Übungen

A. Matrizen und Determinanten

Übung 1. Seien $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \big(x_1, x_2, \dots, x_n\big) &\mapsto \big(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n\big) \end{aligned}$$

linear ist.

(2 P.)

Übung 2. Finde Zahlen α und β, sodaß

$$(a) \quad \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(2P.)

Übung 3. Bestimme den von den Vektoren

(a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

aufgespannten Winkel.

(2P.)

Übung 4. Berechne das Matrixprodukt

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(2P.)

Übung 5. Berechne die Matrixprodukte

$$(a)\quad \begin{pmatrix}1 & 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad (b)\quad \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$(c)\quad \begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \qquad (d)\quad \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

(je 1P.)

Übung 6. Ganzzahlige Potenzen von Matrizen sind definiert als

$$A^n = \begin{cases} A\cdot A\cdots A & n>0\\ I & n=0\\ A^{-1}\cdot A^{-1}\cdots A^{-1} & n<0\end{cases} \qquad \text{(jeweils } |n| \text{ Faktoren).}$$

Berechne die folgenden Produkte und Potenzen von Matrizen:

$$(a)\quad \begin{pmatrix}1&4&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad (b)\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(c)\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad (d)\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(e)\quad \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}^2 \qquad \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}^3 \qquad \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}^4$$

$$(f)\quad \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}^2 \qquad \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}^3 \qquad \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}^4$$

(je 2 P.)

Übung 7. Berechne

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}^{25}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}^{-25}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{25}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-25}$

(2 P.)

Übung 8. Finde 2×2 Matrizen A und B, für die gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$.

(1 P.)

Übung 9. Zeige, daß eine 2×2-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, die mit allen anderen Matrizen kommutiert (d.h. $A \cdot B = B \cdot A$ für jede beliebige 2×2 Matrix B), ein Vielfaches der Einheitsmatrix I sein muß, d.h. $a = d$ sowie $b = c = 0$.

(3 P.)

Übung 10. Drei Pestizide P_1, P_2 und P_3 wurden an 4 Futterpflanzen H_1, H_2, H_3 und H_4 getestet und es wurde festgestellt, daß die einzelnen Pflanzen bis zur Ernte die folgenden Mengen [mg/kg] aufnehmen:

	P_1	P_2	P_3
H_1	2	3	4
H_2	3	2	1
H_3	4	2	6
H_4	3	5	4

Die Pflanzen werden weiter an die Tiere A_1, A_2 und A_3 verfüttert, und zwar in folgenden Mengen [kg/Monat]:

	H_1	H_2	H_3	H_4
A_1	20	28	30	40
A_2	12	15	12	16
A_3	8	15	10	20

Welche Menge an Pestiziden nehmen die Tiere pro Monat auf?

Übung 11. Ein Rosenzüchter vermehrt eine Rosenart, die es in den drei Farben rot, weiß und rosa gibt, indem er sie jeweils mit rosaroten Exemplaren kreuzt. Dabei ergibt sich nach den Gesetzen der Vererbungslehre durchschnittlich folgende Ausbeute:

				rot	weiß	rosa
rosa	×	rot	→	50%	0%	50%
rosa	×	weiß	→	0%	50%	50%
rosa	×	rosa	→	25%	25%	50%

Bei einem Feldversuch werden 1000000 rote Rosen stets mit rosaroten Exemplaren gekreuzt und im darauffolgenden Jahr jeweils 1 Samenkorn ausgesät. Die daraus gewonnenen Blumen werden wieder mit lauter rosaroten Exemplaren gekreuzt, von jeder Blume ein Korn ausgesät usw.

Welche Farbverteilung ist nach 5 Durchgängen zu erwarten?

(3 P.)

Übung 12. Berechnen und vereinfache (Additionstheoreme für Winkelfunktionen!) das folgende Matrixprodukt:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Wie sieht die Inverse

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1}$$

aus?

(3 P.)

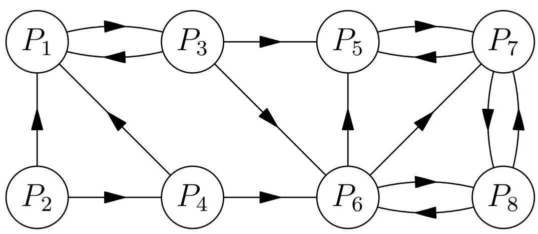
Übung 13. Die *Tribonaccizahlen* sind gegeben durch die Rekursion

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$$

mit den Anfangswerten $T_0 = 1$, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$. Erstelle eine Matrixgleichung und bestimme die ersten 10 Tribonaccizahlen.

(1P.)

Übung 14. Gegeben sei das Miniatur-Internet



Erstelle die Google-Matrix und bestimme näherungsweise den Pagerank aller Seiten durch Iteration (50-100 müßten reichen) mit Hilfe eines Computeralgebrasystems, z.B. mit SAGE (`http://www.sagemath.org`), und zwar zunächst mit $\alpha = 1$, dann mit $\alpha = 0.85$. Was fällt auf? Wie kann man das Phänomen erklären?

(4 P.)

Übung 15. Zeige, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

keine Inverse besitzt, wenn $ad - bc = 0$.

Hinweis: Finde eine Matrix $B \neq 0$, sodaß $A \cdot B = 0$ und führe die Annahme, daß eine Matrix C mit $CA = I$ existiert, zu einem Widerspruch.

(4 P.)

Übung 16. Seien A und B reguläre $n \times n$-Matrizen. Zeige, daß die Matrix $A \cdot B$ regulär ist.

(2 P.)

Übung 17. Berechne die Determinanten

$$(a) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad (b) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

anhand von elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen.

(2+2 P.)

Übung 18. Bestimme die Inverse der Matrix

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3 P.)

Übung 19. Löse das Gleichungssystem

$$(a) \quad \begin{aligned} -8\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3 &= 1 \\ 11\,x_1 - 7\,x_2 - 3\,x_3 &= 0 \\ -3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad\qquad (b) \quad \begin{aligned} -7\,x_1 + 11\,x_2 - 3\,x_3 &= 1 \\ 4\,x_1 - 8\,x_2 + 3\,x_3 &= 0 \\ 2\,x_1 - 3\,x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(1) mithilfe der Cramerschen Regel (A.3.14)

(2) durch Inversion der Koeffizientenmatrix A (Satz (A.3.12)).

(3+3 P.)

Übung 20. Berechne die Determinanten

$$(a) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -9 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad\qquad (b) \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 11 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(3P.)

Übung 21. Für welche Werte von α ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

invertierbar?

(2P.)

B. Zahlen und Kongruenzen

Übung 22. Versuche (durch Probieren), den in der folgenden Nachricht verwendeten Caesar-Schlüssel zu erraten und die Nachricht zu rekonstruieren:

ITYEVDVQWVHZVD

(2P.)

Übung 23. Es ist bekannt, daß der Terrorist *O.* die Nachrichten an seinen Kumpanen *W.* mit einer 2×2 Matrix A verschlüsselt. Durch Zufall weiß man, daß die Botschaft

DU_BIST_EIN_HUMP

in den Text

$$-30, 47, -4, 6, -11, 21, 60, -80, -3, 7, 42, -56, -18, 31, 7, -4$$

transformiert wird. Bestimme die verwendete Matrix A.

(3P.)

Übung 24. Der Divisionssatz besagt, daß es für jedes Zahlenpaar $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmte Zahlen $q \in \mathbb{N}$ und $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ gibt, sodaß $n = qm + r$.

Verfasse einen Algorithmus, der nur unter Verwendung der Operationen $+$ (Addition) und $-$ (Subtraktion) bei Eingabe von m und n die Zahlen q und r findet.

(2 P.)

Übung 25. Finde mithilfe des euklidischen Algorithmus für jedes der folgenden Zahlenpaare (m, n) den größten gemeinsamen Teiler d und Zahlen a und b, sodaß $am + bn = d$.

(a) $(178, 110)$ $\quad$ (b) $(228, 141)$

(c) $(144, 89)$ $\quad$ (d) $(233, 144)$

(je 2 P.)

