

Computermathematik (für Informatik)

5. Übungsblatt

13. 1. 2010

Die heutigen Übungen sollen mit dem Computeralgebrasystem **Sage** gelöst werden. Die Lösung der Beispiele soll auf möglichst kompakte Weise erfolgen. Wenn zum Beispiel eine Funktion für mehrere Werte berechnet werden soll, soll das mittels einer geeigneten Schleifen oder Listen Operation erfolgen, und **nicht** alle Werte einzeln eingetippt werden. Zwischenergebnisse welche in einem weiteren Berechnungsschritt benötigt werden, sollen in eine Variable gespeichert und weiterverwendet werden (**nicht** neu eintippen).

Übung 24. Erzeugen Sie die folgenden 2-dimensionalen `numpy`-Arrays:

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Achtung: Die Arrays dürfen nicht mittels Listen erzeugt werden, auch sollen keine Schleifen verwendet werden.

Übung 25. Berechnen Sie die Summe aller Elemente des Arrays A aus Beispiel 24(a). Berechnen Sie ausserdem die Zeilen- und Spaltensummen von A .

Achtung: Es sollen keine Schleifen verwendet werden.

Übung 26. Schreiben Sie eine Funktion `extract_rows(a)`, die für ein gegebenes 2-dimensionales Numpy-array a , alle Zeilen von a , die in der letzten Spalte einen Eintrag $\neq 0$ haben, als Array zurückgibt.

z.B.: Für die Matrix B aus Beispiel 24(b), soll `extract_rows(B)` die Ausgabe

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

liefern.

Achtung: Ihre Implementierung soll keine Schleifen enthalten.

Übung 27. Schreiben Sie eine Funktion `replace_max(a, k)`, die für ein gegebenes 2-dimensionales Numpy-array a , die maximalen Werte jeder Spalte durch den Wert k ersetzt.

z.B.: Für die Matrix A aus Beispiel 24(a), soll `replace_max(A, -1)` die Ausgabe

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

liefern.

Achtung: Ihre Implementierung soll keine Schleifen enthalten.

Übung 28. Trapezregel

(a) Schreiben Sie eine Funktion `trapez(f, a, b, n)` die das Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

näherungsweise mit Hilfe der Trapezregel mit Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$ berechnet.

Die Trapezregel besagt:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \sum_{i=1}^n f\left(a + h \cdot \frac{2i-1}{2}\right).$$

(b) Die Fehlerabschätzung für diese Approximation lautet:

$$|E(f)| \leq \frac{b-a}{24} h^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Erweitern Sie ihre Funktion `trapez` so, dass sie sowohl eine Näherung für das Integral, als auch die Fehlerabschätzung berechnet.

Überprüfen Sie ihre Funktion anhand einiger Beispiele, und vergleichen Sie das Ergebnis mit der eingebauten Funktion `integral_numerical`.