

Плътност на k -свободни полиномиални стойности

Пролетна научна сесия 2021

Факултет по математика и информатика на СУ (онлайн)

Костадинка Лапкова
в съавторство със *Stanley Yao Xiao* (Торонто)

Технически университет Грац, Австрия

27.03.2021

Казваме, че цялото число n е k -свободно, ако няма просто число p , такова че p^k да дели n .

Нека полиномът $F(\bar{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ е от степен d .

Казваме, че цялото число n е k -свободно, ако няма просто число p , такова че p^k да дели n .

Нека полиномът $F(\bar{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ е от степен d .

Дефинираме основната величина, която се стремим да оценим:

$$N_{F,k}(B) := \# \{ \bar{x} \in \mathbb{Z}^n : |x_i| \leq B, i = 1, \dots, n; F(\bar{x}) \text{ е } k\text{-свободно} \}.$$

Казваме, че цялото число n е k -свободно, ако няма просто число p , такова че p^k да дели n .

Нека полиномът $F(\bar{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ е от степен d .

Дефинираме основната величина, която се стремим да оценим:

$$N_{F,k}(B) := \# \{ \bar{x} \in \mathbb{Z}^n : |x_i| \leq B, i = 1, \dots, n; F(\bar{x}) \text{ е } k\text{-свободно} \}.$$

- Целта е да установим асимптотична формула за $N_{F,k}(B)$, стига да няма просто p , такова че $p^k \mid F(\bar{x})$ за всяко $\bar{x} \in \mathbb{Z}^n$;

Казваме, че цялото число n е k -свободно, ако няма просто число p , такова че p^k да дели n .

Нека полиномът $F(\bar{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ е от степен d .

Дефинираме основната величина, която се стремим да оценим:

$$N_{F,k}(B) := \# \{ \bar{x} \in \mathbb{Z}^n : |x_i| \leq B, i = 1, \dots, n; F(\bar{x}) \text{ е } k\text{-свободно} \}.$$

- Целта е да установим асимптотична формула за $N_{F,k}(B)$, стига да няма просто p , такова че $p^k \mid F(\bar{x})$ за всяко $\bar{x} \in \mathbb{Z}^n$;
- да разберем каква е зависимостта на k от d ;

Казваме, че цялото число n е k -свободно, ако няма просто число p , такова че p^k да дели n .

Нека полиномът $F(\bar{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ е от степен d .

Дефинираме основната величина, която се стремим да оценим:

$$N_{F,k}(B) := \# \{ \bar{x} \in \mathbb{Z}^n : |x_i| \leq B, i = 1, \dots, n; F(\bar{x}) \text{ е } k\text{-свободно} \}.$$

- Целта е да установим асимптотична формула за $N_{F,k}(B)$, стига да няма просто p , такова че $p^k \mid F(\bar{x})$ за всяко $\bar{x} \in \mathbb{Z}^n$;
- да разберем каква е зависимостта на k от d ;
- колкото k е по-малко, и по-отдалечено от d , толкова по-трудна става задачата.

Въведение, $n = 1$

Очакваната асимптотична формула за определена константа $c_{F,k} > 0$:

$$N_{F,k}(B) \sim c_{F,k} B$$

и е установена в следния хронологичен ред:

- $k \geq d$ (Ricci, 1933);

Въведение, $n = 1$

Очакваната асимптотична формула за определена константа $c_{F,k} > 0$:

$$N_{F,k}(B) \sim c_{F,k} B$$

и е установена в следния хронологичен ред:

- $k \geq d$ (Ricci, 1933);
- $k = d - 1$ (Erdős, 1953):

$$N_{F,d-1}(B) \gg \frac{B}{(\log \log B)^2};$$

Въведение, $n = 1$

Очакваната асимптотична формула за определена константа $c_{F,k} > 0$:

$$N_{F,k}(B) \sim c_{F,k} B$$

и е установена в следния хронологичен ред:

- $k \geq d$ (Ricci, 1933);
- $k = d - 1$ (Erdős, 1953):

$$N_{F,d-1}(B) \gg \frac{B}{(\log \log B)^2};$$

- $k = d - 1$ (Hooley, 1967);

Въведение, $n = 1$

Очакваната асимптотична формула за определена константа $c_{F,k} > 0$:

$$N_{F,k}(B) \sim c_{F,k} B$$

и е установена в следния хронологичен ред:

- $k \geq d$ (Ricci, 1933);
- $k = d - 1$ (Erdős, 1953):

$$N_{F,d-1}(B) \gg \frac{B}{(\log \log B)^2};$$

- $k = d - 1$ (Hooley, 1967);
- $k \geq (3d + 1)/4$ (Browning, 2011).