Übung 26. Schreibe den euklidischen Algorithmus zur Berechnung des $\mathrm{ggT}(m, n)$ detailliert als "Programm" nieder.

(3 P.)

Übung 27. Zeige, daß mit der Primfaktorzerlegung $n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_n(p)}$ gilt

$$\mathrm{ggT}(m, n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\nu_m(p), \nu_n(p))} .$$

Überprüfen sie dies anhand der Beispiele aus Übung 25.

(3 P.)

Übung 28. Ergänze den euklidischen Algorithmus aus Übung 26 so, daß dabei auch die Zahlen a und b aus Satz (1.9) bestimmt werden.

(3 P.)

Übung 29. Die Europäische Zentralbank beschließt im Jahr 2037, zur Vereinfachung des Zahlungsverkehrs nur noch Scheine mit den Werten 130€ und 231€ zuzulassen. Wie kann man dann eine Stecknadel zum Preis von einem Euro bezahlen?

(2 P.)

Übung 30. Seien m und n ganze Zahlen. Zeige: wenn ganze Zahlen a und b existieren mit $am + bn = 1$, dann ist $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.

(3 P.)

Übung 31. Zeige (unter Zuhilfenahme des vorhergehenden Beispiels): wenn $\mathrm{ggT}(m, n) = d$, dann ist $\mathrm{ggT}(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$.

(3 P.)

Übung 32. Sei F_n die Folge der Fibonacci-Zahlen, gegeben durch die Rekursion

$$F_0 = F_1 = 1 \qquad\qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Zeige, daß $\mathrm{ggT}(F_n, F_{n+1}) = 1$ für jedes n (Induktion).

(2P.)

Übung 33. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sodaß $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Zeige, daß $\mathrm{ggT}(m + n, m - n) = 1$ oder 2.

(2 P.)

Übung 34. Das *kleinste gemeinsame Vielfache* zweier natürlicher Zahlen m und n ist die Zahl definiert durch

$$\mathrm{kgV}(m,n) = \min\{\, \ell \in \mathbb{N} : m \,\big|\, \ell \text{ und } n \,\big|\, \ell \,\}\,.$$

Zeige, daß

$$\mathrm{kgV}(m,n) \cdot \mathrm{ggT}(m,n) = m \cdot n$$

(4 P.)

Übung 35. Warum genügt es, nur bis $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ zu gehen, um festzustellen, ob eine Zahl n eine Primzahl ist?

(1 P.)

Übung 36. Verfasse einen möglichst ökonomischen Algorithmus, der für gegebenes n alle Primzahlen $p \le n$ bestimmt.

Hinweis: Gehe rekursiv vor. Wenn alle Primzahlen $\le n-1$ bestimmt sind, überprüfe, ob auch n Primzahl ist und füge gegebenenfalls n zur Liste hinzu.

(3 P.)

Übung 37. Zeige mittels vollständiger Induktion, daß jede natürliche Zahl (außer 1) durch wenigstens eine Primzahl teilbar ist.

(4 P.)

Übung 38. Beweise den folgenden Satz von Euklid (Buch IX, Prop. 20): *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Hinweis: Widerspruchsbeweis. Finde zu jeder gegebenen endlichen Menge von Primzahlen $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ eine neue Zahl, die durch keine der p_i teilbar ist.

(3 P.)

Übung 39. Zeige: Wenn $k \ge 6$ und sowohl $k-1$ als auch $k+1$ Primzahlen sind, dann ist k durch 6 teilbar.

(2P.)

Übung 40. Verfasse einen Algorithmus, der bei Vorliegen aller Primzahlen $\le n$ die Primfaktoren-Zerlegung von $n \in \mathbb{N}$ bestimmt.

(3 P.)

****

Die in den Aufgaben 41–54 angegebenen Relationen sind auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität zu untersuchen. Stelle auch fest, ob jeweils eine Äquivalenzrelation oder Halbordnungsrelation vorliegt.

Übung 41. Sei X die Menge der Österreicherinnen und Österreicher mit der Relation

$$x \,\mathrm{R}\, y \iff x \text{ ist mit } y \text{ verheiratet.}$$

(1 P.)

Übung 42. Menge $X =$ Erdbevölkerung, Relation

$$x \,\mathrm{R}\, y \iff x \text{ und } y \text{ haben den gleichen Geburtsort.}$$

(1 P.)

Übung 43. Menge $X = \mathbb{R}$, Relation $x \,\mathrm{R}\, y \iff x \leq y$.

(1 P.)

Übung 44. Menge $X = \mathbb{Z}$, Relation $x \,\mathrm{R}\, y \iff x \equiv y \ (m)$.

(1 P.)

Übung 45. Menge $X = \mathbb{C}$, Relation $z_1 \,\mathrm{R}\, z_2 \iff \operatorname{Re} z_1 \leq \operatorname{Re} z_2$.

(1 P.)

Übung 46. Menge $X = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n > 0 \ \forall\, n \right\}$, Relation

$$(a_n) \,\mathrm{R}\, (b_n) \iff \lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$$

(3 P.)

Übung 47. Menge X beliebig, Gleichheitsrelation $x = y$.

(1 P.)

Übung 48. Menge X beliebig, Ungleichheitsrelation $x \neq y$.

(1 P.)

Übung 49. $X = \mathbb{N}$, $m \,\mathrm{R}\, n \iff m \,\big|\, n$

(1 P.)

Übung 50. $X = \mathbb{N}$, $m \,\mathrm{R}\, n \iff m - n = 7$

(1 P.)

Übung 51. $X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$, $(m,n) \,\mathrm{R}\, (p,q) \iff mq = np$

(2 P.)

Übung 52. $X = \mathbb{N}$, $m \,\mathrm{R}\, n \iff \mathrm{ggT}(m,n) = 16$

(1 P.)

Übung 53. $X = \mathbb{R}$, $x \,\mathrm{R}\, y \iff x \cdot y \geq 0$

(2 P.)

Übung 54. $X = \mathbb{R}$, $x \,\mathrm{R}\, y \iff x \cdot y > 0$

(2 P.)

Übung 55. Gib Beispiele von (Halb)ordnungsrelationen an.

(1 P./Beispiel)

Übung 56. Löse die folgenden simultanen Kongruenzen mithilfe des chinesischen Restsatzes (vgl. Skriptum (A.1.12), (A.3.13) und (A.3.14)).

$$\begin{array}{llll} (a) & x \equiv 3 \mod 8 & x \equiv 1 \mod 5 & x \equiv 5 \mod 9 \\ (b) & x \equiv 1 \mod 11 & x \equiv 3 \mod 15 & x \equiv 5 \mod 7 \end{array}$$

(je 2 P.)

Übung 57. Zeige, daß die folgende Aussage richtig ist:

$$a \equiv b\ (m_1) \text{ und } a \equiv b\ (m_2) \implies a \equiv b\ (m) \quad \text{für} \quad m = \mathrm{kgV}(m_1, m_2)\,.$$

Ist insbesondere $\mathrm{ggT}(m_1, m_2) = 1$, dann gilt also $a \equiv b\ (m_1 m_2)$.

(4 P.)

Übung 58. Hat das folgende Gleichungssystem eine Lösung? Wenn ja, dann bestimme diese.

$$(a)\quad \begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 3 \\ x &\equiv 2 \mod 9 \\ x &\equiv 1 \mod 10 \end{aligned} \qquad\qquad (b)\quad \begin{aligned} x &\equiv 1 \mod 5 \\ x &\equiv 3 \mod 9 \\ x &\equiv 2 \mod 10 \end{aligned}$$

(3 P.)

Übung 59. Löse die folgenden simultanen Kongruenzen mithilfe des chinesischen Restsatzes

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \mod 4 \\ x &\equiv 2 \mod 5 \\ x &\equiv 3 \mod 7 \\ x &\equiv 4 \mod 9 \end{aligned}$$

(3 P.)

