

# Computermathematik (für Informatik)

Hausübung

Jänner 2009

---

*Aufgabenstellung:* 4

*Abgabetermin:* 28. 02. 2009

## Aufgabe 1 (Kurvendiskussion).

- (a) Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) = \frac{2x - 2}{\log(x - 1)}$$

mit Hilfe von Sage durch. Gehen Sie insbesondere auf die folgenden Punkte ein: Definitionsbereich, Stetigkeitsbereich, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Monotonie, Krümmungsverhalten, Verhalten am Rande des Definitionsbereiches.

- (b) Setzen Sie die Kurvendiskussion in  $\LaTeX$ . Die einzelnen Rechenschritte sollen in vollständigen Sätzen beschrieben werden. Alle Zwischenschritte sind anzugeben. Fügen Sie ausserdem eine in Sage erzeugte Graphik hinzu, die alle wichtigen Eigenschaften der Funktion  $f$  darstellt.
- 

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie den folgenden Grenzwert und setzen Sie die Lösung in  $\LaTeX$ . Die einzelnen Rechenschritte sollen in vollständigen Sätzen beschrieben werden. Alle Zwischenschritte sind anzugeben.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}.$$

---

## Aufgabe 3 (Newton Interpolation).

Das Interpolationspolynom zu  $n + 1$  paarweise verschiedene Stützstellen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  und Werten  $y_0, y_1, \dots, y_n$  ist das Polynom  $p$  kleinsten Grades, für das gilt:

$$p(x_i) = y_i \quad \text{für alle } i = 0, \dots, n$$

Eine Möglichkeit dieses Problem zu lösen, ist mit Hilfe des **Newton'schen Interpolationsverfahren**. Dafür wählt man den folgenden Ansatz für das Interpolationspolynom:

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Die Koeffizienten  $c_0, c_1, \dots, c_n$  werden mit dem folgenden Differenzenschema berechnet:

$x_0$	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
$x_1$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
$x_2$	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
$x_3$	$f[x_3]$			
$\vdots$	$\vdots$			

Dabei werden die Ausdrücke  $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]$  folgendermassen rekursiv berechnet:

$$f[x_k] = y_k$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Die Koeffizienten des Interpolationspolynoms  $p(x)$  sind dann gegeben als:

$$c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k], \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n$$

**Beispiel:** Man berechne das Interpolationspolynom  $p(x)$  aus den Interpolationswerten:

$x_k$	-3	0	1	2	3
$y_k$	1	-1	0	1	0

---

-3	1				
		$\frac{-1-1}{0-(-3)} = -\frac{2}{3}$			
0	-1		$\frac{1-(-\frac{2}{3})}{1-(-3)} = \frac{5}{12}$		
		$\frac{0-(-1)}{1-0} = 1$		$\frac{0-\frac{5}{12}}{2-(-3)} = -\frac{1}{12}$	
1	0		$\frac{1-1}{2-0} = 0$		$\frac{-\frac{1}{3}-(-\frac{1}{12})}{3-(-3)} = -\frac{1}{24}$
		$\frac{1-0}{2-1} = 1$		$\frac{-1-0}{3-0} = -\frac{1}{3}$	
2	1		$\frac{-1-1}{3-1} = -1$		
		$\frac{0-1}{3-2} = -1$			
3	0				

Das Interpolationspolynom lautet somit:

$$p(x) = 1 - \frac{2}{3}(x+3) + \frac{5}{12}(x+3)x - \frac{1}{12}(x+3)x(x-1) - \frac{1}{24}(x+3)x(x-1)(x-2)$$

$$= -\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{13}{24}x^2 + \frac{7}{12}x - 1$$

Schreiben Sie eine Funktion `newton_interpolation(data)` die das Newton'sche Interpolationsverfahren implementiert.

**Input:** `data` – Liste mit Interpolationspunkten in der Form

$$[(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)].$$

**Output:** das Interpolationspolynom

---

#### Aufgabe 4 (Polynom Arithmetik).

Ein Polynom lässt sich darstellen als Liste von Koeffizienten. Also entspricht dem Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

die Liste  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ .

Sage-Polynome können mit der Methode `.list()` in diese Form konvertiert werden. Zum Beispiel:

```
sage: R.<t> = QQ[]
sage: p = 4 + 3*t^2 - t^4
sage: p.list()
[4, 0, 3, 0, -1]
```

Schreiben Sie Funktionen, welche die Grundrechenarten für Polynome in Listendarstellung implementieren. Gefordert sind die folgenden Funktionen:

- `poly_add(p1, p2)`  
**Input:**  $p1, p2$  – Polynome in Listendarstellung  
**Output:** Die Summe von  $p1$  und  $p2$  in Listendarstellung
- `poly_sub(p1, p2)`  
**Input:**  $p1, p2$  – Polynome in Listendarstellung  
**Output:** Die Differenz von  $p1$  und  $p2$  in Listendarstellung
- `poly_mult(p1, p2)`  
**Input:**  $p1, p2$  – Polynome in Listendarstellung  
**Output:** Das Produkt von  $p1$  und  $p2$  in Listendarstellung
- `poly_div(p1, p2)`  
**Input:**  $p1, p2$  – Polynome in Listendarstellung  
**Output:** Ein Paar  $(q, r)$  wobei  $q$  der ganzzahlige Anteil und  $r$  der Rest bei Polynomdivision von  $p1 : p2$  ist.  $q, r$  beide in Listendarstellung
- `poly_eval(p, x)`  
**Input:**  $p$  – Polynom in Listendarstellung  
 $x$  – eine Zahl  
**Output:** Der Wert des Polynoms  $p$  an der Stelle  $x$ .
- `poly_latex(p)`  
**Input:**  $p$  – Polynom in Listendarstellung  
**Output:** Ein String mit einer  $\text{\LaTeX}$ -Darstellung des Polynoms  $p$ .

Die in Sage eingebauten Funktionen zur Polynomarithmetik dürfen **nicht** verwendet werden.

---