11 Zusatzbeispiele

Z1. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die folgende Ungleichung gilt: (2 Pkt.)

$$|x-5| \leq x$$

Z2. Bestimmen Sie – falls existierend – das Supremum und das Infimum der nachfolgenden Menge reeller Zahlen. Sind diese auch Maxima und Minima? (2 Pkt.)

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2 - \frac{1}{n^2},\, n \in \mathbb{N},\, n \geq 2\}$$

Z3. Zeigen Sie, dass die folgenden rekursiv gegebenen Folgen konvergieren und bestimmen Sie ihren Grenzwert: (je 3 Pkt.)

(a) $a_1 = \frac{1}{4}; \quad a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$ (b) $a_1 = 1; \quad a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2}$

Z4. Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz: (3 Pkt.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n^2}{2}\right) \frac{(n^2+1)\, 2^n}{(n+1)!\, \sqrt{n}}$$

Z5. Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz: (3 Pkt.)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n^3\right) 2^n (n+1)!^2}{\sqrt{n}(2n)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (n-1)^3 \frac{\cos(n\pi)}{(n-2)^4}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \arctan(n^2)\right)^{n/2} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{\pi}\right)}{5^n}$

Z6. Bestimmen Sie zu den folgenden Daten das Interpolationspolynom mit Hilfe des Newton-Verfahrens: (3 Pkt.)

x_i	-1	0	2	3	4
$f(x_i)$	-1	3	11	27	19

Z7. Bestimmen Sie den ganzzahligen Anteil und den Rest bei der Polynomdivision: (2 Pkt.)

$$\frac{3x^6 + 4x^5 - 3x^3 + x^2 - 4x + 2}{x^3 + x - 2}$$

Z8. Berechnen Sie die Partialbruchdarstellung der folgenden rationalen Funktionen mit Hilfe der Einsetzmethode: (3 Pkt.)

(a) $\displaystyle\frac{4x^2 - 2x + 2}{(x^2-1)(x+1)}$ (b) $\displaystyle\frac{-4x}{(x^2+1)(x+1)^3}$

Z9. Berechnen Sie die Partialbruchdarstellung der folgenden rationalen Funktion mittels Koeffizientenvergleich: (3 Pkt.)

$$\frac{3x^2 - 5x - 10}{(x^2-4)(x-1)}$$

Z10. Beweisen Sie, dass die Gleichung $e^{2-x}(x-1)^2 = 10$ im Intervall $(-3, 0.5)$ eine Lösung besitzt. Begründen Sie ob diese Lösung eindeutig ist. (2 Pkt.)

Z11. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^n$? (je 2 Pkt.)

(a) $\{\vec{x} : \max(x_1, \ldots, x_n) \geq 0\}$ (b) $\{\vec{x} : 2x_1 + x_3 = 0\}$

Z12. Überprüfen Sie die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$ auf lineare Unabhängigkeit: (3 Pkt.)

$$\vec{v}_1 = (1, 0, -2, 2) \qquad \vec{v}_2 = (-2, 1, 1, 2) \qquad \vec{v}_3 = (5, -2, -4, 2)$$

Z13. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion f, alle Werte von x für die $f(x)$ stetig, bzw. links-, oder rechtsseitig stetig ist. Beheben Sie, falls möglich, Unstetigkeitsstellen. (4 Pkt.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3}, & x < -2 \\ \frac{1}{3}, & x = -2 \\ \frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}, & -2 < x < 2 \\ \frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}, & x \geq 2 \end{cases}$$