Übung 60. Erstelle die Multiplikationstafel für

(a) $\mathbb{Z}_5$

(b) $\mathbb{Z}_8$.

(1+1 P.)

Übung 61. Zeige, daß die Zahlen a, $2a$,..., $(p-1)a$ alle verschiedene Reste modulo p haben, wenn p eine Primzahl und $a \not\equiv 0 \mod p$ ist.

(3 P.)

Übung 62. *Dividieren in* $\mathbb{Z}_n$. Die Inverse $[m]^{-1}$ einer ganzen Zahl m in $\mathbb{Z}_n$ (geschrieben $m^{-1} \mod n$) ist die Restklasse $[x]$ einer ganze Zahl x, für die gilt, daß $[x]_n \cdot [m]_n = [1]_n$. Mit anderen Worten, man muß zwei Zahlen x und y finden, sodaß $x \cdot m + y \cdot n = 1$. Zeige, daß das genau dann möglich ist, wenn $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.

(4 P.)

Übung 63. Finde, wenn möglich, die Inversen von (a) $5 \mod 173$ sowie (b) $14 \mod 93$, von (c) $5 \mod 175$ sowie (d) $15 \mod 93$

(je 1 P.)

Übung 64. Zeige die *Elferprobe*: Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, d.h., mit der Ziffernentwicklung

$$n = \sum a_i 10^i$$

ist n durch 11 teilbar genau dann, wenn

$$\sum a_i(-1)^i$$

durch 11 teilbar ist.

(2P.)

Übung 65. Untersuche die folgenden Relationen auf auf der Menge $X = \mathbb{N}$ auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität. NB: Gib jeweils eine Begründung für die Antwort an.

(a) $mRn \iff 2|(m \cdot n)$

(b) $mRn \iff 2|(m + n)$

Übung 66. Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeige: Wenn $100a + b$ durch 7 teilbar ist, dann ist auch $a + 4b$ durch 7 teilbar.

Hinweis: modulo 7 rechnen.

Übung 67. Für welche $m \in \mathbb{N}$ ist $31 \equiv 1 \mod m$?

Übung 68. Löse die Gleichungen modulo 7:

(a) $x^2 \equiv 1$

(b) $x^6 \equiv 1$

(c) $3x + 5 \equiv 1$

Übung 69. Welche der folgenden Strukturen $(X, \circ)$ bilden Halbgruppen, Monoide, Gruppen?

(a) Sei U eine Menge, und $X = \mathcal{P}(U)$ die *Potenzmenge*

$$X = \{A : A \subseteq U\}$$

ausgestattet mit der Verknüpfung

$$A \circ B = A \cap B$$

(b) X wie vorher mit der Verknüpfung

$$A \circ B = A \cup B$$

(c) X wie vorher mit der Verknüpfung

$$A \circ B = A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(d) Sei U eine Menge und $X = U^U$ die Menge aller Funktionen von U nach U mit der Verknüpfung

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

(Hintereinanderausführung).

(e) X beliebig mit der Verknüpfung

$$a \circ b = a$$

(je 2P.)

Übung 70. Die Rechenregeln für Matrizen aus Kapitel A gelten auch in $\mathbb{Z}_p$, wenn p eine Primzahl ist. Berechne das Matrixprodukt

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Z}_5$.

(1 P.)

Übung 71. Löse (z.B. mit der Cramerschen Regel) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2\,y &= 4 \\ 4\,x + 3\,y &= 4 \end{aligned}$$

in $\mathbb{Z}_7$. Wie sieht es mit einer Lösung in $\mathbb{Z}_5$ aus?

(3 P.)

Übung 72. Berechne (ohne Taschenrechner), mit Hilfe des Satzes von Euler-Fermat die Potenzen

$$(a) \quad 2^{32} \mod 11 \qquad\qquad (b) \quad 2^{(2^{32})} \mod 11\,.$$

Hinweis: $2^{m \cdot n} = (2^m)^n$.

(2+3 P.)

Übung 73. Berechne in $\mathbb{Z}_{50}$

$$[3]^{(2^{32})}$$

(2P.)

Übung 74. Berechne (ohne Taschenrechner) in $\mathbb{Z}_{60}$

$$[14]^{(2^{32})}$$

Hinweis: Der Satz von Euler-Fermat ist nicht sofort anwendbar (warum?). Man kann aber wie folgt vorgehen: Zerlege $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Bestimme $[14]^{(2^{32})} \mod 4$, $[14]^{(2^{32})} \mod 3$, $[14]^{(2^{32})} \mod 5$, und verwende den chinesischen Restsatz, um daraus $14^{(2^{32})} \mod 60$ zu bestimmen.

(4P.)

Übung 75. Löse die Gleichung

$$3\,x^2 + 2\,x + 1 = 0$$

in $\mathbb{Z}_{89}$.

(3P.)

Übung 76. Eines der ersten Verschlüsselungssysteme stammt (angeblich) von Julius Caesar. Den Buchstaben des lateinischen Alphabets entsprechen die Zahlen $0, 1, \ldots, 25$ modulo 26 und die Verschlüsselung besteht in der Addition einer fixen Zahl, konkret $f(k) = k + 6$. Entschlüssle die Botschaft *"GRKG OGIZG KYZ"*.

(2 P.)

Übung 77. Sei $m = pq$ und $\mathrm{ggT}(r, \varphi(m)) = 1$. Satz (B.1.9) besagt, daß es ein $s \in \mathbb{Z}$ gibt sodaß $rs \equiv 1 \mod \varphi(m)$. Warum stimmt die Behauptung (nach (B.5.4)), daß $s \in \mathbb{N}$, d.h. $s > 0$, gewählt werden kann?

(3P.)

Übung 78. Gegeben seien $m = 2491$ und $r = 957$ sowie die mit der Konvention von Beispiel (B.5.7) aus der Vorlesung verschlüsselte Zahlenfolge $(1137, 2221, 2014, 111)$. Finde den inversen Schlüssel s und entschlüssle die Botschaft.

Hinweis: Wahrscheinlich Computer erforderlich.

(4P.)

Übung 79. Sei n eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß $2^n - 1$ eine Primzahl ist. Zeige, daß auch n eine Primzahl sein muß.

Die Umkehrung gilt nicht: Finde die kleinste Primzahl p, sodaß $2^p - 1$ keine Primzahl ist.

Hinweise:

$$x^{pq} = (x^p)^q \qquad\qquad x^s - 1 = (x-1)(1 + x + \cdots + x^{s-1})$$

(2P.)

C. Grundlagen der Logik

Übung 80. Konstruiere Wahrheitstafeln für die folgenden Formeln:

(a) $((A \wedge B) \wedge (\neg B \vee C))$

(b) $(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$

(2P.)

Übung 81. Formalisiere die folgenden Aussagen und beantworte die untenstehende Frage:

(a) Jeder, der ein gutes Gehör hat, kann richtig singen.

(b) Jeder, der gut Klavier spielen kann, kann seine Zuhörerschaft begeistern.

(c) Niemand ist ein wahrhafter Musiker, wenn er nicht seine Zuhörerschaft begeistern kann.

(d) Jemand, der kein gutes Gehör hat, kann seine Zuhörerschaft nicht begeistern.

(e) Niemand, außer einem wahrhaften Musiker, kann eine Symphonie schreiben.

Welche Eigenschaften muß jemand notwendigerweise besitzen, um eine Symphonie zu schreiben?

(3P.)

Übung 82. Zeige mithilfe von Wahrheitstafeln:

(a) Sei A eine Tautologie, B eine beliebige Formel, dann gilt

$$A \vee B \Leftrightarrow A \qquad A \wedge B \Leftrightarrow B$$

(b) Sei B eine beliebige Formel, C unerfüllbar. Dann gilt:

$$B \vee C \Leftrightarrow B \qquad B \wedge C \Leftrightarrow C$$

(2P.)

Übung 83. Inspektor D befragt drei Verdächtige – A, B und C – für eine Tat. Er weiß, daß genau eine der drei Personen schuld ist und jede Person einmal lügt und einmal die Wahrheit sagt.

