x	l_x	d_x
30	10000	200
31	9800	400
32	9400	600
33	8800	800
34	8000	1000
35	7000	1200
36	5800	1400
37	4400	1600
38	2800	1800
39	1000	1000
40	0	0

Tabelle 1: "Steinzeitsterbetafel" aus H. Kracke *Lebensversicherungsmathematik*, l_x ist die Anzahl der Lebenden mit Alter x, $d_x = l_x q_x$

Leibrenten und Kommutationszahlen

1 Es sei $l_x = 100.000(100 - x)$ für $0 \leq x \leq 100$. Berechnen Sie den Barwert einer vorschüssigen lebenslänglichen Leibrente für eine 85-jährige Person, wobei $i = 0.05$ und die jährlichen Raten in den ersten beiden Jahren 2.000 € und danach 3.000 € betragen.

Zwei weitere Typen von Lebensversicherungen sind die sogenannten "standard increasing" und die "standard decreasing" Lebensversicherungen. Bei der Lebensversicherung vom Typ "standard increasing" beträgt der im Jahr k versicherte Betrag genau k, bei "standard decreasing" genau $n - k$. Diese Versicherungen können auch angesehen werden als Summe von konstanten Lebensversicherungen über einen Betrag von 1, die jeweils ein Jahr später beginnen oder enden. Damit ergibt sich für eine lebenslängliche Todesfallsversicherung die Netto-Einmalprämie

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

Für eine n-jährige Todesfallsversicherung können die Netto-Einmalprämien für "standard increasing", $(IA)^1_{x:\overline{n}|}$, und $(DA)^1_{x:\overline{n}|}$ für "standard decreasing" ausgedrückt werden als:

$$\begin{aligned}
(IA)^1_{x:\overline{n}|} &= A_x + {}_{1|}A_x + \cdots + {}_{n-1|}A_x - n_{n|}A_x \\
&= nA^1_{x:\overline{n}|} - A^1_{x:\overline{n-1}|} - A^1_{x:\overline{n-2}|} - \cdots - A^1_{x:\overline{1}|} \\
(DA)^1_{x:\overline{n}|} &= A^1_{x:\overline{n}|} + A^1_{x:\overline{n-1}|} + A^1_{x:\overline{n-2}|} + \cdots + A^1_{x:\overline{1}|}
\end{aligned}$$

Analog kann eine "standard increasing" Rente definiert werden, die in Jahr k einen Betrag von $k + 1$ ausbezahlt. Die Netto-Einmalprämie beträgt dementsprechend: $(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k (k+1) {}_k p_x$

2 Berechnen Sie $(DA)^{1}_{31:\overline{5}|}$ mit $i = 0.03$ und unter Zuhilfenahme der "Steinzeitsterbetafel"

3 Berechnen Sie $(I\ddot{a})_{35}$ mit $i = 0.03$ und unter Zuhilfenahme der "Steinzeitsterbetafel"

4 Zeigen Sie die Relation $\ddot{a}_{\overline{n}|} = d(I\ddot{a})_{\overline{n}|} + nv^n$ und leiten Sie daraus folgende Formel ab: $\ddot{a}_x = d(I\ddot{a})_x + (IA)_x$.

5 Zeigen Sie, dass sich der Ausdruck

$$\frac{(I\ddot{a})_x - \ddot{a}_{x:\overline{1}|}}{(I\ddot{a})_{x+1} + \ddot{a}_{x+1}}$$

zu $\frac{p_x}{1+i}$ vereinfachen lässt.

Nettoprämien und Berücksichtigung der Kosten

6 ${}_nP_x$ bezeichne die jährliche Prämie für eine nicht befristete Ablebensversicherung, wobei die Prämien aber maximal n-mal bezahlt werden. Sei $i = 0.04$, berechnen Sie ${}_3P_{34}$ für $i = 0.04$ mit Hilfe der "Steinzeitsterbetafel".

7 Es seien ${}_{20}P_{25} = 0.046$, $P_{25:\overline{20}|} = 0.064$ und $A_{45} = 0.640$. Bestimmen Sie die Prämie $P^{1}_{25:\overline{20}|}$.

8 Berechnen Sie die ausreichende Prämie für eine Ablebensversicherung mit Nennwert 1000 € einer 35-jährigen Person gemäßder "Steinzeitsterbetafel" mit $i = 0.04$. Nehmen Sie dabei an, dass die Versicherung folgende Kosten veranschlagt: 5% Abschlusskosten, 3% Inkassokosten und 10% Verwaltungskosten. Geben Sie außerdem die Aufteilung der ausreichenden Prämie in Nettoprämie, Abschlusskosten, Inkassokosten und Verwaltungskosten an.

Das Deckungskapital

9 Geben Sie die Entwicklung des Nettodeckungskapitals einer 6-jährigen gemischten Versicherung mit Nennwert 2500 € einer 32-jährigen Person bei jährlicher Prämienzahlung tabellarisch an (vgl. Beispiel 3 aus Kapitel 1.6.1). Der Zinssatz sei dabei $i = 0.04$ und die Sterbewahrscheinlichkeiten durch die "Steinzeitsterbetafel" gegeben.

10 Es sei $q_{31} = 0.002$, $\ddot{a}_{32:\overline{13}|} = 9$ und $i = 0.05$. Gesucht ist ${}_1V_{31:\overline{14}|}$.

11 Es sei ${}_{10}V_{25} = 0.1$ und ${}_{10}V_{35} = 0.2$. Berechnen Sie ${}_{20}V_{25}$.