Sage Tutorium 1

Inhaltsverzeichnis

1. Sage als Taschenrechner
2. Symbolisches Rechnen
3. Plotten von Funktionen
4. Interaktive Programme
5. Kontrollstrukturen
6. Definieren von Funktionen

Sage als Taschenrechner

Man kann Sage einfach als **sehr** mächtigen Taschenrechner verwenden. Es werden dabei Zahlen mit beliebiger Genauigkeit unterstützt, ebenso Brüche und komplexe Zahlen. Für viele Berechnungen werden exakte Ergebnisse geliefert.

Um eine Rechnung auszuführen, geben wir die Rechnung in eine Zelle ein und drücken dann **Umschalt + Enter** um die Berechnung zu starten.

```
1 + 1
```

    2

```
(2 * 2 + 5)/3
```

    3

Exponentation

```
2^10
```

    1024

Langzahlarithmetik

```
2^1000
```

    1071508607186267320948425049060001810561404811705533607443750388370
    510511249361224931983788156958581275946729175531468251871452856923
    0435984577574698574803934567774824230985421074605062371141877954182
    530464749835819412673987675591655439460770629145711964776865421676
    429831652624386837205668069376

Bruchrechnen

```
1/6 + 7/12
```

    3/4

Komplexe Zahlen

```
sqrt(-4)
```

```
2*I
```

```
I^2
```

```
-1
```

Realteil

```
real((1 + I)/(1 - I))
```

```
0
```

Imaginärteil

```
imag((1 + I)/(1 - I))
```

```
1
```

Exakte Auswertung mathematischer Funktionen

```
sin(pi/2)
```

```
1
```

```
sin(pi/3)
```

```
sqrt(3)/2
```

```
sin(pi/4)
```

```
1/sqrt(2)
```

Um Ungeleichungen exakt auszuwerten, müssen wir sie in einen Wahrheitswert umwandeln.

```
bool(sqrt(2) < 2 * sin(pi/3))
```

```
True
```

Gleitkommaarithmetik mit beliebiger Genauigkeit

```
numerical_approx(pi, digits = 400)
```

```
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230
81640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058
22317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644
28810975665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610
45432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925
409171536436789259036001133053054882046652138414695194151160
```

Dasselbe in objektorientierter Notation

```
(pi + e^2).n(digits = 1000)
```

```
10.530648752520443465693070843854510697377484969926953145062072414
0390202365266762012347310421238862755901247778761172770978448302331
5560620375162152655889235040699830934927480795097557049963701696378
6984588438743376671107308831095292457066858818372749804549942236496
9792226388943380567355552448789045405830291010381204795079692408512
7801498812897048093035647254337983403014542652297161592863442315991
3351013859712482744139603303671979283928124150602143815127097154269
7724018260646790180240831766089645303536522834565892899274792918001
0093729617333369278105300058305767541627736043428953362070924906013
3387951819997375030900275864385188370292633170728725818129003756751
9354611897429482940373819664763755114126142981090362351601313246056
8645832842067385414023361513679088972798600438648896389142901008412
9096137351724467366899876816250727486428981207957815392351866099129
8539990136393143290671564305390008578501753092962932683468669173048
5948408910465623063448527807274335625240795500791468915150064000945
0027
```

Bei längeren Berechnungen ist es sinnvoll sich zuerst einen

geeigneten Datentyp zu definieren.

```
R = RealField(1000) # Praezision in Bits
```

```
a = R(pi + 2 * cos(sqrt(2))) # ist aequivalent zu a = (pi +
2*cos(sqrt(2))).n(prec=1000)
a
```

```
3.45348004312054218537193934109668216744606390015771653475576512778
8194485392799158383948858603787212764074422124493433029780972406979
1967014729041412298513457046040369011630482931031544886724239946785
7761079241574053184885496625498252454523664605727741827887817599528
69501839305499660252464797407
```

```
type(a)
```

```
<type 'sage.rings.real_mpfr.RealNumber'>
```

```
parent(a)
```

```
Real Field with 1000 bits of precision
```