> A sagt: Ich war es nicht. B hat es getan.
>
> B sagt: Ich war es nicht. Ich weiß, daß C es getan hat.
>
> C sagt: Ich war es nicht. B weiß nicht wer es war.

Wer hat es getan?

(3P.)

Übung 84. In einer Stadt sagen alle Politiker immer die Unwahrheit, während alle anderen immer die Wahrheit sagen. Ein Zugereister führt eine Befragung durch und erhält folgende Antworten.

> A sagt: "B ist ein Politiker."
>
> B sagt: "Wenn A sagt, er sei kein Politiker, dann lügt er."
>
> C sagt: "A ist kein Politiker."

Kann man daraus schließen, wer Politiker ist und wer nicht? Wenn ja, wer?

(3P.)

Übung 85. **A**lice, **B**ob und **C**harles sind zu einer Geburtstagsfeier eingeladen. Wie das bei den Leuten so ist, haben alle Vorbehalte:

(a) Wenn Charles nicht kommt, dann kommt auch Bob nicht.

(b) Entweder Bob oder Charles kommt, aber nicht beide.

(c) Charles und Alice kommen, wenn sie kommen, nur zusammen.

Formalisiere die Aussagen und stelle fest, wer zur Feier kommt.

(2 P.)

Übung 86. Das Grundstudium an der steirischen Esoterik-Universität besteht aus den Fächern *Kaffeesudlesen*, *Hexenjagd*, *Besenreiten* und *Elfentanz*. Die Studienkommission hat folgende Mindestbedingungen für den Erwerb des 1.Diploms festgelegt:

(a) Wurde der Elfentanzschein nicht erworben, dann muß der Hexenjagdschein vorhanden sein.

(b) Fehlt der Hexenjagdschein oder der Besenreitschein, so muß der Kaffeesudleseschein und der Elfentanzschein vorhanden sein.

(c) Wurden weder der Kaffeesudleseschein noch der Hexenjagdschein erworben, so müssen der Besenreitschein und der Elfentanzschein vorhanden sein.

Formalisiere und vereinfache diese Regeln und stelle fest, unter welchen Bedingungen das 1.Diplom erworben werden kann.

(3 P.)

Übung 87. Bringe die logische Aussageform

$$(A \vee B) \rightarrow C$$

auf

(a) konjunktive Normalform

(b) disjunktive Normalform

(je 2P.)

Übung 88. Zeige folgende Äquivalenzen anhand von Wahrheitstafeln:

(a) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

(b) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

(c) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

(2+2+2P.)

Übung 89. Seien P und Q aussagenlogische Formeln. Zeige

(a) $P \Rightarrow Q$ gilt genau dann, wenn $P \to Q$ eine Tautologie ist.

(b) $P \Leftrightarrow Q$ gilt genau dann, wenn $P \leftrightarrow Q$ eine Tautologie ist.

(2P.)

Übung 90. Gib eine dreielementige Menge von Formeln an, die unerfüllbar ist, während jede zweielementige Teilmenge erfüllbar ist.

(3P.)

Übung 91. Bestimme alle paarweise nicht-äquivalenten Aussageformen, die aus den Variablen A und B sowie dem Junktor $\to$ (Implikation) aufgebaut werden können.

(3P.)

Übung 92. Sind die folgenden logischen Aussageformen äquivalent?

(a) $(\neg A \to B) \to (B \vee C)$ und $(\neg B \to A) \to (\neg B \to C)$

(b) $(A \to B) \to C$ und $A \to (B \to C)$

(c) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$ und $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$

(je 2P.)

Übung 93. Beweise mit den Regeln des logischen Schließens den **Modus Tollens**

$$((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P.$$

(3P.)

Übung 94. Zeige mit den Regeln des logischen Schließens auf möglichst elegante Weise die Allgemeingültigkeit des Ausdrucks

(a) $B \to ((A \to (B \to A)) \to B)$

(b) $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$

(3P.)

Übung 95. Beweise mit den Regeln des logischen Schließens die folgenden Subjunktionsgesetze:

(a) Tauschgesetz für Vorderglieder

$$A \to (B \to C) \Longleftrightarrow B \to (A \to C)$$

(b) Klammer-Änderungsgesetz für "$\to$"

$$A \to (B \to C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \to C$$

(3P.)

Übung 96. Was ist falsch am folgenden Induktionsbeweis der Aussage:

"Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: je n Punkte der Ebene liegen auf einer Geraden".

"*Beweis*".

Induktionsanfang:
Die Aussage gilt für $n = 1$ und $n = 2$.

Induktionsschritt:
Angenommen, die Aussage ist für n wahr. Seien $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ Punkte. Nach Induktionsvoraussetzung liegen die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ auf einer Geraden g und $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_{n+1}$ auf einer Geraden h. Da aber sowohl g als auch h durch die Punkte P_1 und P_2 verlaufen, gilt $g = h$ und $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ liegen auf einer Geraden.

(3P.)

Übung 97. Bringe die Formel

(a) $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$

(b) $A \to (B \leftrightarrow C)$

auf

(i) Disjunktive Normalform

(ii) Konjunktive Normalform

(2+2P.)

Übung 98. Bestimme die Menge der Folgerungen, die aus der Prämissenmenge

$$\begin{aligned}
P_1 &:\Longleftrightarrow A \to (B \to C)\\
P_2 &:\Longleftrightarrow A \vee ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C))\\
P_3 &:\Longleftrightarrow B \to C
\end{aligned}$$

gezogen werden können.

(3P.)

Übung 99. Zeige:

(a) $\mathcal{L}_{\{|\}}$ ist vollständig.

(b) $\mathcal{L}_{\{\neg,\to\}}$ ist vollständig.

(c) $\mathcal{L}_{\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}}$ ist nicht vollständig.

(d) $\mathcal{L}_{\{\neg\}}$ ist nicht vollständig.

Hinweis zu (c): Zeige, daß $\neg A$ nicht darstellbar ist; dies ist äquivalent dazu, daß keine Kontradiktion in der Sprache enthalten ist: wenn $b(A_i) = W$, dann ist $\forall P \in \mathcal{L}\ \bar{b}(P) = W$

(3+3+4+2P.)

Übung 100. Bestimme (duch Äquivalenzumformungen) eine KNF der logischen Aussageformel aus Beispiel 86 und leite eine möglichst kurze äquivalente Formulierung her.

(3P.)

Übung 101. Bestimme eine

(a) KNF (b) DNF

der logischen Aussageformel

$$((A \to B) \wedge (C \leftrightarrow D)) \to (A \vee E)$$

(je 2P.)

Übung 102. Es seien die Funktionen $f_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$ und für $* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, |\}$ die jeweilige zweistellige Funktion $f_* : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ definiert wie die Wahrheitsfunktionen $F_\neg$, F_*, mit 0 statt F und 1 statt W.

(a) Drücke die folgenden Funktionen durch $f_\neg$ und $f_\wedge$ aus:

$$g_1(x,y) = x + y \qquad g_2(x,y) = x \cdot y$$
$$g_3(x) = x^2 + 1 \qquad g_4(x,y,z) = x \cdot y + z^3$$

Hier bedeuten $+$ und $\cdot$ Addition und Multiplikation modulo 2.

(je 1P.)

(b) Sei

$$f_\triangledown(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = y = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann läßt sich jede Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ durch $f_\triangledown$ ausdrücken.

(3P.)

(c) Drücke die Funktionen aus (a) durch $f_\triangledown$ aus.

(je 2P.)

(d) Zeige, daß die Funktion $f_\triangledown$ wie in (b) und $f_|$ definiert durch

$$f_|(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = y = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

die einzigen zweistelligen Funktionen sind, die (jede für sich allein) alle Funktionen $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ erzeugen.

(6P.)

Übung 103. Sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Drücke folgende Aussagen in einer Sprache mit Quantoren aus:

(a) Die f entsprechende Funktion ist injektiv.

(b) Die f entsprechende Funktion ist surjektiv.

(c) Die f entsprechende Funktion ist konstant.