Очакваната асимптотична формула

$$N_{F,k}(B) \sim c_{F,k} B^2$$

е доказана в следните случаи

- $k \geq (d - 1)/2$ (Greaves, 1992);

Очакваната асимптотична формула

$$N_{F,k}(B) \sim c_{F,k} B^2$$

е доказана в следните случаи

- $k \geq (d-1)/2$ (Greaves, 1992);
- $k > 7d/16$ (Browning, 2011);
- $k > 7d/18$ (Xiao, 2017).

Въведение, $n = 2$, F -хомогенен

Очакваната асимптотична формула

$$N_{F,k}(B) \sim c_{F,k} B^2$$

е доказана в следните случаи

- $k \geq (d - 1)/2$ (Greaves, 1992);
- $k > 7d/16$ (Browning, 2011);
- $k > 7d/18$ (Xiao, 2017).

Тъй като F е хомогенен полином, в тези случаи се прилагат методи от геометрия на числата.

Съществуване на долна граница за определни k

$$N_{F,k}(B) \gg c_{F,k} B^2$$

е доказано в следните случаи:

- Hooley, 2009;
- Browning, 2011.

Съществуване на долна граница за определни k

$$N_{F,k}(B) \gg c_{F,k} B^2$$

е доказано в следните случаи:

- Hooley, 2009;
- Browning, 2011.

В друга статия от 2009 год. Hooley доказва асимптотина формула за определен тип нехомогенни полиноми на 2 променливи.

Най-трудният случай е $k = 2$ за безквадратни стойности на $F(\bar{x})$.
Тогава

$$N_{F,2}(B) \sim c_{F,2} B^n$$

е установена от

- Roopen, 2003, използвайки абс-хипотезата, и плътност дефинирана по различен начин (не точно $N_{F,2}$);
- Bhargava et al., 2014-2016, за специални типове полиноми.

Най-трудният случай е $k = 2$ за безквадратни стойности на $F(\bar{x})$.
Тогава

$$N_{F,2}(B) \sim c_{F,2} B^n$$

е установена от

- Roopen, 2003, използвайки абс-хипотезата, и плътност дефинирана по различен начин (не точно $N_{F,2}$);
- Bhargava et al., 2014-2016, за специални типове полиноми.

Ние ще приложим методи от статиите на Hooley и Browning, споменати в предните слайдове.

Резултати

Казваме, че полиномът F е k -допустим, ако за всяко просто число p съществува n -орка $(m_1, \dots, m_n)$, така че $p^k \nmid F(m_1, \dots, m_n)$.

Резултати

Казваме, че полиномът F е k -допустим, ако за всяко просто число p съществува n -орка $(m_1, \dots, m_n)$, така че $p^k \nmid F(m_1, \dots, m_n)$.

Теорема 1 (L.- Xiao, 2019)

Нека $k \geq 2$ е положително цяло число и F е k -допустим безквадратен полином $F(\bar{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ от степен d , за произволно $n \geq 1$. Тогава съществува $C_{F,k} > 0$, такава че асимптотичната формула

$$N_{F,k}(B) \sim C_{F,k} B^n$$

е изпълнена за всяко $k \geq (3d + 1)/4$.

Резултати

Казваме, че полиномът F е k -допустим, ако за всяко просто число p съществува n -орка $(m_1, \dots, m_n)$, така че $p^k \nmid F(m_1, \dots, m_n)$.

Теорема 1 (L.- Xiao, 2019)

Нека $k \geq 2$ е положително цяло число и F е k -допустим безквадратен полином $F(\bar{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ от степен d , за произволно $n \geq 1$. Тогаво съществува $C_{F,k} > 0$, такава че асимптотичната формула

$$N_{F,k}(B) \sim C_{F,k} B^n$$

е изпълнена за всяко $k \geq (3d + 1)/4$.