Achtung: Kommen Zahlen unterschiedlicher Präzision in einer Rechnung vor, dann hat das Ergebnis immer die kleinste Präzision. Konstanten müssen also manuell zu einer Zahl mit hoher Präzision konvertiert werden.

```
parent(0.1)
```

```
Real Field with 53 bits of precision
```

Falsch:

```
a1 = 2 * a + 0.1
a1; parent(a1)
```

```
7.00696008624108
Real Field with 53 bits of precision
```

Falsch: Hier wird mit $2a + 0.1$ mit niedriger Präzision berechnet, und danach das Ergebnis zu einer Zahl mit 1000 Bit Präzision konvertiert

```
b = R(2 * a + 0.1)
b; parent(b)
```

```
7.006960086241083907054871815489605069160461425781250000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000
Real Field with 1000 bits of precision
```

Richtig:

```
c = 2 * a + R(0.1)
c; parent(c)
```

```
7.00696008624108437074387868219336433489212780031543306951153025557
6388970785598316767897717207574425528148844248986866059561944813959
3934029458082824597026914092080738023260965862063089773448479893570
5522158483148106369770993250996504909047329211455483655775635199056
39003678610999320504929594815
Real Field with 1000 bits of precision
```

Symbolisches Rechnen

Symbolische Variablen müssen deklariert werden.

```
var('x, y, z')
```

```
(x, y, z)
```

```
expr1 = (x + y + z)^3
expr1
```

```
(z + y + x)^3
```

```
type(expr1); parent(expr1)
```

```
<class 'sage.calculus.calculus.SymbolicArithmetic'>
Symbolic Ring
```

Anzeige in mathematischer Notation

```
view(expr1)
```

$(z + y + x)^3$

Ausmultiplizieren

```
view(expand(expr1))
```

$z^3 + 3yz^2 + 3xz^2 + 3y^2z + 6xyz + 3x^2z + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3$

Faktorisieren

```
expr2 = (x^2 - 2 * x * y + y^2)
view(expr2)
```

$y^2 - 2xy + x^2$

```
view(factor(expr2))
```

$(x - y)^2$

Substitution von Variablen und Termen

```
expr3 = expr2(y = sin(z^2))
view(expr3)
```

$(\sin(z^2))^2 - 2x\sin(z^2) + x^2$

```
expr3.subs_expr(sin(z^2) == y)
```

```
y^2 - 2*x*y + x^2
```

Differentialrechnung

```
diff(x * sin(x), x)
```

```
sin(x) + x*cos(x)
```

Polynome

Wir konstruieren einen Datentyp für Polynome in der Variablen t, und Koeffizienten aus den Rationalen Zahlen ($\mathbf{Q}$).

```
P.<t> = QQ[]
type(P)
```

```
<class
'sage.rings.polynomial.polynomial_ring.PolynomialRing_field'>
```

gen() gibt die Variable des Polynoms zurück.

```
P.gen()
```

```
t
```

Wir definieren uns einige Polynome

```
p1 = (1/2 * t - 3/2) * (t - 1/4)
view(p1)
```

$\frac{1}{2}t^2 - \frac{13}{8}t + \frac{3}{8}$

roots() berechnet die Nullstellen eines Polynoms zusammen mit ihren Vielfachheiten.

```
p1.roots()
```

```
[(3, 1), (1/4, 1)]
```

Probe durch Einsetzen.

```
p1(3); p1(1/4)
```

```
0
0
```

degree() berechnet den Grad des Polynoms.

```
p1.degree()
```

```
2
```

```
p2 = (1 + t - t^2)^3
view(p2)
```

$-t^6 + 3t^5 - 5t^3 + 3t + 1$

```
parent(p2)
```

```
Univariate Polynomial Ring in t over Rational Field
```

Standardmäßig berechnet roots() nur Nullstellen in der selben Grundmenge in der die Koeffizienten des Polynoms liegen. In unserem Fall $\mathbf{Q}$. Unser Polynom hat keine rationalen Nullstellen.

```
p2.roots()
```

```
[]
```