(1+1+1P.)

Übung 104. Zeige durch strukturelle Induktion, daß jede aussagenlogische Formel über einem beliebigen Alphabet $\mathcal{A}$ mit den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ mindestens soviele Variablensymbole wie Junktoren enthält.

(2P.)

Übung 105. Beweise den *Fregeschen Kettenschluß*

$$\models (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

mit Hilfe des Resolutionskalküls.

Übung 106. Professor Gromky prüft nach dem folgenden Schema:

1. Wenn er am Samstag keine Prüfung abhält, dann am Freitag, aber nicht am Dienstag.
2. Wenn am Dienstag keine Prüfung stattfindet, aber am Freitag schon, dann wird auch am Donnerstag geprüft.
3. Wenn er am Donnerstag prüft und nicht am Montag, dann prüft er am Samstag.
4. Wenn am Dienstag geprüft wird, dann ist Mittwoch frei.
5. Wenn am Montag geprüft wird, dann ist Freitag frei.
6. Wenn Samstags geprüft wird, dann auch am Freitag, aber nicht am Donnerstag.

Stelle mit Hilfe des Resolutionskalküls fest, an welchen Tagen geprüft wird.

(3P.)

Übung 107. Das *Dirichletprinzip* oder *Taubenschlagprinzip* besagt, daß es unmöglich ist, $n+1$ Tauben so auf n Taubenschläge zu verteilen, daß in jedem Taubenschlag höchstens eine Taube zu sitzen kommt.

Hinweis: Die logische Variable A_{ij} stehe für die Aussage *Taube Nr j sitzt im Taubenschlag Nr i*, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+1$. Dann kann man die Bedingungen wie folgt formulieren:

1. In jedem Taubenschlag sitzt höchstens eine Taube:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n+1} (\neg A_{ij} \vee \neg A_{ik})$$

2. Jede Taube sitzt in einem Taubenschlag:

$$\bigwedge_{i=1}^{n+1} (A_{1j} \vee A_{2j} \vee \cdots \vee A_{nj})$$

Zeige mit dem Resolutionskalkül (DPLL), daß das Problem für $n = 2$ und $n = 3$ unlösbar ist.

(3P.)

Übung 108. Ein Rätsel (© A. Einstein).

Löse das folgende Rätsel (auf welche Art auch immer):

1. Es stehen fünf Häuser in einer Reihe nebeneinander (von links nach rechts). Jedes Haus hat eine andere Farbe.
2. In jedem Haus wohnt eine Person einer anderen Nationalität.
3. Jede Person bevorzugt ein bestimmtes Getränk, spielt ein bestimmtes Musikinstrument und hält ein bestimmtes Haustier.
4. Alle fünf Getränke, Musikinstrumente und Haustiere sind verschieden.

Außerdem sind folgende Tatsachen bekannt:

1. Der Brite lebt im roten Haus.
2. Der Schwede hält einen Hund.
3. Der Däne trinkt gerne Tee.
4. Das grüne Haus steht direkt links vom weißen Haus.
5. Der Besitzer des grünen Hauses trinkt gerne Kaffee.

6. Die Person, die Geige spielt, hält eine Vogel.
7. Der Bewohner des mittleren Hauses trinkt gerne Milch.
8. Im gelben Haus steht ein Klavier.
9. Der Norweger wohnt im ersten Haus.
10. Der Gitarrist wohnt neben dem, der eine Katze hält.
11. Der Mann mit dem Pferd wohnt neben dem, der Klavier spielt.
12. Der Flötenspieler trinkt gerne Bier.
13. Neben dem blauen Haus wohnt der Norweger.
14. Der Deutsche spielt Trompete.
15. Der Gitarrist hat einen Nachbarn, der gerne Wasser trinkt.

Frage: Wem gehört der Fisch?

Übung 109. Drücke die Aussage

$$\forall x \exists y \forall z \, P(x, y, z)$$

unter alleiniger Verwendung des Existenzquantors $\exists$ und Negation aus.

(3P.)

Übung 110. Drücke folgende Aussagen über natürliche Zahlen mit Quantoren und den folgenden Symbolen aus: Konstante 0, Funktionssymbole S (einstellig), $+$ (zweistellig), $\cdot$ (zweistellig), mit der üblichen Interpretation in $\mathbb{N}$. (S ist die "Nachfolgerfunktion" $S(n) = n + 1$).

(a) x ist gerade.

(b) x ist ein Teiler von y.

(c) x ist kongruent zu $y \mod z$

(d) x ist eine Potenz von 2. (Hinweis: welche Teiler hat x?).

(1+1+1+1P.)

Übung 111. Formalisiere die Aussage

Eine natürliche Zahl ist durch 6 teilbar genau dann, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.

(3P.)

D. Elementare Abzählmethoden

Übung 112. Auf einem Computersystem sind Dateinamen mit den Buchstaben A–Z (ohne Umlaute) und den Ziffern 0–9 erlaubt, wobei ein Dateiname nicht mit einer Ziffer beginnen und höchstens 11 Zeichen lang sein darf. Wieviele verschiedene Dateinamen gibt es?

(2P.)

Übung 113. Auf dem Planeten Melmac besteht das Alphabet aus den drei Vokalen A, E und O sowie den 7 Konsonanten G, D, P, R, L, N, F.

(a) Wieviele Wörter der Länge 10 sind möglich, wenn jedes Wort mindestens einen Vokal enthalten soll?

(b) Wieviele Wörter der Länge 11 sind möglich, wenn jedes Wort mindestens einen Vokal enthalten soll?

(2P.)

Übung 114. Unter den Voraussetzungen von Beispiel 113,

(a) Wieviele Wörter der Länge 12 enthalten alle drei Vokale mindestens einmal?

(b) Wieviele Wörter der Länge 13 enthalten alle drei Vokale mindestens einmal?

(3P.)

Übung 115.

(a) Wieviele ungerade Zahlen zwischen 1000 und 9999 haben lauter verschiedene Ziffern?

(b) Wieviele gerade Zahlen zwischen 1000 und 9999 haben lauter verschiedene Ziffern?

(3P.)

Übung 116. Berechnen Sie

$$(a)\quad (x-1)^8 \qquad\qquad (b)\quad (1-x)^7.$$

(2P.)

Übung 117. Zeigen Sie, daß für eine Primzahl p und $1 \le k \le p-1$ gilt

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$$

Folgerung:

$$(1+x)^p \equiv 1 + x^p \mod p$$

(5P.)

Übung 118. Es sei ein Strichcode gegeben (wie z.B. im Supermarkt), der aus Folgen von n Nullen und Einsen besteht. Dabei wird jedes Wort mit dem umgekehrten Wort als gleich angesehen; für $n = 5$ werden zum Beispiel die Codewörter 01011 und 11010 als gleich angesehen. Wieviele verschiedene Codewörter der Länge n gibt es?

(3P.)

Übung 119. Auf einer Party mit n Personen wird mit Sekt angestoßen. Wie oft klingen die Gläser, wenn jeder mit jedem genau einmal anstößt?

(2P.)

Übung 120. Wieviele Lösungen $(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \in \{+1, -1\}^{2n}$ hat die Gleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} = 0?$$

(2P.)

Übung 121. Auf wieviele Arten kann man

(a) aus 33 Fußballspielern drei Mannschaften

(b) aus 44 Fußballspielern vier Mannschaften

zu je 11 Mann zusammenstellen?

(3P.)

Übung 122. Zeige mit kombinatorischen Argumenten, daß

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{k+j}\binom{k+j}{k} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$$

(3P.)

Übung 123. Wieviele Ausgangsverteilungen gibt es für das Kartenspiel "Schnapsen"? Dabei bekommen zwei Spieler aus einem Paket von 20 Karten je 5 Karten, der Rest geht in einen Talon (bei letzterem ist die Reihenfolge wichtig!).

(2P.)

Übung 124. Auf wieviele Arten kann man 15 ununterscheidbare Steckdosen auf 5 (unterscheidbare) Räume verteilen, sodaß

(a) in jeden Raum mindestens eine Steckdose kommt.

