; ds\right)$
b) $\frac{\partial}{\partial x} \; {}_tp_x = (\mu_x - \mu_{x+t})\,{}_tp_x$

4 Berechnen Sie μ_{55} sowie $\mathring{e}_{55}$, wenn

$${}_tp_x = \frac{120 - x - t}{120 - x}$$

für $0 \leq x < 120$ und $0 \leq t \leq 120 - x$.

5 Betrachten Sie zwei unabhängige Leben, die sich ausschließlich durch den Nikotinkonsum unterscheiden. Für $0 \leq x < \omega$ sei μ_x die Sterbeintensität des Nichtrauchers und $c\mu_x$ mit $c > 1$ die Sterbeintensität des Rauchers. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Raucher den Nichtraucher überlebt.

6 Gegeben seien die Werte $e_{75} = 10.5$, $e_{76} = 10$ und $e_{77} = 9.5$. Wie großist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 75-jährige Person 77 Jahre alt wird?

7 Es sei μ_{x+t} konstant für $0 \leq t < 1$ und $q_x = 0.16$. Berechnen Sie t sodass ${}_tp_x = 0.95$.

8 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine 34-jährige Person, eine 35-jährige Person überlebt. Verwenden Sie dazu die "Steinzeitsterbetafel".

Einfache Kapitalversicherungen

Benutzen Sie die "Steinzeitsterbetafel" aus Tabelle 1.1, um die Barwerte folgender Kapitalversicherungen bei einem Zinsfußvon $i = 0.04$ zu berechnen:

x	l_x	d_x
30	10000	200
31	9800	400
32	9400	600
33	8800	800
34	8000	1000
35	7000	1200
36	5800	1400
37	4400	1600
38	2800	1800
39	1000	1000
40	0	0

Tabelle 1: "Steinzeitsterbetafel" aus H. Kracke *Lebensversicherungsmathematik*, l_x ist die Anzahl der Lebenden mit Alter x, $d_x = l_x q_x$

9 Benutzen Sie die "Steinzeitsterbetafel" aus Tabelle 1.1, um die Barwerte folgender Kapitalversicherungen bei einem Zinsfußvon $i = 0.04$ zu berechnen:
a) A_x mit $x = 33, 35, 37$
b) $A_{x\overset{1}{\overline{5|}}}$ mit $x = 32, 34, 36$
c) $A_{x\overline{5|}}$ mit $x = 32, 34, 36$.

10 Die Sterblichkeit folge de Moivre's Gesetz (Gleichverteilung des Todeszeitpunktes zwischen 0 und ω Jahren) mit $\omega = 100$. Berechnen Sie die Nettoeinmalprämie einer stetigen, lebenslangen Todesfallversicherung ausgestellt an eine 50-jährige Person, die zum Zeitpunkt des Todes T $10.000 \cdot \exp(-T/2)$ € ausbezahlt. Legen Sie für Ihre Berechnungen einen stetigen Zinssatz von $\delta = 3\%$ zugrunde.

Leibrenten und Kommutationszahlen

11 Berechnen Sie p_{73} aus folgenden Werten, wobei $i = 0.03$ gilt:

x	72	73	74	75
$\ddot{a}_x$	8.16	7.83	7.53	7.25