Wir können die Grundmenge aber auch explizit angeben. Hier berechnen wir alle reellen Nullstellen.

```
p2.roots(ring = RR)
```

```
[(-0.618031057174341, 1), (1.61804465415111, 1)]
```

Um sämtliche Nullstellen zu bekommen, brauchen wir komplexe Zahlen.

```
p2.roots(ring = CC)
```

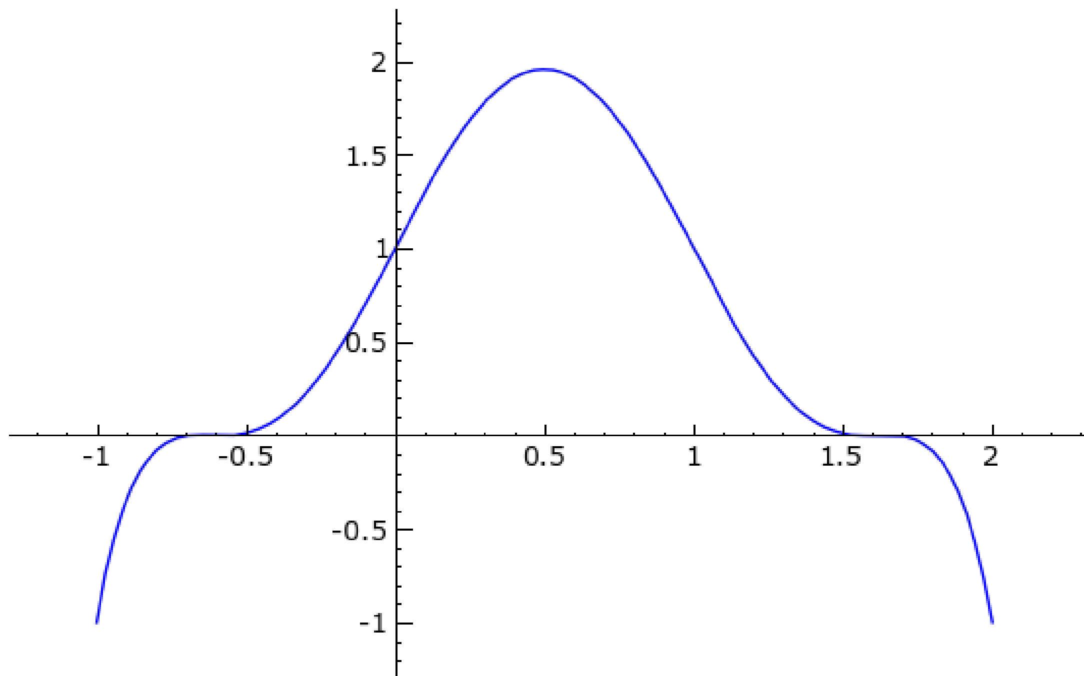
```
[(-0.618031057174341, 1), (1.61804465415111, 1), (1.61802865604929
9.23641138258941e-6*I, 1), (1.61802865604929 -
9.23641138258941e-6*I, 1), (-0.618035454537672 +
2.53887260392275e-6*I, 1), (-0.618035454537672 -
2.53887260392275e-6*I, 1)]
```

Plotten von Funktionen

Sage verfügt über vielfältige High-level Funktionen zum Plotten von Funktionen.