(b) ohne Einschränkung.

(c) in jeden Raum mindestens zwei Steckdosen kommen.

(2+2+2 P.)

Übung 125. Professor X hält seit 16 Semestern die gleiche Vorlesung.

(a) In jedem Semester erzählt er 3 Witze, aber niemals die gleichen 3 Witze

(b) In jedem Semester erzählt er 4 Witze, aber niemals die gleichen 4 Witze

(Reihenfolge spielt keine Rolle). Wieviele Witze muß er mindestens kennen?

(2 P.)

Übung 126. Zeigen Sie mit kombinatorischen Argumenten die Multinomialentwicklung

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=k} \binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

(3P.)

Übung 127. Auf wieviele Arten kann man n Buchstaben "A" und k Buchstaben "Z" so zu einem Wort anordnen, daß kein ZZ vorkommt?

(2 P.)

Übung 128. Wieviele 5-stellige Telephonnummern enthalten mindestens eine Ziffer, die mehrmals vorkommt?

(2P.)

Übung 129. Wieviele verschiedene Zahlenkombinationen kann man durch Werfen von 4 ununterscheidbaren Würfeln erzielen?

(2P.)

Übung 130. Wieviele ganzzahlige Lösungen hat die Gleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

unter der Voraussetzung

(a) $x_j > 0$

(b) $x_j \geq 0$

Wie hängen die Lösungen zusammen?

(2+2P.)

Übung 131. Herr Österreicher macht auf Mallorca Urlaub und geht in ein Postkartengeschäft. Es gibt Postkarten mit 30 verschiedenen Motiven. Wieviele Möglichkeiten hat Herr Österreicher, seine 23 Onkel und Tanten mit Postkarten zu beglücken, wenn jede(r)

(a) genau eine Postkarte bekommen soll?

(b) eine andere Postkarte bekommen soll?

(c) zwei verschiedene Postkarten bekommen soll?

(je 1P.)

Übung 132. Ein König wird auf die linke untere Ecke eines Schachbretts gestellt und soll in die rechte obere Ecke marschieren. Wieviele mögliche Wege gibt es, wenn er in jedem Schritt nur jeweils um ein Feld gerade nach rechts oder nach oben gehen darf?

(2P.)

Übung 133. An einer Fußballmeisterschaft nehmen N Mannschaften teil, von denen je zwei Mannschaften höchstens einmal gegeneinander spielen. Zeigen Sie mithilfe des Taubenschlagprinzips, daß es zu jedem Zeitpunkt mindestens zwei Mannschaften gibt, die genau die gleiche Anzahl von Spielen absolviert haben.

(3 P.)

Übung 134. Auf wieviele Arten kann man 13 Bälle in 27 Urnen verteilen, sodaß in jeder Urne höchstens 1 Ball zu liegen kommt, wenn

(a) die Bälle unterscheidbar sind?

(b) die Bälle ununterscheidbar sind?

(2+2P.)

Übung 135. Eine Gruppe von 30 Telematik-Studentinnen und Studenten, davon 4 Vegetarier, geht in die Mensa. Es gibt 3 verschiedene (fleischlose) Suppen, 5 Hauptgerichte, davon 2 vegetarisch, sowie 7 verschiedene süße Nachspeisen.

(a) Auf wieviele Arten können die 30 Personen jeweils ein Menü, bestehend aus Suppe, Hauptspeise und Nachspeise, zusammenstellen? (Vegetarier beachten!)

(b) Auf wieviele Arten können die 30 Personen jeweils ein Menü, bestehend aus Suppe, Hauptspeise und Nachspeise, zusammenstellen, wenn jede eine andere Speisenkombination bekommen soll? (Vegetarier beachten!)

Übung 136. Die Studentinnen und Studenten aus Aufgabe 3 nehmen an 5 Tischen zu je 6 Personen Platz.

(a) Auf wieviele Arten ist dies möglich (Sitzreihenfolge unwichtig)?

(b) Auf wieviele Arten können sie sich hinsetzen, wenn die Sitzreihenfolge berücksichtigt wird?

(c) Auf wieviele Arten können sie sich hinsetzen, wenn die 6 Studentinnen unter ihnen an einem Tisch sitzen wollen (Sitzreihenfolge unwichtig)?

(d) Auf wieviele Arten können sie sich hinsetzen, wenn die 6 Studentinnen unter ihnen an einem Tisch sitzen wollen und die Sitzreihenfolge berücksichtigt wird?

Übung 137. (a) Auf wieviele Arten kann man die Buchstaben des Wortes *MISSISSIPPI* anordnen?

(b) Auf wieviele Arten kann man die Buchstaben des Wortes *MISSISSIPPI* so anordnen, daß nicht alle I's, S und P's jeweils hintereinander stehen?

(1+3P.)

Übung 138. Eine Umfrage unter Studierenden an der TU hat die folgenden Anmeldungszahlen ergeben:

(a) 62 für Analysis

(b) 71 für Algebra

(c) 67 für Diskrete Mathematik

(d) 37 für Analysis und Algebra

(e) 32 für Analysis und Diskrete Mathematik

(f) 40 für Algebra und Diskrete Mathematik

(g) 12 für alle drei Fächer

(h) 44 für keines der drei Fächer

Beantworten Sie folgende Fragen:

(i) Wieviele waren für Analysis und Algebra angemeldet, aber nicht für diskrete Mathematik?

(ii) Wieviele waren für genau eines der drei Fächer angemeldet?

(iii) Wieviele Studierende wurden befragt?

(3P.)

Übung 139. Seien $A, B, C \subseteq X$ endliche Mengen und bezeichne $\bar{B} = X \setminus B$. Leiten Sie die Formel

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B \cap C| + \left|\bar{B} \cap C\right| - |A \cap B \cap C| - \left|A \cap \bar{B} \cap C\right|$$

her.

Übung 140. Auf wieviele Arten kann man 10 rote und 10 blaue Luftballons auf 3 Kinder verteilen, und zwar

(a) ohne Einschränkung

(b) so, daß jedes Kind mindestens einen roten Luftballon bekommt.

(c) so, daß jedes Kind mindestens einen Luftballon bekommt.

(3P.)

Übung 141. Eine Zahl zwischen 2 und 100 ist prim, genau dann wenn $k < 10$ und prim ist oder wenn k von keiner Primzahl $p < 10$ geteilt wird. Finden Sie die Anzahl der Primzahlen < 100 mithilfe des Inklusions-Exklusionsprinzips.

(3P.)

Übung 142.

Wieviele Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, 1500\}$ sind durch 2, aber nicht durch 3 und 5 teilbar?

(3 P.)

Übung 143. Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Permutationen der Buchstaben *aabbxxxxxx* in denen die *a*'s und die *b*'s jeweils getrennt sind: Erlaubt sind z.B. Wörter der Gestalt *ababxxxxxx*, nicht aber *bxbxaaxxxx*.

(2 P.)

E. Abzählende Potenzreihen

Übung 144. Zeige durch Koeffizientenvergleich für beliebiges $\alpha \neq 0$

$$\frac{d}{dx}(1+x)^{\alpha} = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

(2P.)

Übung 145. Bestimme durch Partialbruchzerlegung die Reihenentwicklung der Funktion

$$\frac{-7\,x+1}{2\,x^2-x-1}$$

(3P.)

Übung 146. Bestimme die Koeffizienten der rationalen Potenzreihe

$$\frac{7-5\,x}{(1-5\,x)^2\,(1+5\,x)}$$

(3P.)

Übung 147. Bestimme die Koeffizienten der Potenzreihe

$$f(x) = \frac{1}{(1-2x)^3}$$

mit Hilfe des verallgemeinerten binomischen Lehrsatzes (D.4.9).

(3P.)

Übung 148. Gegeben sei die Zahlenfolge $a_n = n \cdot 2^n + 3^n$. Finde geschlossene Ausdrücke für die erzeugenden Potenzreihen

$$(a) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad\qquad (b) \qquad E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n;$$

Letztere bezeichnet man als *exponentielle erzeugende Potenzreihe.*

(2+2P.)

