

Computermathematik (für Informatik)

3. Übungsblatt

19. 11. 2008

Die heutigen Übungen sollen mit dem Computeralgebrasystem **Sage** gelöst werden. Die Lösung der Beispiele soll auf möglichst kompakte Weise erfolgen. Wenn zum Beispiel eine Funktion für mehrere Werte berechnet werden soll, soll das mittels einer geeigneten Schleifen oder Listen Operation erfolgen, und **nicht** alle Werte einzeln eingetippt werden. Zwischenergebnisse welche in einem weiteren Berechnungsschritt benötigt werden, sollen in eine Variable gespeichert und weiterverwendet werden (**nicht** neu eintippen).

Übung 20. Bestimmen Sie den ganzzahligen Anteil und den Rest bei der Polynomdivision von:

$$\frac{x^8 + 2x^7 - 3x^5 + 2x^4 - x^3 + x - 3}{x^3 - 2x^2 - x - 1}$$

Hinweis: Definieren Sie sich den Zähler und Nenner jeweils als Polynome mit Koeffizienten in den rationalen Zahlen.

Übung 21. Bestimmen Sie die Partialbruchdarstellung der folgenden rationalen Funktion:

$$\frac{2x^5 + 11x^4 + 3x^3 - 19x^2 - 16x - 12}{x^6 + 2x^5 - 5x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x + 9}$$

Übung 22. Sei $s(a)$ die jeweils größte reelle Lösung der Gleichung

$$x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x - a = 0.$$

Schreiben Sie eine Funktion die $s(a)$ numerisch berechnet. Und zeichnen sie den Graphen der Funktion im Intervall $a \in [0, 100]$.

Hinweis: Verwenden Sie als Datentyp Polynome mit Koeffizienten in den reellen Zahlen.

Übung 23. Bestimmen Sie symbolisch den Wert der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!},$$

und überprüfen sie numerisch ob die Lösung korrekt sein kann.

Hinweis: Verwenden Sie das Maxima Interface von Sage, und den Maxima Befehl `simplify_sum` aus dem Maxima Paket `simplify_sum`.

Übung 24. Finden Sie eine geschlossene Formel für die Summe

$$\sum_{k=1}^n 3k^2 + 3k.$$

Beweisen Sie Ihre Formel durch vollständige Induktion. Die algebraischen Umformungen für diesen Beweis sollen natürlich auch mit Sage vorgenommen werden.

Hinweis: Verwenden Sie das Maxima Interface von Sage, und den Maxima Befehl `simplify_sum` aus dem Maxima Paket `simplify_sum`.

Übung 25. Eine *Partition* einer Menge A ist eine Zerlegung $A = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$ in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen $B_j \subseteq A$. Die Anzahl der verschiedenen Partitionen der Menge $A = \{1, 2, \dots, n\}$ in k nichtleere Teilmengen wird mit $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ bezeichnet. Diese Zahlen heißen *Stirlingsche Zahlen der 2. Art* und sie erfüllen die Rekursion

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}.$$

- (a) Schreiben Sie eine Funktion `num_of_partitions(n, k)` die $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ berechnet. Und erstellen Sie eine Tabelle mit allen Werten der Stirling Zahlen 2. Art für $n, k \leq 10$.
- (b) Berechnen Sie mit Ihrer Funktion $\left\{ \begin{matrix} 100 \\ 55 \end{matrix} \right\}$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der eingebauten Funktion `stirling_number2`

Übung 26. Die *Chebyshev-Polynome* sind definiert durch die Rekursionsformel: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ und für $n > 1$:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Schreiben Sie eine Funktion `chebyshev(n)` die das n -te Chebyshev-Polynom berechnet.

- (a) Berechnen Sie die ersten 10 Chebyshev-Polynome.
- (b) Schreiben Sie eine Tabelle der ersten 10 Chebyshev-Polynome in die Datei `tabelle.tex`. Schreiben Sie ein \LaTeX -Dokument `chebyshev.tex` welches die Datei `tabelle.tex` einliest und die Tabelle ausgibt. Das Ergebnis soll ungefähr folgendermassen aussehen:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ &\vdots \end{aligned}$$

- (c) Erzeugen Sie den Graphen der Chebyshev-Polynome $T_0(x), \dots, T_5(x)$ (alle Polynome sollen gemeinsam in ein Bild gezeichnet werden).
- (d) Finden Sie heraus wie man Sage Grafiken in eine PDF-Datei exportieren kann. Exportieren Sie den Graphen aus Punkt (c) und binden Sie in das Dokument `chebyshev.tex` ein.

Hinweis: Falls sie Punkt (a) nicht lösen, können Sie für die Punkte (b)-(d) auch die eingebaute Funktion `chebyshev_T` verwenden.

Übung 27. Eine *Hypotrochoide* ist eine in Parameterform definierte Kurve:

$$\begin{aligned} x(\phi) &= (R - r) \cos(\phi) + d \cos\left(\frac{R - r}{r} \phi\right) \\ y(\phi) &= (R - r) \sin(\phi) - d \sin\left(\frac{R - r}{r} \phi\right) \end{aligned}$$

Zeichnen Sie die Hypotrochoide für die Parameter ($R = 5$, $r = 4$, $d = 2$) und $0 \leq \phi \leq 8\pi$.

Hinweis: `parametric_plot`