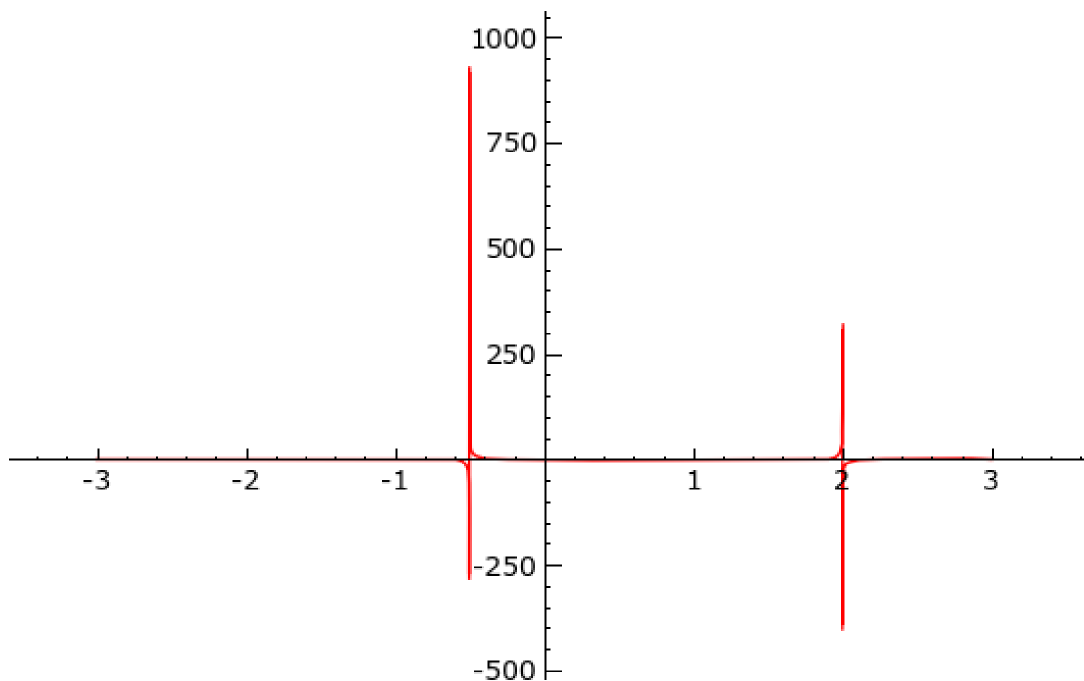
Wir plotten das Polynom $p_2 = -t^6 + 3t^5 - 5t^3 + 3t + 1$ im Interval $[-1, 2]$.

```
plot(p2, -1, 2)
```



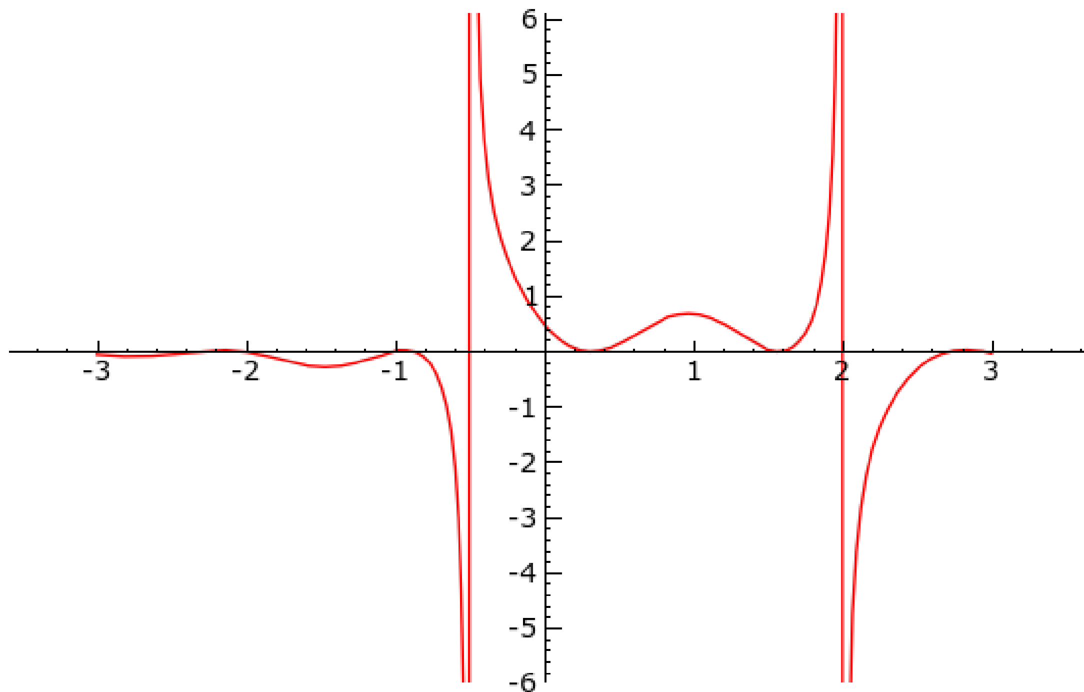
Plot einer Funktion mit Polstellen. Es sind leider keine Details sichtbar.

```
plot((sin(5 * x) - 1)/(2 * x^2 - 3 * x - 2), (x, -3, 3), rgbcolor =
'red')
```