Тук $C_{F,k} = \prod_p \left(1 - \rho_F(p^k)/p^{kn}\right)$, където

$$\rho_F(m) = \# \{ \bar{s} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n : F(\bar{s}) \equiv 0 \pmod{m} \}.$$

Прости променливи

Можем да изведем аналог на горната теорема за случая на прости променливи. Разглеждаме простите числа $p_i, i = 1, \dots, n$ и $\bar{p} := (p_1, \dots, p_n)$, и въвеждаме величината

$$\mathcal{N}_{F,k}(B) := \# \{ \bar{p} \in \mathbb{Z}^n : |p_i| \leq B, i = 1, \dots, n; F(\bar{p}) \text{ е } k\text{-свободно} \}.$$

Прости променливи

Можем да изведем аналог на горната теорема за случая на прости променливи. Разглеждаме простите числа $p_i, i = 1, \dots, n$ и $\bar{p} := (p_1, \dots, p_n)$, и въвеждаме величината

$$\mathcal{N}_{F,k}(B) := \# \{ \bar{p} \in \mathbb{Z}^n : |p_i| \leq B, i = 1, \dots, n; F(\bar{p}) \text{ е } k\text{-свободно} \}.$$

Теорема 2 (L.- Xiao, 2019)

В сила е асимптотичната формула

$$\mathcal{N}_{F,k}(B) \sim C'_{F,k} \frac{B^n}{(\log B)^n}$$

за определена $C'_{F,k} > 0$ и $k \geq (3d + 1)/4$.

Тук $C'_{F,k} = \prod_p (1 - \rho_F^*(p^k)/\varphi(p^k)^n)$, където $\rho_F^*(m)$ е аналог на $\rho_F(m)$.

Прости променливи и Erdős

Хипотеза [Erdős,1953]

За неразложимия полином $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ от степен d , който е $(d-1)$ -допустим, множеството $f(\mathbb{P}) = \{f(p), p - \text{просто}\}$ съдържа безбройно много $(d-1)$ -свободни числа.

Хипотеза [Erdős,1953]

За неразложимия полином $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ от степен d , който е $(d-1)$ -допустим, множеството $f(\mathbb{P}) = \{f(p), p - \text{просто}\}$ съдържа безбройно много $(d-1)$ -свободни числа.

- (Heath-Brown, Browning, Helfgott,...)
- (Reuss, 2013) $d \geq 3$

Прости променливи и Erdős

Хипотеза [Erdős,1953]

За неразложимия полином $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ от степен d , който е $(d-1)$ -допустим, множеството $f(\mathbb{P}) = \{f(p), p - \text{просто}\}$ съдържа безбройно много $(d-1)$ -свободни числа.

- (Heath-Brown, Browning, Helfgott,...)
- (Reuss, 2013) $d \geq 3$

Можем да разширим хипотезата на Erdős и за произволен брой променливи.

Хипотеза, $n \geq 1$

За всяко $n \geq 1$ и всеки неразложим полином $F(\vec{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ от степен d , който е $(d-1)$ -допустим, множеството $F(\mathbb{P}^n) = \{F(p_1, \dots, p_n), p_i - \text{просто}\}$ съдържа безбройно много $(d-1)$ -свободни числа.

Резултати (продължение)

От Теорема 1 веднага следва, че

Следствие $k = d - 1$

За всеки безквадратен $(d - 1)$ -допустим полином $F(\bar{x}) \in \mathbb{Z}[\bar{x}]$ и $d \geq 5$ имаме

$$N_{F,d-1}(B) \sim C_{F,d-1} B^n.$$

Резултати (продължение)

От Теорема 1 веднага следва, че

Следствие $k = d - 1$

За всеки безквадратен $(d - 1)$ -допустим полином $F(\bar{x}) \in \mathbb{Z}[\bar{x}]$ и $d \geq 5$ имаме

$$N_{F,d-1}(B) \sim C_{F,d-1} B^n.$$

А Теорема 2 потвърждава разширената хипотеза на Erdős в случаите, когато $d \geq 5$.

Следствие

За всеки безквадратен $(d - 1)$ -допустим полином $F(\bar{x}) \in \mathbb{Z}[\bar{x}]$ от степен $d \geq 5$ имаме в сила

$$\mathcal{N}_{F,d-1}(B) \sim C'_{F,d-1} \frac{B^n}{(\log B)^n}.$$

Резултати (продължение)

Успяхме да запълним и оставащите случаи на асимптотична формула за $N_{F,d-1}(B)$, при $d = 3, 4$.

Теорема 3 (L-Xiao, 2020)

За всеки безквадратен $(d-1)$ -допустим полином $F(\bar{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ от $n \geq 1$ променливи и степен $d \geq 3$ е в сила

$$N_{F,d-1}(B) \sim C_{F,d-1} B^n.$$

Резултати (продължение)

Успяхме да запълним и оставащите случаи на асимптотична формула за $N_{F,d-1}(B)$, при $d = 3, 4$.

