Computermathematik (für Informatik)

4. Übungsblatt 3. 12. 2008

Die heutigen Übungen sollen mit dem Computeralgebrasystem **Sage** gelöst werden.
Die Lösung der Beispiele soll auf möglichst kompakte Weise erfolgen. Wenn zum Beispiel eine Funktion für mehrere Werte berechnet werden soll, soll das mittels einer geeigneten Schleifen oder Listen Operation erfolgen, und **nicht** alle Werte einzeln eingetippt werden. Zwischenergebnisse welche in einem weiteren Berechnungsschritt benötigt werden, sollen in eine Variable gespeichert und weiterverwendet werden (**nicht** neu eintippen).

Übung 28. Wir betrachten die durch

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + 1$$

rekursiv gegebene Folge. Aus Analysis T1 (Beispiel 15b) wissen Sie dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

(a) Bestimmen Sie die ersten 20 Folgenglieder mit 1000 Bits Genauigkeit.

(b) Bestimmen Sie das erste Folgenglied a_{n_ε} dass vom Grenzwert 2 einen Abstand von weniger als ε hat, für $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$. Geben Sie auch jeweils den Index n_ϵ an.

(c) Bestimmen Sie das erste Folgenglied a_{n_ε} das vom nächsten Folgenglied $a_{n_\varepsilon+1}$ einen Abstand von weniger als ε hat, für $\varepsilon = 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}$. Geben Sie auch jeweils den Index n_ε an.

(d) Wir bilden aus a_n eine neue Folge b_n durch

$$b_n = a_{n+2} - \frac{(a_{n+2} - a_{n+1})^2}{a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n},$$

dann hat b_n genau den selben Grenzwert wie die Folge a_n.

Berechnen Sie Punkt (b) für die Folge b_n. Was fällt auf?

Übung 29. *Trapezregel*

(a) Schreiben Sie eine Funktion `trapez(f, a, b, n)` die das Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

näherungsweise mit Hilfe der Trapezregel mit Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$ berechnet.

Die Trapezregel besagt:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(a \ + \ h \cdot \frac{2i-1}{2}\right).$$

(b) Die Fehlerabschätzung für diese Approximation lautet:

$$|E(f)| \leq \frac{b-a}{24}\ h^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Erweitern Sie ihre Funktion `trapez` so, dass sie sowohl eine Näherung für das Integral, als auch die Fehlerabschätzung berechnet.

Überprüfen Sie ihre Funktion anhand einiger Beispiele, und vergleichen Sie das Ergebnis mit der eingebauten Funktion `integral_numerical`.

Übung 30. Das *Interpolationspolynom* $p(x)$ zu den Stützwerten

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

ist das eindeutige Polynom n-ten Grades, für das gilt:

$$p(x_i) = y_i.$$

Das heisst das Polynom $p(x)$ geht durch alle Punkte (x_i, y_i).

(a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom für die Stützwerte:

$$(1,\ 5),\ (3,\ 2),\ (6,\ 7),\ (7,\ 2),\ (8,\ 2)$$

(b) Schreiben Sie eine Funktion in Sage, die für n im Intervall $[-1, 1]$ gleichmässig verteilte Werte x_i die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

berechnet, und aus diesen Daten das zugehörige Interpolationspolynom bestimmt.

Verleichen Sie die Interpolationspolynome für $n = 6, 10, 20$ graphisch mit der Funktion $f(x)$.

Wird die Funktion gut approximiert?

(c) Machen Sie das selbe wie in Punkt (b) nur wählen Sie diesmal n Stützstellen der Form

$$x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right).$$

Wird die Funktion gut approximiert?

Hinweis: Verwenden Sie die Maxima Funktion `lagrange` aus dem Maxima Paket `interpol` zur Berechnung des Interpolationspolynoms.