Für ein besseres Ergebnis müssen wir den den Ausschnitt explizit auswählen.

```
plot2 = plot((sin(5 * x) - 1)/(2 * x^2 - 3 * x - 2), (x, -3, 3),
rgbcolor = 'red')
plot2.show(ymin = -5, ymax = 5)
```



Interaktive Programme

Sage bietet die Möglichkeit kleine interaktive Progamme in das Notebook einzubinden (Siehe die Dokumentation zu interact). Weitere Beispiele für interact finden im Sage-Wiki.

Das folgende Beispiel visualisiert die Taylorpolynome der Funktion $f(x) = \sin(x) \cdot e^{-x}$.

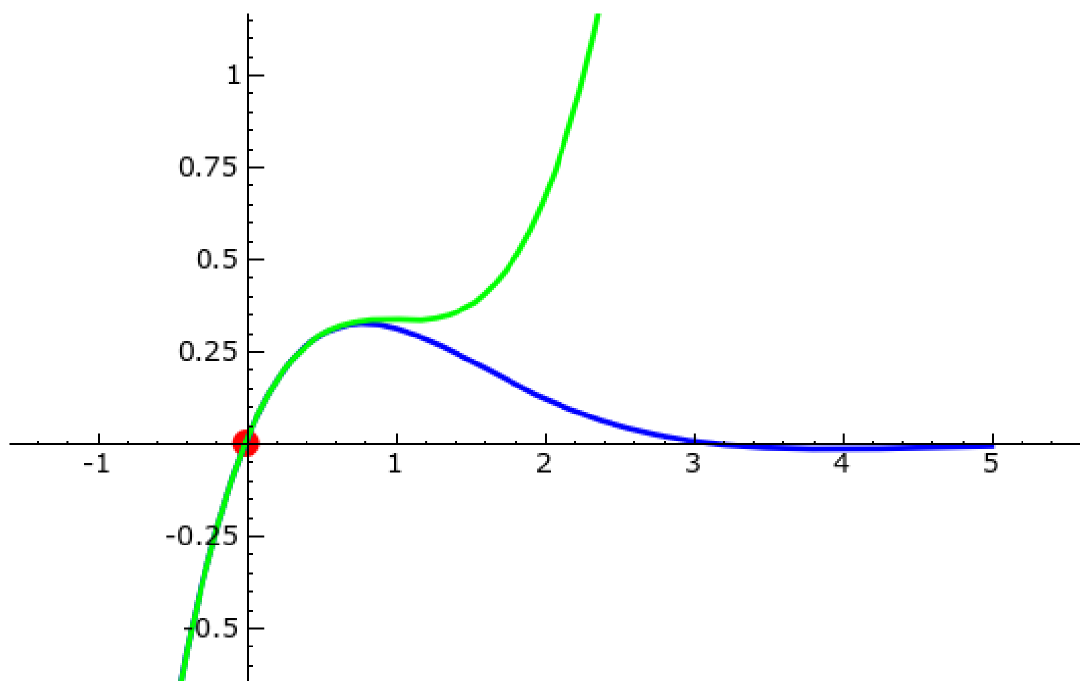
```
var('x')
f = sin(x) * e^(-x)
p = plot(f, -1, 5, thickness = 2)
html('<h2>Taylor Polynome</h2>')

@interact
def _(x0 = input_box(0, label = "x0="),
     order = slider(0, 12, 1, label = "Ordnung: ", default = 3)):

   ft = f.taylor(x, x0, order)
   pt = plot(ft, -1, 5, color = 'green', thickness = 2)
   dot = point((x0, f(x0)), pointsize = 80, rgbcolor = (1, 0, 0))
   html('$f(x) = %s$' % latex(f))
   html('$\hat{f}(x;%s) = %s + \mathcal{O}(x^{%s})$' % (latex(x0),
latex(ft), order + 1))
   (dot + p + pt).show(ymin = -.5, ymax = 1)
```