Теорема 3 (L-Xiao, 2020)

За всеки безквадратен $(d-1)$ -допустим полином $F(\bar{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ от $n \geq 1$ променливи и степен $d \geq 3$ е в сила

$$N_{F,d-1}(B) \sim C_{F,d-1} B^n.$$

За съжаление нашият метод не може да докаже очакваната асимптотика при прости променливи:

$$\mathcal{N}_{F,d-1}(B) \stackrel{?}{\sim} C'_{F,d-1} \frac{B^n}{(\log B)^n}, \quad \text{за } d = 3, 4, \text{ и произволно } n \geq 1.$$

Идея на доказателството; пресяване

Нека да припомним

- Теорема 1 : $N_{F,k} \sim C_{F,k} B^n$, $k \geq (3d + 1)/4$;
- Теорема 3 : $N_{F,d-1} \sim C_{F,d-1} B^n$, $d \geq 3$.

Идея на доказателството; пресяване

Нека да припомним

- Теорема 1 : $N_{F,k} \sim C_{F,k} B^n$, $k \geq (3d + 1)/4$;
- Теорема 3 : $N_{F,d-1} \sim C_{F,d-1} B^n$, $d \geq 3$.

В началото прилагаме простото решето на Hooley

$$N_1(B) - N_2(B) - N_3(B) \leq N_{F,k}(B) \leq N_1(B)$$

за определени величини N_1, N_2, N_3 .

Идея на доказателството; пресяване

Нека да припомним

- Теорема 1 : $N_{F,k} \sim C_{F,k} B^n$, $k \geq (3d + 1)/4$;
- Теорема 3 : $N_{F,d-1} \sim C_{F,d-1} B^n$, $d \geq 3$.

В началото прилагаме простото решето на Hooley

$$N_1(B) - N_2(B) - N_3(B) \leq N_{F,k}(B) \leq N_1(B)$$

за определени величини N_1, N_2, N_3 . Разликата в доказателствата на двете теореми е начина на оценка единствено на N_3 . По-специално

- Теорема 1 : метод на детерминантата [Browning, 2011];
- Теорема 3 : методи на решето [Hooley, 2009].

Идея на доказателството; просто решето

За параметрите $\xi_1 < \xi_2$ дефинираме

$$N_1(B) = \#\{\bar{x} \in \mathbb{Z}^n : \|\bar{x}\| \leq B, \quad p^k | F(\bar{x}) \implies p > \xi_1\},$$

$$N_2(B) = \#\{\bar{x} \in \mathbb{Z}^n : \|\bar{x}\| \leq B, p^k | F(\bar{x}) \implies p > \xi_1,$$

$$\exists \xi_1 < p \leq \xi_2 : p^2 | F(\bar{x})\},$$

и

$$N_3(B) = \#\{\bar{x} \in \mathbb{Z}^n : \|\bar{x}\| \leq B, p^k | F(\bar{x}) \implies p > \xi_1,$$

$$p^2 \nmid F(\bar{x}) \text{ за } \xi_1 < p \leq \xi_2 \text{ и } \exists p > \xi_2 : p^k | F(\bar{x})\}.$$

Тогава неравенствата от простото решето

$$N_1(B) - N_2(B) - N_3(B) \leq N_{F,k}(B) \leq N_1(B)$$

са изпълнени, защото са еквивалентни на твърдението

k -свободни, такива че
 $\forall p \in (\xi_1, \xi_2] \quad p^2 \nmid F(\bar{x})$

$$\leq N_{F,k}(B) \leq$$

k -свободни или
делими на p^k
за някое $p > \xi_1$

Идея на доказателството; $N_1(B)$

Сравнително лесно се вижда, че

$$N_1(B) = B^n \prod_{p \leq \xi_1} \left(1 - \frac{\rho_F(p^k)}{p^{nk}} \right) + O_\varepsilon (B^{n-1+\varepsilon}).$$

Идея на доказателството; $N_1(B)$

Сравнително лесно се вижда, че

$$N_1(B) = B^n \prod_{p \leq \xi_1} \left(1 - \frac{\rho_F(p^k)}{p^{nk}} \right) + O_\varepsilon(B^{n-1+\varepsilon}).$$

Лема

Нека F е безквадратен полином на n променливи с цели коефициенти, който е k -допустим. Тогава за всяко $k \geq 2$ имаме $\rho_F(p^k) = O_F(p^{nk-2})$.

