Simulationstechniken in Finanz- und Versicherungsmathematik

Markus Hofer

10. Januar 2010

1. Motivation
2. Monte Carlo Methoden
3. Quasi-Monte Carlo Methoden
4. Folgen kleiner Diskrepanz

Motivation

Mortgage-backed Security (MBS)

Finanzinstitutionen verkaufen Teil ihres Hypothenkenportfolios an Investoren. Die Hypotheken kommen in Pool: Wenn Investor mit $x\%$ an Pool beteiligt ist, erhält er $x\%$ des zurückgezahlten Grundkapitals sowie $x\%$ der Zinszahlung von den Hypotheken an den Pool.
Die Investoren sind dabei gegen Ausfall geschützt, da Hypotheken durch staatliche Organisationen garantiert sind.

Motivation

Risiko

Die Hypotheken im MBS - Pool haben Vorauszahlungsprivilegien, die für einen Haushalt wertvoll sind: Hypothek (bzw. Teile davon) kann z.B. vorzeitig zum Nominalwert zurückgezahlt werden. (Hausverkauf, Änderung der Zinsrate).
Für den Haushalt ist also eine MBS eine amerikanische Option mit $T = 30$ (üblicherweise). Die Vorauszahlungsfunktion, die den Erwartungswert der Vorauszahlng zum Zeitpunkt T angibt (in Abhängigkeit von der Zinsrate), legt also den Wert der MBS fest.

Motivation

Collaterized mortgage obligation (CMO)

Investoren werden in verschiedene Klassen (engl. : Wranches) unterteilt und es gibt Regeln, wie etwaige Nominalwertrückzahlungen aufgeteilt werden. (Z.B. zuerst alle Rückzahlunegn in Klasse A, dann alle in Klasse B, etc.)
Wert einer CMO: Erwartungswert der Summe der Barwerte der zukünftigen Zahlungen für jede Klasse.

Modell von Paskov und Traub

- Pool mit Fälligkeitsdauer $T = 30$ Jahre
- Monatliche Zahlungen der Höhe C (damit 360 Zahlunen insgesamt)
- 10 Klassen in CMO
- i_j monatliche Zinsrate im Monat $j = 1, \ldots, 360$
- w_j Vorauszahlungsprozentsatz im Monat $j = 1, \ldots, 360$
- $a_{360-j+1}$ Barwert der verbleibenden Zahlungen nach Monat $j = 1, \ldots, 360$ (bzgl. Anfangszinssatz i_0)

Modell von Paskov und Traub

$$a_j = C(1 + v_0 + \ldots + v_0^{j-1}), \qquad v_0 = \frac{1}{1 + i_0}$$

Zinsmodell:

$$i_j = K_0 e^{\xi_j} i = K_0^j i_0 e^{\xi_1 + \ldots + \xi_j}$$

mit $(\xi_j)_{j=1,\ldots,360}$ sind unabhängige normalverteilte ZV mit $\mathbb{E}[\xi_j] = 0$ und $\mathrm{Var}[\xi_j] = \sigma^2$ und K_0 ist konstant. Sei weiters w_j (in Abängigkeit von i_j) modelliert durch

$$\begin{aligned} w_j &= w_j(\xi_1, \ldots, \xi_j) = K_1 + K_2 \arctan\left(K_3 i_j + K_4\right) \\ &= K_1 + K_2 \arctan\left(K_3 K_0^j i_0 e^{\xi_1 + \ldots + \xi_j} + K_4\right), \end{aligned}$$

wobei $K_1, \ldots, K_4$ wieder Konstanten sind.

Modell von Paskov und Traub

Dann ist die Zahlung in den Hypothekenpool im Monat j ($j = 1, \ldots, 360$) gegeben durch

$$
\begin{aligned}
M_j = M_j(\xi_1, \ldots, \xi_j) = \quad & C(1 - w_1(\xi_1)) \cdots (1 - w_{j-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1})) \cdot \\
& \cdot \Big[1 + w_j(\xi_1, \ldots, \xi_j)(a_{360-j+1} - 1) \Big].
\end{aligned}
$$

Modell von Paskov und Traub

Sei $G_{j;T}(\xi_1, \ldots, \xi_j)$ der Anteil der Zahlung M_j für Monat j, der in die Klasse T geleitet wird und sei

$$u_j(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}) = v_0 v_1(\xi_1) \cdots v_{j-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1})$$

mit

$$v_k(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \frac{1}{1 + K_0^k i_0 e^{\xi_1 + \ldots + \xi_k}}, \quad (k = 1, \ldots, 359).$$

Modell von Paskov und Traub

Der Barwert PV_T der Klasse T ergibt sich aus der Summe der einzelnen Monatszahlungen zu

$$\mathrm{PV}_T(\xi_1,\ldots,\xi_{360}) = \sum_{j=1}^{360} G_{j;T}(\xi_1,\ldots,\xi_j)u_j(\xi_1,\ldots,\xi_{j-1}).$$

Der Erwartungswert dieses Barwerts ergibt sich dann nach einer Variablentransformation zu

$$\mathbb{E}[\mathrm{PV}_T] = \int_{[0,1]^{360}} PV_T(y_1(x_1),\ldots,y_{360}(x_{360}))dx_1\cdots dx_{360},$$

wobei $y_j = y_j(x_j)$ implizit gegeben ist durch

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{y_i} e^{-t^2/2\sigma}dt.$$

Monte Carlo Methoden

Wir wollen

$$I(f) = \int_{I^s} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

berechnen, wobei f eine Funktion auf dem s-dimensionalen Einheitsintervall $I^s = [0,1]^s$ ist.
Wähle N zufällige unabhängige gleichverteilte Integrationspunkte $x_1, \ldots, x_N$ in I^s und berechne arithmetrische Mittel

$$I_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\mathbf{x}_n)$$

Monte Carlo Methoden

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt $I_N(f) \to I(f)$ für $N \to \infty$ mit Wahrscheinlichkeit 1. Nach dem zentralen Grenzwertsatz kann der Fehler der Approximation

$$I_N - I = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\mathbf{x}_n) - \mathbb{E}[f]$$

näherungsweise durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2/N beschrieben werden, wobei $\sigma^2 = \int_{I^s}(f(\mathbf{x}) - I)^2\, d\mathbf{x}$.
Damit bekommen wir probabilistische Fehlerschranke $O(N^{-1/2})$.