Taylor Polynome

x0= 0

Ordnung:

$f(x) = e^{-x}\sin(x)$
$\hat{f}(x;0) = x - x^2 + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)$



Datentypen

Die wichtigsten Datentypen in Sage/Python sind:

- Tupel
- Listen
  - Erzeugen von Listen
  - Kurznotation für Arithmetische Progressionen
  - List Comprehensions
- Strings
- Dictionaries
- Mengen

Tupel

Tupel sind ähnlich wie Listen, nur können einmal erstellte Tupel nicht mehr verändert werden (immutable). Tupel sind besonders nützlich, um mehrere Werte gleichzeitig von einer Funktion zurückzugeben.

```
a = 1, 2, 3
a; type(a)
```

```
(1, 2, 3)
<type 'tuple'>
```

```
a[0]; a[1]; a[2]
```

```
1
2
3
```

Die Funktion xgcd(a, b) berechnet den kleinsten gemeinsamen Teiler von a und b mit Hilfe des erweiterten Euclidschen Algrithmus und gibt das Ergebnis als Tupel von drei Zahlen zurück.

```
t = xgcd(14, 25)
t
```

```
(1, -16, 9)
```

Man kann die Elemente des Tupels auch direkt einzelnen Variablen zuweisen (Tupel unpacking).

```
a1, a2, a3 = xgcd(14, 25)
a2
```

```
-16
```

Simultanes vertauschen zweier Variablen

```
t1 = 10
t2 = cos(x)
t1; t2
```

```
10
cos(x)
```

```
t1, t2 = t2, t1

t1; t2
```

```
cos(x)
10
```

Listen

Listen sind wahrscheinlich der wichtigste Datentyp in Sage/Python. Der wichtigste Unterschied zu Tupeln ist dass Listen veränderbar (mutable) sind. Sie können Elemente zu Listen hinzufügen, löschen, verändern. Das ist bei Tupeln nicht möglich.

Einige Operationen auf Listen:

- [] erzeugt die leere Liste
- len(L) bestimmt die Länge der Liste
- L[k] greift auf das Element an der Stelle k zu. Allerdings beginnt die Nummerierung bei 0. Die gültigen Indizes für eine Liste der Länge n sind also die Werte 0,...n-1.
- L[-k] greift auf das k.-te Element der Liste gezählt von hinten zu. -n,...,-1, (das entspricht (n)-n,...(n)-1) sind hier die gültigen Werte.
- L[i:k] greift auf den Bereich L[i],..,L[k-1] zu.
- L.append(elem) fügt elem ans Ende der Liste L hinzu.
- L1+L2, die Listen L1 und L2 werden aneinandergehängt.

```
L = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
L
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

```
len(L)
```

```
10
```

```
print L[0] # erstes Element
print L[1] # zweites Element
print L[-1] # letztes Element
print L[2:5] # ein Teil der Liste
```

```
1
2
10
[3, 4, 5]
```

Hinzufügen von Elementen

```
L.append(11)
print "Liste:", L
print "Anzahl der Elemente:", len(L)
```

```
Liste: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]
Anzahl der Elemente: 11
```

Ersetzen von Elementen und Teillisten

```
L[0] = "Hallo"
L
```

```
['Hallo', 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]
```

```
L[1:3] = 1/2
L
```

```
['Hallo', 1/2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]
```

```
L[2] = [pi^2/6, e]
L
```

```
['Hallo', 1/2, [pi^2/6, e], 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]
```

Sehr nützlich ist die Funktion zip, die ein Tupel von Listen in eine Liste von Tupeln verwandelt.