Übung 149. Finde die erzeugende Funktion $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$ der *harmonischen Zahlen*

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Hinweis: (E.1.27)

(3P.)

Übung 150. Berechne für alle n

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Hinweis: Betrachte

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\right)$$

und (E.1.27).

(4 P.)

Übung 151. Auf wieviele Arten kann man 25 Cent mit 7 Münzen bezahlen?

Hinweis: Beispiel (E.1.26) mit der Bewertung $k \to x^k \cdot y$.

(4 P.)

Übung 152. Bestimme mittels erzeugender Funktionen

(a) die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von 7 Kugeln aus einer Urne mit 6 weißen, 6 roten und 6 schwarzen Kugeln, wobei nur eine gerade Zahl weißer, eine ungerade Zahl schwarzer, und eine durch 3 teilbare Zahl roter Kugeln entnommen werden darf.

(b) die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von 8 Kugeln aus einer Urne mit 7 weißen, 6 roten und 7 schwarzen Kugeln, wobei nur eine ungerade Zahl weißer, eine gerade Zahl schwarzer, und eine durch 3 teilbare Zahl roter Kugeln entnommen werden darf.

(3P.)

Übung 153. Gegeben seien $2n$ Kugeln, wovon n Kugeln weiß sind und die restlichen lauter verschiedene bunte Farben haben. Gesucht ist die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von n Kugeln unter Verwendung erzeugender Funktionen.

(3P.)

Übung 154. Zeige, daß

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Hinweis: Vergleiche die Reihenentwicklungen von

$$(1+x)^{2n} \text{ und } (1+x)^n(1+x)^n.$$

(2P.)

Übung 155. Löse die Rekursionsgleichungen

$$\begin{array}{lllll} (a) & a_{n+2} - a_{n+1} - 3a_n = 2^n, & n \geq 0 & a_0 = 1 & a_1 = 2 \\ (b) & a_{n+2} - 2a_{n+1} - 8a_n = (n+1)\,2^n, & n \geq 0 & a_0 = 1 & a_1 = 1 \end{array}$$

(3+3P.)

Übung 156. Finde die erzeugende Funktion $F_k(x) = \sum_m a_{km}x^m$ für die Anzahl a_{km} der Möglichkeiten, mit k Würfeln die Summe m zu würfeln.

(3P.)

Übung 157. Berechne die exponentielle erzeugende Potenzreihe $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}x^n$ der Folgen b_n, die gegeben sind durch die Rekursionen

(a) $b_0 = 1 \quad b_n = -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}, \quad n \geq 0$

(b) $b_0 = 1 \quad b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}, \quad n \geq 0$

(4+4P.)

F. Graphen und Bäume

Übung 158. Zeichne den "Nachbarschaftsgraphen" der europäischen Union, bestimme die Kanten- und Knotenmenge und färbe ihn mit möglichst wenigen Farben.

(2P.)

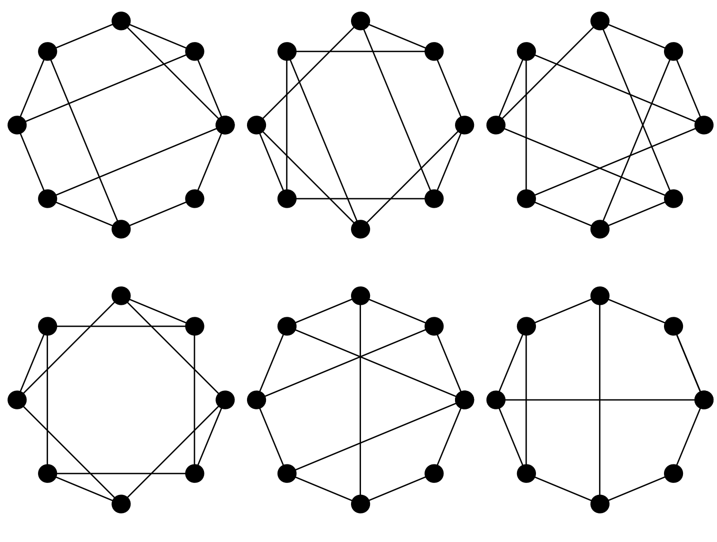
Übung 159. Zeige, daß in einem ungerichteten Graphen G die Relation

$$x \, R \, y \iff \exists \text{ Weg von } x \text{ nach } y$$

eine Äquivalenzrelation ist. Gilt dies auch, wenn man "Weg" durch "Pfad" ersetzt?

(3P.)

Übung 160. Zwei Graphen G_1 und G_2 heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V(G_1) \to V(G_2)$ zwischen beiden Knotenmengen gibt, sodaß $[x, y] \in E(G_1) \iff [f(x), f(y)] \in E(G_2)$. Isomorphe Graphen werden üblicherweise identifiziert. Die folgenden Bilder zeigen sechs Graphen, von denen jeweils zwei zueinander isomorph sind. Finde die drei isomorphen Paare.



(3P.)

Übung 161. Die Gradfolge eines Graphen ist die Folge der Grade der einzelnen Knoten, z.B. haben die Graphen aus dem vorhergehenden Beispiel alle die Gradfolge $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$. Ist es möglich, Graphen mit den folgenden Gradfolgen zu konstruieren?

(a)	$(3,3,3,3)$	(b)	$(1,2,3,4)$
(c)	$(3,3,3,2,1)$	(d)	$(1,1,1,1,1)$

(je 2P.)

Übung 162. Bestimme alle möglichen Gradfolgen eines Graphen mit vier Knoten (nicht-zusammenhängende Graphen miteingeschlossen).

(2P.)

Übung 163. Zeige, daß die Gradfolge eines Graphen nicht aus lauter verschiedenen Zahlen bestehen kann, d.h., in jedem Graphen haben mindestens zwei Knoten den gleichen Grad.

NB: Schleifen sind nicht erlaubt.

(2P.)

Übung 164. Bei einem Politikertreffen nehmen 16 Herren und eine unbekannte Anzahl Damen teil. Bei der Begrüßung schüttelt jeder der Herren je 5 Damen die Hände und umgekehrt schüttelt jede Dame je 8 Herren die Hand. Wieviele Damen nehmen an dem Treffen teil?

(2P.)

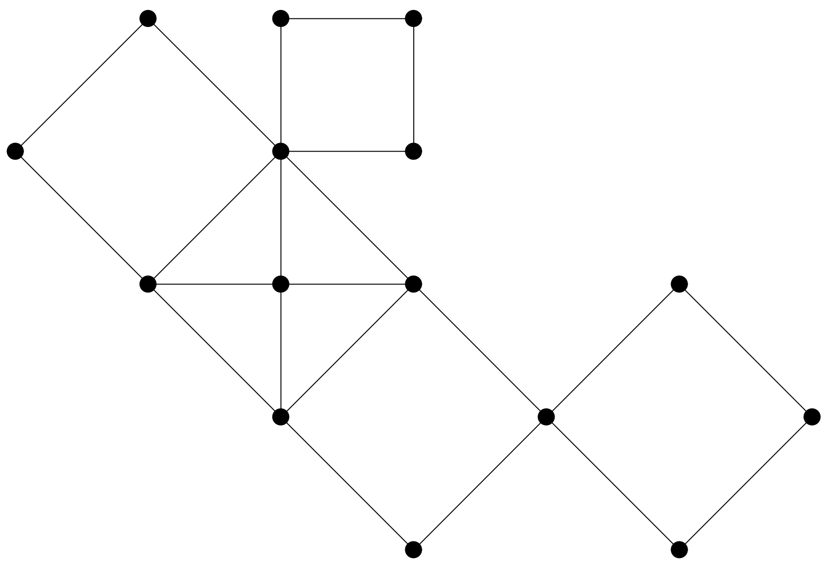
Übung 165. Ein Dominospiel besteht aus Spielsteinen mit allen möglichen (ungeordneten) Kombinationen von zwei Symbolen aus einer gegebenen Symbolmenge. Ist es möglich, alle Dominosteine gemäß den Dominoregeln in einem Kreis anzuordnen, wenn

(a) Die Symbole □, ⚀, ⚁, ..., ⚅ erlaubt sind?

