

Computermathematik (für Informatik)

3. Übungsblatt

25. 11. 2009

Die heutigen Übungen sollen mit dem Computeralgebrasystem **Sage** gelöst werden. Die Lösung der Beispiele soll auf möglichst kompakte Weise erfolgen. Wenn zum Beispiel eine Funktion für mehrere Werte berechnet werden soll, soll das mittels einer geeigneten Schleifen oder Listen Operation erfolgen, und **nicht** alle Werte einzeln eingetippt werden. Zwischenergebnisse welche in einem weiteren Berechnungsschritt benötigt werden, sollen in eine Variable gespeichert und weiterverwendet werden (**nicht** neu eintippen).

Übung 12. Bestimmen Sie die Anzahl der Stellen, sowie die Summe der Ziffern von $n!$ wobei n die Werte 1, 10, 100, 1000, 10000 und 100000 annimmt.

Hinweis: Verwenden Sie die Sage-Befehle: `factorial`, `digits`, `ndigits`

Übung 13. Untersuchen Sie, für welche $n \leq 30$ die Primfaktorzerlegung von $f(n) = n! - 1$ Primfaktoren mehrfach enthält. Geben sie eine Liste dieser Zahlen und ihrer Primfaktorzerlegungen aus.

Hinweis: `squarefree_part`, `factor`

Übung 14. Eine Zahl $M_p = 2^p - 1$ ist höchstens dann eine Primzahl wenn p selbst prim ist. Primzahlen dieser Form nennt man *Mersennesche Primzahlen*. Die größten bekannten Primzahlen haben diese Form. Es ist unbekannt, ob es unendlich viele *Mersennesche Primzahlen* gibt.

Bestimmen Sie für $p \leq 500$ alle *Mersenneschen Primzahlen*. Geben Sie Ihr Ergebnis als Tabelle mit den Spalten p und M_p an.

Hinweis: `is_prime`

Übung 15. Der älteste Algorithmus zur Berechnung von Primzahlen, ist der Sieb des Eratosthenes (Siehe: Wikipedia).

Schreiben Sie eine Funktion `sieb(n)`, die eine Liste aller Primzahlen $\leq n$ mit Hilfe des Siebes von Eratosthenes berechnet.

Achtung: Die in Sage eingebauten Funktionen zur Berechnung von Primzahlen, dürfen in diesem Beispiel nicht verwendet werden.

Übung 16. Bringen Sie den folgenden Ausdruck auf eine möglichst einfache Form

$$\left(\frac{(\sqrt{x^3} - \sqrt{8})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{x + \sqrt{2x} + 2} \right)^2 + \sqrt{(x^2 + 2)^2 - 8x^2}.$$

Übung 17. Finden Sie heraus wie man Grenzwerte mit Sage berechnet.

Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x^2+c} - \sqrt{x^2-c} + 1}$ für $c > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie den Befehl `assume` um den Definitionsbereich der Variable c einzuschränken.

Übung 18. Lösen Sie die Gleichung

$$e^{2x} + 3ae^x - \ln e^{-a^2/4} = 0,$$

in Abhängigkeit vom Parameter a . Testen Sie durch Einsetzen ob die Lösungen korrekt sind.