Computermathematik (für Informatik)

5. Übungsblatt 14. 01. 2009

Die heutigen Übungen sollen mit dem Computeralgebrasystem **Sage** gelöst werden.
Die Lösung der Beispiele soll auf möglichst kompakte Weise erfolgen. Wenn zum Beispiel eine Funktion für mehrere Werte berechnet werden soll, soll das mittels einer geeigneten Schleifen oder Listen Operation erfolgen, und **nicht** alle Werte einzeln eingetippt werden. Zwischenergebnisse welche in einem weiteren Berechnungsschritt benötigt werden, sollen in eine Variable gespeichert und weiterverwendet werden (**nicht** neu eintippen).

Übung 31. Die Datei `bsp31.data` (Sie finden sie auf der Homepage der Vorlesung) enthält numerische Daten von der Form:

$$\begin{matrix} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \\ & \vdots \\ x_n & f(x_n) \end{matrix}$$

Wir wissen die Funktion f ist ungefähr von der Form

$$f(x) = a \cdot \exp(-b \cdot \sin(c \cdot x + \varphi)).$$

(a) Lesen Sie die Datei `bsp31.data` in Sage ein, und geben Sie die Daten grafisch aus.

Hinweis: Sie können die Funktion `get_remote_file` verwenden um eine Datei direkt aus dem Internet in Sage zu laden.

(b) Bestimmen Sie die reellen Parameter a, b und c derart, dass f die Daten möglichst gut interpoliert. Visualisieren Sie ihr Ergebnis.

Hinweis: Verwenden Sie die Funktion `find_fit`. Sie finden diese Funktion in der Datei `find_fit.sage` auf der Homepage der Vorlesung.

Übung 32. Die Newton-Iteration ist ein numerisches Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen einer Funktion f. Sie ist definiert durch die rekursive Folge:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

und einem Startwert x_0.
Schreiben Sie einen Generator `newton(f, x0)`, der für eine gegebene Funktion f und dem Startwert $x0$ die Newton Iteration durchführt.
Schreiben Sie auch eine geeignete Abbruchbedingung für die Iteration.

(a) Verwenden Sie Ihren Generator um eine Nullstelle von

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$$

zu bestimmen. Verwenden Sie als Startwert $x_0 = 0$.

(b) Verwenden Sie nun die folgenden Startwerte: $-4, -3, -2, -1, 0, 1$

Versuchen Sie anhand des Funktionsgraphen von f das Verhalten des Newton-Verfahrens für die verschiedenen Startwerte zu erklären.

Achtung: Die Newton-Iteration funktioniert vielleicht nicht für alle Startwerte.

Hinweis: Beispiele für Generatoren finden Sie in der Musterlösung zu Beispiel 28.

Übung 33. Schreiben Sie eine Funktion `taylor_polynom(f, x, x0, n)` die das Taylor Polynom vom Grad n der Funktion $f(x)$ mit Entwicklungspunkt $x0$ berechnet.

(a) Vergleichen Sie Ihre Funktion anhand einiger selbstgewählter Beispiele mit der eingebauten Funktion `taylor`.

(b) Stellen Sie sicher, dass `taylor_polynom` auch für Funktionen mit Parametern richtig funktioniert, und verwenden Sie sie um das Taylor Polynom vom Grad 10 mit den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für die Funktion

$$f(x) = \sin(a \cdot x)$$

zu berechnen.