(b) Die Symbole ⚀, ⚁, ..., ⚅ erlaubt sind?

(4P.)

Übung 166. Gegeben sei der Graph



Finde, wenn möglich, einen Eulerschen Kreis bzw. Weg mithilfe des Algorithmus von Fleury.

(2P.)

Übung 167. Die Staubsaugervertreter E, A, D und S treffen sich mit den Heißluftexperten K und G zum geheimen Informationsaustausch auf einer Yacht. Dabei muß immer gewährleistet sein, daß mindestens eine und höchstens zwei Personen zugleich auf der Yacht sind und außerdem müssen genau die folgenden Personen je 5 Minuten lang zusammentreffen:

E trifft auf A und G

A trifft auf D, S und K

D trifft auf K und G

S trifft auf G

Wie ist das in möglichst kurzer Zeit zu bewerkstelligen?

Übung 168. Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

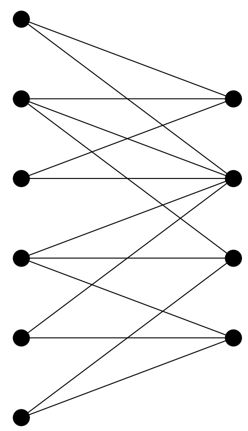
und Kanten

$$E = \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [3, 4], [3, 5], [3, 6], [4, 5], [4, 6], [5, 6]\}.$$

Zeichne diesen Graphen und stelle fest, ob er planar ist.

(2P.)

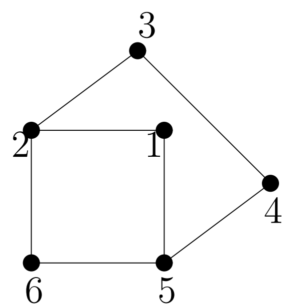
Übung 169. Zeige, daß der Graph



keinen Hamiltonschen Kreis besitzt.

(3P.)

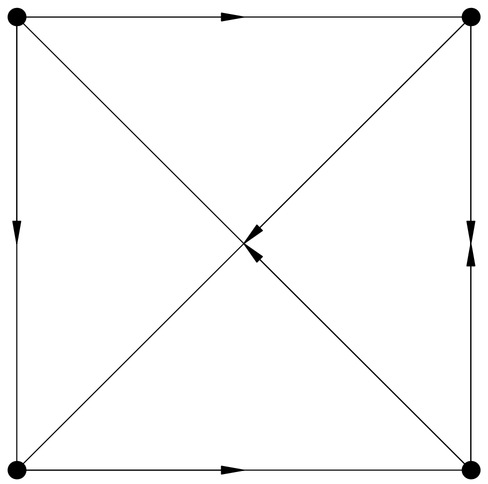
Übung 170. Gegeben sei der Graph



Erstelle die Adjazenzmatrix und finde die Anzahl der Wege der Länge 5 von Knoten 2 nach Knoten 3.

(4P.)

Übung 171. Bestimme die Adjazenzmatrix des Graphen



und bestimme die Anzahl der Wege der Länge 7 von der linken oberen zur rechten unteren Ecke.

(4P.)

Übung 172. Bestimme

(a) die Funktion $w_{1,1}(z)$ und

(b) die Anzahl der geschlossenen Wege der Länge k mit Ausgangsknoten 1.

für die folgenden (Di-)Graphen

(i) ungerichteter Graph ohne Mehrfachkanten,
$V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{[1, 2]\ ,\ [1, 3]\ ,\ [2, 3]\}$

(ii) gerichteter Graph ohne Mehrfachkanten,
$V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{[1 \to 2]\ ,\ [2 \to 1]\ ,\ [2 \to 3]\ ,\ [3 \to 1]\ ,\ [1 \to 3]\}$.

(Es ist empfehlenswert, am Ende der Rechnungen die Probe für $k = 0, 1, 2$ zu machen !)

(4+4P.)

Übung 173. Wieviele Bäume enthält ein Wald mit n Knoten und m Kanten?

(2P.)

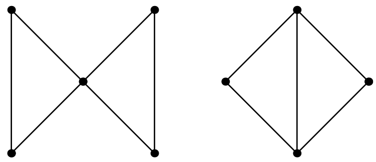
Übung 174. Zeichne alle nicht isomorphen Bäume mit

(a) 6 Knoten

(b) 7 Knoten

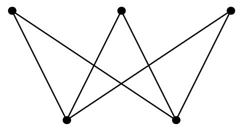
(je 2P.)

Übung 175. Bestimme alle Spannbäume der folgenden Graphen



(3P.)

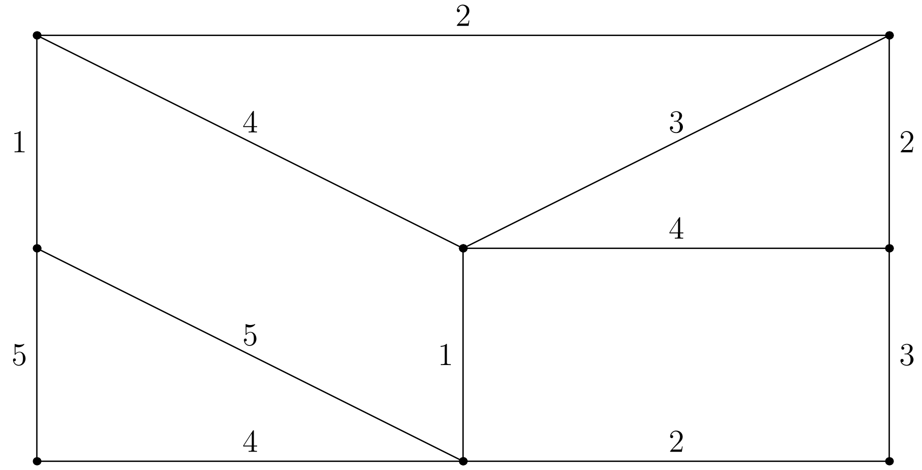
Übung 176. Wieviele Spannbäume hat der $K_{2,3}$?



$K_{2,3}$

(3P.)

Übung 177. Bestimme alle minimalen Spannbäume des folgenden gewichteten Graphen:

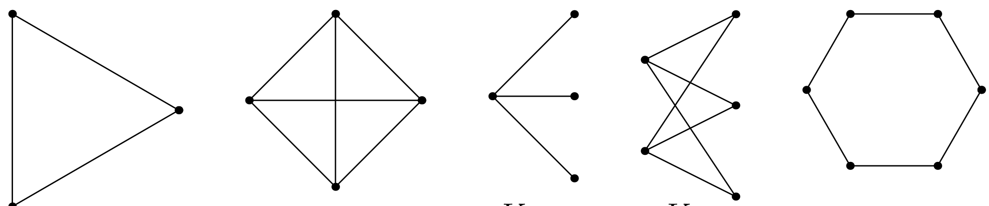


(3P.)

Übung 178. Sei G ein ungerichteter Graph mit Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Der *Kantengraph* $L(G)$ ist der folgendermaßen definierte ungerichtete Graph:

> Die Knoten von $L(G)$ sind $v_1, v_2, \ldots, v_m$.
>
> $[v_i, v_j]$ ist eine Kante von $L(G)$ genau dann, wenn e_i und e_j einen gemeinsamen Knoten in G haben.

Zeichne die Kantengraphen von K_3, K_4, $K_{1,3}$, $K_{2,3}$ und C_6:



K_3 $\quad$ K_3 $\quad$ $K_{1,3}$ $\quad$ $K_{2,3}$ $\quad$ C_6

(3P.)

Übung 179. Ein *Eulerscher Graph* ist ein Graph, der einen Eulerschen Kreis besitzt. Zeige, daß der Kantengraph eines Eulerschen Graphen wieder Eulerscher Graph ist.

Gilt auch die Umkehrung?

(2P.)