```
zip([1, 2, 3], ['a', 'b', 'c'], [sin, cos, tan])
```

```
[(1, 'a', sin), (2, 'b', cos), (3, 'c', tan)]
```

Erzeugen von Listen

- range(n) erzeugt die Liste $[0, 1, \ldots, n-1]$.
- range(i, j) erzeugt die Liste $[i, i+1, \ldots, j-1]$.
- range(i, j, step) erzeugt die Liste von i bis j (nicht inkludiert) mit Schrittweite step.

```
range(10)
```

```
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

```
range(0, 101, 20)
```

```
[0, 20, 40, 60, 80, 100]
```

```
range(10, 0, -1)
```

```
[10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]
```

srange ist ähnlich wie range, aber für Fließkommazahlen

```
srange(0, 1, 0.1, include_endpoint = True)
```

```
[0.000000000000000, 0.100000000000000, 0.200000000000000,
0.300000000000000, 0.400000000000000, 0.500000000000000,
0.600000000000000, 0.700000000000000, 0.800000000000000,
0.900000000000000, 1.00000000000000]
```

```
R = RealField(prec = 200)
srange(R(0), R(0.5), R(0.1))
```

```
[0.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000,
0.100000000000000000000000000000000000000000000000000000000000,
0.200000000000000000000000000000000000000000000000000000000000,
0.300000000000000000000000000000000000000000000000000000000000,
0.400000000000000000000000000000000000000000000000000000000000]
```

Kurznotation für Arithmetische Progressionen

Achtung: Diese Notation ist Sage spezifisch und funktioniert nicht in standard Python.

```
[1..100]
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,
20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36,
37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53,
54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70,
71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87,
88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100]
```

```
[1,3..10]
```

```
[1, 3, 5, 7, 9]
```

```
[0,0.2..1]
```

```
[0.000000000000000, 0.200000000000000, 0.400000000000000,
0.600000000000000, 0.800000000000000, 1.00000000000000]
```

List Comprehensions

List Comprehensions orientieren sich an mathematischer Mengenschreibweise, und sind eine Elegante Art um komplexe Listen zu generieren.

```
[x^2 for x in range(10)]
```
```
[0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81]
```
```
var('x')
[sin(x).diff(i) for i in [0..4]]
```
```
[sin(x), cos(x), -sin(x), -cos(x), sin(x)]
```
```
[x^2 for x in [1..20] if x % 2 == 0]
```
```
[4, 16, 36, 64, 100, 144, 196, 256, 324, 400]
```
```
[(x,y) for x in [-3..3] for y in [-2..2] if -1 <= x-y <= 1]
```
```
[(-3, -2), (-2, -2), (-2, -1), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (0, -1)
(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 2)]
```

Strings

Strings sind im wesentlichen Listen von Buchstaben, allerdings sind Strings aus Performencegründen **nicht mutable**, genauso wie Tupel.

```
s1 = "computer"
s2 = "mathematik"
s3 = "informatik"
```

```
s4 = s1.capitalize() + s2
s4
```
```
'Computermathematik'
```
```
s = s4 + " (%s)" % s3.capitalize()
s
```
```
'Computermathematik (Informatik)'
```
```
len(s)
```
```
31
```
```
s[8:18].capitalize()
```
```
'Mathematik'
```
```
s.split()
```
```
['Computermathematik', '(Informatik)']
```
```
s.upper()
```
```
'COMPUTERMATHEMATIK (INFORMATIK)'
```
```
suchstring = "Informatik"

istart=s.find(suchstring)
istart
```
```
20
```
```
s[istart:istart + len(suchstring)]
```
```
'Informatik'
```

Dictionaries

Ein Dictionary speichert Zuordnungen von je einem Wert zu einem Schlüsselwert

Einige nützliche Funktionen:

- {}, erzeugt ein leeres Dictionary
- d[s], gibt das Element mit Schlüssel s zurück
- keys(), gibt die Liste der Schlüssel zurück
- values(), die Liste der Werte
- items(), erzeugt eine Liste von allen (Schlüssel, Wert) Paaren
- has_key(s), gibt zurück, ob der Schlüssel s vorhanden ist

```
huss = {'name': 'Wilfried Huss', 'office': 'C305', 'email': 
'huss@finanz.math.tugraz.at'}
huss
```

```
{'name': 'Wilfried Huss', 'office': 'C305', 'email':
'huss@finanz.math.tugraz.at'}
```

```
huss['name']
```

```
'Wilfried Huss'
```

```
huss.keys()
```

```
['name', 'office', 'email']
```

```
huss.values()
```

```
['Wilfried Huss', 'C305', 'huss@finanz.math.tugraz.at']
```

```
huss.items()
```

```
[('name', 'Wilfried Huss'), ('office', 'C305'), ('email',
'huss@finanz.math.tugraz.at')]
```

```
huss.has_key('name'), huss.has_key('nachname')
```

```
(True, False)
```

```
for (key, value) in huss.iteritems():
 print key, ":", value
```

```
name : Wilfried Huss
office : C305
email : huss@finanz.math.tugraz.at
```

```
primzahlen = {}
p = 1;
for i in [1..30]:
 p = next_prime(p)
 primzahlen[p] = i

primzahlen
```

```
{2: 1, 3: 2, 5: 3, 7: 4, 11: 5, 13: 6, 17: 7, 19: 8, 23: 9, 29: 10,
31: 11, 37: 12, 41: 13, 43: 14, 47: 15, 53: 16, 59: 17, 61: 18, 67:
19, 71: 20, 73: 21, 79: 22, 83: 23, 89: 24, 97: 25, 101: 26, 103:
27, 107: 28, 109: 29, 113: 30}
```

```
p = 109
print "%d ist die %d. Primzahl" % (p, primzahlen[p])
```

```
109 ist die 29. Primzahl
```

Mengen

```
s1 = set([1..10])
s2 = set([5..15])
s3 = set([1, 1, 1, 1])
s1; s2; s3
```

```
set([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10])
set([5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15])
set([1])
```

```
s1.union(s2)
```

```
set([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15])
```

```
s1.intersection(s2)
```

```
set([5, 6, 7, 8, 9, 10])
```

```
s1.symmetric_difference(s2)
```

```
set([1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14, 15])
```

Kontrollstrukturen

Python die Programmiersprache von Sage verwendet Einrückungen zur Definition von Blöcken.

If-Statement

```
a = -4
if a > 0:
 print a, "ist positiv"
elif a < 0:
 print a, "ist negativ"
else:
 print a, "ist null"
```

```
-4 ist negativ
```

For-Schleife

```
for i in [1,2,3,4]:
 j = i^2
 print j
```

```
1
4
9
16
```

While-Schleife

```
i = 1
while i < 20:
 if i.is_prime():
   print "%2d ist eine Primzahl" % i
 i += 1
```

```
 2 ist eine Primzahl
 3 ist eine Primzahl
 5 ist eine Primzahl
 7 ist eine Primzahl
11 ist eine Primzahl
13 ist eine Primzahl
17 ist eine Primzahl
19 ist eine Primzahl
```

Definieren von Funktionen

```
def absolutbetrag(x):
 if x < 0:
   return -x
 else:
   return x
```

```
absolutbetrag(-3); absolutbetrag(6)
```

```
3
6
```

Selbstdefinierte Funktionen funktionieren automatisch für alle Typen, die alle in der Funktion verwendeten Methoden und Operationen unterstützen.
In unserem Beispiel:

- Vergleichsoperator <
- Negation -

```
R = RealField(prec = 200)
absolutbetrag(R.random_element(-10, -5))
```

```
6.3143950641973070900223374505923141912547366595474086604627
```