

Computermathematik (für Informatik)

Hausübung

Jänner 2009

Aufgabenstellung: 8

Abgabetermin: 28. 02. 2009

Aufgabe 1 (Kurvendiskussion).

- (a) Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) = \frac{2x - 2}{\log(x - 1)}$$

mit Hilfe von Sage durch. Gehen Sie insbesondere auf die folgenden Punkte ein: Definitionsbereich, Stetigkeitsbereich, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Monotonie, Krümmungsverhalten, Verhalten am Rande des Definitionsbereiches.

- (b) Setzen Sie die Kurvendiskussion in \LaTeX . Die einzelnen Rechenschritte sollen in vollständigen Sätzen beschrieben werden. Alle Zwischenschritte sind anzugeben. Fügen Sie ausserdem eine in Sage erzeugte Graphik hinzu, die alle wichtigen Eigenschaften der Funktion f darstellt.

Aufgabe 2. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert und setzen Sie die Lösung in \LaTeX . Die einzelnen Rechenschritte sollen in vollständigen Sätzen beschrieben werden. Alle Zwischenschritte sind anzugeben.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{5 \cos x - \cos(5x)}{5 \cot x - \cot(5x)}.$$

Aufgabe 3 (Newton Interpolation).

Das Interpolationspolynom zu $n + 1$ paarweise verschiedene Stützstellen x_0, x_1, \dots, x_n und Werten y_0, y_1, \dots, y_n ist das Polynom p kleinsten Grades, für das gilt:

$$p(x_i) = y_i \quad \text{für alle } i = 0, \dots, n$$

Eine Möglichkeit dieses Problem zu lösen, ist mit Hilfe des **Newton'schen Interpolationsverfahren**. Dafür wählt man den folgenden Ansatz für das Interpolationspolynom:

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Die Koeffizienten c_0, c_1, \dots, c_n werden mit dem folgenden Differenzenschema berechnet:

| | | | | |
|----------|----------|---------------|--------------------|-------------------------|
| x_0 | $f[x_0]$ | | | |
| | | $f[x_0, x_1]$ | | |
| x_1 | $f[x_1]$ | | $f[x_0, x_1, x_2]$ | |
| | | $f[x_1, x_2]$ | | $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ |
| x_2 | $f[x_2]$ | | $f[x_1, x_2, x_3]$ | |
| | | $f[x_2, x_3]$ | | |
| x_3 | $f[x_3]$ | | | |
| \vdots | \vdots | | | |

Dabei werden die Ausdrücke $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]$ folgendermassen rekursiv berechnet:

$$f[x_k] = y_k$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Die Koeffizienten des Interpolationspolynoms $p(x)$ sind dann gegeben als:

$$c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k], \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n$$

Beispiel: Man berechne das Interpolationspolynom $p(x)$ aus den Interpolationswerten:

| | | | | | |
|-------|----|----|---|---|---|
| x_k | -3 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y_k | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 |

| | | | | | |
|----|----|--------------------------------------|--|---|---|
| -3 | 1 | | | | |
| | | $\frac{-1-1}{0-(-3)} = -\frac{2}{3}$ | | | |
| 0 | -1 | | $\frac{1-(-\frac{2}{3})}{1-(-3)} = \frac{5}{12}$ | | |
| | | $\frac{0-(-1)}{1-0} = 1$ | | $\frac{0-\frac{5}{12}}{2-(-3)} = -\frac{1}{12}$ | |
| 1 | 0 | | $\frac{1-1}{2-0} = 0$ | | $\frac{-\frac{1}{3}-(-\frac{1}{12})}{3-(-3)} = -\frac{1}{24}$ |
| | | $\frac{1-0}{2-1} = 1$ | | $\frac{-1-0}{3-0} = -\frac{1}{3}$ | |
| 2 | 1 | | $\frac{-1-1}{3-1} = -1$ | | |
| | | $\frac{0-1}{3-2} = -1$ | | | |
| 3 | 0 | | | | |

Das Interpolationspolynom lautet somit:

$$p(x) = 1 - \frac{2}{3}(x+3) + \frac{5}{12}(x+3)x - \frac{1}{12}(x+3)x(x-1) - \frac{1}{24}(x+3)x(x-1)(x-2)$$

$$= -\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{13}{24}x^2 + \frac{7}{12}x - 1$$

Schreiben Sie eine Funktion `newton_interpolation(data)` die das Newton'sche Interpolationsverfahren implementiert.

Input: `data` – Liste mit Interpolationspunkten in der Form

$$[(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)].$$

Output: das Interpolationspolynom

Aufgabe 4 (Polynom Arithmetik).

Ein Polynom lässt sich darstellen als Liste von Koeffizienten. Also entspricht dem Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

die Liste $[a_0, a_1, \dots, a_n]$.

Sage-Polynome können mit der Methode `.list()` in diese Form konvertiert werden. Zum Beispiel:

```
sage: R.<t> = QQ[]
sage: p = 4 + 3*t^2 - t^4
sage: p.list()
[4, 0, 3, 0, -1]
```

Schreiben Sie Funktionen, welche die Grundrechenarten für Polynome in Listendarstellung implementieren. Gefordert sind die folgenden Funktionen:

- `poly_add(p1, p2)`
Input: $p1, p2$ – Polynome in Listendarstellung
Output: Die Summe von $p1$ und $p2$ in Listendarstellung
- `poly_sub(p1, p2)`
Input: $p1, p2$ – Polynome in Listendarstellung
Output: Die Differenz von $p1$ und $p2$ in Listendarstellung
- `poly_mult(p1, p2)`
Input: $p1, p2$ – Polynome in Listendarstellung
Output: Das Produkt von $p1$ und $p2$ in Listendarstellung
- `poly_div(p1, p2)`
Input: $p1, p2$ – Polynome in Listendarstellung
Output: Ein Paar (q, r) wobei q der ganzzahlige Anteil und r der Rest bei Polynomdivision von $p1 : p2$ ist. q, r beide in Listendarstellung
- `poly_eval(p, x)`
Input: p – Polynom in Listendarstellung
 x – eine Zahl
Output: Der Wert des Polynoms p an der Stelle x .
- `poly_latex(p)`
Input: p – Polynom in Listendarstellung
Output: Ein String mit einer \LaTeX -Darstellung des Polynoms p .

Die in Sage eingebauten Funktionen zur Polynomarithmetik dürfen **nicht** verwendet werden.
