# Computermathematik (für Informatik)

Hausübung | Jänner 2010

*Abgabetermin:* 28. 02. 2010

**Aufgabe 1** (Kurvendiskussion).

(a) Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x + 2}$$

mit Hilfe von Sage durch. Gehen Sie insbesondere auf die folgenden Punkte ein: Definitionsbereich, Stetigkeitsbereich, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Monotonie, Krümmungsverhalten, Verhalten am Rande des Definitionsbereiches.
**Hinweis:** Lösen Sie den Betrag auf. Nicht bei allen Punkten wird Sage hilfreich sein.

(b) Setzen Sie die Kurvendiskussion in LaTeX. Die einzelnen Rechenschritte sollen in vollständigen Sätzen beschrieben werden. Alle Zwischenschritte sind anzugeben. Fügen Sie ausserdem eine in Sage erzeugte Graphik hinzu, die alle wichtigen Eigenschaften der Funktion $f$ darstellt. Beschriften Sie die Nullstellen, Maxima, Minima, etc.

---

**Aufgabe 2** (Geometrie mit TikZ).

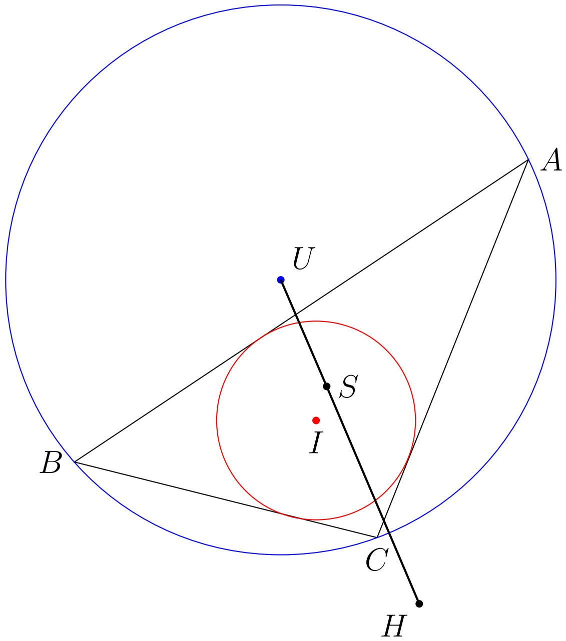
Gegeben sind 3 Koordinaten für die Punkte $A$, $B$ und $C$. Konstruieren Sie mit TikZ für das Dreieck mit den Eckpunkten $A$, $B$ und $C$ die folgenden Punkte:

- Den Umkreismittelpunkt $U$, sowie den Umkreis.
- Den Inkreismittelpunkt $I$, sowie den Inkreis.
- Den Schwerpunkt $S$.
- Den Höhenschnittpunkt $H$.
- Die Eulersche Gerade (Auf der Eulerschen Gerade liegen die Punkte $U$, $S$ und $H$).

**Beispiel:** Für die Koordinaten

```
\coordinate[label=right:$A$] (A) at (5cm, 5cm);
\coordinate[label=left:$B$] (B) at (-1cm, 1cm);
\coordinate[label=below:$C$] (C) at (3cm, 0cm);
```

soll sich in etwa das folgende Bild ergeben:




**Achtung:**
Die gesammte Konstruktion soll nur von den Koordinaten $A$, $B$ und $C$ abhängen.

---

**Aufgabe 3** (Newton-Fraktal)**.**

Gegeben sei das Polynom $p(z) = z^m - 1$, $(m \in \mathbb{N})$ mit den $m$ komplexen Nullstellen

$$w_k = \cos\frac{2\pi k}{m} + i \cdot \sin\frac{2\pi k}{m}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{1}$$

Das Newton-Fraktal mit $N$ Iterationen ist eine Funktion $\mathsf{NF} : \mathbb{C} \to \mathbb{Z}$, und ist wie folgt definiert:

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ berechnen wir die Folge $z_0 = z$,

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}, \quad \text{für } n \leq N \tag{2}$$

und überprüfen zu welcher Nullstelle $w_k$ der Punkt $z_N$ am nächsten liegt (**Hinweis:** In Polarkoordinaten rechnen). Der Wert des Newton-Fraktals am Punkt $z$ wird dann auf $k$ gesetzt, also $\mathsf{NF}(z) = k$.

(a) Schreiben Sie eine Funktion `newton_fractal(m, size, N)` die das Newton-Fraktal mit `N` Iterationen für ein Gitter der Größe `size` im komplexen Einheitsquadrat

$$\{x + iy \mid x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]\}$$

berechnet, und als 2-dimensionales Numpy-Array zurückgibt.

(b) Modifizieren Sie die Funktion aus Aufgabe (a) derart, dass Sie mit Numpy-Operationen immer das ganze Gitter bearbeiten.

Der Code soll ungefähr die folgende Struktur haben, und **keine weiteren Schleifen enthalten**.

Sage code

```
def newton_fractal(m, size, N):
    # Erstelle Gitter
    ...

    for n in xrange(N):
        # Berechne Folge
        ...

    # Überprüfe am nächsten liegende Nullstelle
    ...
```

**Beispiel:**

Sage code

```
fractal = newton_fractal(3, 400, 100)

matrix_plot(fractal, cmap = 'winter', frame = False, axes = False)
```