Bemerkungen

- Fehler hängt nicht von Dimension ab (im Gegensatz zu klassische numerische Methoden)
- Weiter Verbesserungen möglich (Varianzreduktionsmethoden) z.B. Bedingtes MC, Importance Sampling, etc.

Bedingtes MC

Seien Z der Monte Carlo Schätzer und Y eine andere Zufallsvariable mit

$$Z' = \mathbb{E}[Z|Y], \qquad \mathbb{E}[Z'] = \mathbb{E}[Z] = z.$$

Wegen

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(\mathbb{E}[Z|Y]) + \mathbb{E}[\mathrm{Var}(Z|Y)]$$

folgt

$$\mathrm{Var}[Z'] \leq \mathrm{Var}[Z].$$

Quasi-Monte Carlo

Oft als determinstische Version von MC-Methoden bezeichnet. Deterministische Punktfolgen statt Zufallszahlen auf $[0,1]^s$. Maß für die Güte einer solchen Punktfolge ist die Stern-Diskrepanz

$$\mathrm{D}_N^*(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_N) = \sup_{\alpha\in[0,1]^s} \left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0,\alpha)}(\mathbf{x}_n) - \alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_s \right|.$$

Hierbei ist $[0,\alpha) = [0,\alpha_1)\times\ldots\times[0,\alpha_s)$ und 1_A ist die charakteristische Funktion der Menge A. Eine Folge $\omega = \{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty$ heißt *gleichverteilt*, wenn

$$\lim_{N\to\infty} D_N^*(\omega) = 0.$$

Quasi-Monte Carlo

Koksma-Hlawka Ungleichung

Als obere Schranke für den Fehler gilt

$$\left| I - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\mathbf{x}_n) \right| \leq V(f) D_N^*(\omega),$$

wobei $V(f)$ die Variation der Funktion angibt, die als endlich vorausgesetzt wird. Je kleiner die Diskrepanz der Folge ist, desto kleiner ist also der Approximationsfehler.

Folgen kleiner Diskrepanz

Die Sterndiskrepanz der besten gleichverteilten Folgen hat asymptotische Ordnung $O((\log N)^s/N)$. Solche Folgen werden als *Folgen kleiner Diskrepanz* bezeichnet. Wegen Koksma-Hlawka-Ungleichung gilt also bei Verwendung solcher Folgen für den Approximationsfehler $O((\log N)^s/N)$. Im Gegensatz zur MC-Methode ist diese Fehlerschranke zwar von s abhängig, aber sie ist deterministisch!

Folgen kleiner Diskrepanz

Van der Corput-Folge

Man wählt eine ganze Zahl $b \geq 2$. Das $n-$te Folgenglied x_n der *Van der Corput-Folge zur Basis b* ergibt sich dann aus der eindeutigen Ziffernentwicklung $n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(n) b^j$ (wobei $a_j(n) \in \{0, \ldots, b-1\}$), indem wir diese Ziffern am Dezimalpunkt spiegeln, d.h. wir erhalten

$$\phi_b(n) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(n) b^{-j-1}.$$

Nun wählen wir $x_n = \phi_b(n)$ für alle $n \geq 0$.

Folgen kleiner Diskrepanz

Halton-Folge

Erweiterung auf $s > 1$ Dimensionen mit s ganzen Zahlen $b_1, \ldots, b_s \geq 2$, relativ prim. Dann erhält man die Halton-Folge $x_n = (\phi_{b_1}(n), \ldots, \phi_{b_s}(n)) \in I^s$ für alle $n \geq 0$.

Folgen kleiner Diskrepanz

Netzartige Folgen

Die sog. **netzartigen Folgen** haben noch kleinere Diskrepanz. Dabei ist ein (t, m, s)-Netz zur Basis b definiert als Punktmenge P von $N = b^m$ Punkten in $[0, 1]^s$, sodass in jedem Elementarintervall vom Typ

$$E = \prod_{i=1}^{s} [a_i b^{-d_i}, (a_i + 1) b^{-d_i}), \qquad a_i, d_i \in \mathbb{Z},$$

mit $d_i \geq 0,\ 0 \leq a_i < b^{d_i},\ 1 \leq i \leq s,$, für das $vol(E) = b^{t-m}$ gilt, genau b^t Punkte von P liegen. Dementsprechend heißt eine Folge $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots$ von Punkten in I^s eine (t, s)-Folge in Basis b, wenn für alle $k \geq 0$ und $m > t$ die Punktmenge $P_{k,m} = \{\mathbf{x}_n : kb^m \leq n < (k + 1)b^m\}$ ein (t, m, s)-Netz ist.

Bemerkungen

- Die Van der Corput-Folge in Basis b ist eine $(0,1)$-Folge in Basis b
- (t,s)-Folgen in Basis 2 nennt man Sobol-Folgen