Оттук следва, че безкрайното произведение $C_{F,k} = \prod_p (1 - \rho_F(p^k)/p^{kn})$ е сходящо.

Идея на доказателството; $N_1(B)$

Сравнително лесно се вижда, че

$$N_1(B) = B^n \prod_{p \leq \xi_1} \left(1 - \frac{\rho_F(p^k)}{p^{nk}} \right) + O_\varepsilon(B^{n-1+\varepsilon}).$$

Лема

Нека F е безквадратен полином на n променливи с цели коефициенти, който е k -допустим. Тогава за всяко $k \geq 2$ имаме $\rho_F(p^k) = O_F(p^{nk-2})$.

Оттук следва, че безкрайното произведение $C_{F,k} = \prod_p (1 - \rho_F(p^k)/p^{kn})$ е сходящо. Когато $B \rightarrow \infty$, получаваме

$$N_1(B) = \text{Главен член} + \text{Остатъчен член},$$

затова е достатъчно да докажем, че $N_2(B)$ и $N_3(B)$ са също в рамките на остатъчния член.

Идея на доказателството; $N_2(B)$

Величината $N_2(B)$ брой тези $\bar{x} \in \mathbb{Z}^n$, за които съществува просто $p \in (\xi_1, \xi_2]$, такова че $p^2 \mid F(\bar{x})$. Тогава има две възможности:

- $p^2 \mid F(\bar{x}), p \nmid \frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x})$

Идея на доказателството; $N_2(B)$

Величината $N_2(B)$ брой тези $\bar{x} \in \mathbb{Z}^n$, за които съществува просто $p \in (\xi_1, \xi_2]$, такова че $p^2 \mid F(\bar{x})$. Тогава има две възможности:

- $p^2 \mid F(\bar{x}), p \nmid \frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x})$

Тук за $f(x) := F(x, x_2, \dots, x_n)$ имаме $p \nmid \Delta(f)$ и свеждаме аргумента до полином на една променлива. Използваме, че $\rho_f(p^k) \leq d$ не зависи от коефициентите на f . Тогава оценяваме отгоре

$$\ll_d B^{n-1} \sum_{\xi_1 < p \leq \xi_2} \left(\frac{B}{p^2} + 1 \right) \ll_d \frac{B^n}{\xi_1} + \frac{B^{n-1} \xi_2}{\log \xi_2}$$

Идея на доказателството; $N_2(B)$

Величината $N_2(B)$ брой тези $\bar{x} \in \mathbb{Z}^n$, за които съществува просто $p \in (\xi_1, \xi_2]$, такова че $p^2 \mid F(\bar{x})$. Тогава има две възможности:

- $p^2 \mid F(\bar{x}), p \nmid \frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x})$

Тук за $f(x) := F(x, x_2, \dots, x_n)$ имаме $p \nmid \Delta(f)$ и свеждаме аргумента до полином на една променлива. Използваме, че $\rho_f(p^k) \leq d$ не зависи от коефициентите на f . Тогава оценяваме отгоре

$$\ll_d B^{n-1} \sum_{\xi_1 < p \leq \xi_2} \left(\frac{B}{p^2} + 1 \right) \ll_d \frac{B^n}{\xi_1} + \frac{B^{n-1} \xi_2}{\log \xi_2}$$

Всъщност нашият избор е $(\xi_1, \xi_2) = (\log B/nk, B(\log B)^{1/2})$ (Теорема 1) и $(\xi_1, \xi_2) = (\log_3 B / \log_4 B, B(\log B)^{1/n})$ (Теорема 5).

- $p^2 \mid F(\bar{x}), p \mid \frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x})$

Тези стойности оценяваме с помощта на решето на Ekedahl.

Решето на Ekedahl

Нека $\mathcal{B}$ е компактен регион в $\mathbb{R}^n$ с краен обем, и нека Y е затворена подсхема на $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$ от ко-размерност $s \geq 2$. Нека r и M са положителни реални числа. Тогава е изпълнено

$$\begin{aligned} \#\{\bar{x} \in r\mathcal{B} \cap \mathbb{Z}^n : \bar{x} \pmod{p} \in Y(\mathbb{F}_p) \text{ за някое просто } p > M\} \\ = O\left(\frac{r^n}{M^{s-1} \log M} + r^{n-s+1}\right). \end{aligned}$$

Ние разглеждаме многообразието

$$Y_F := \{\bar{x} \in \mathbb{C}^n : F(\bar{x}) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x}) = 0\}$$

Тогава ако

$$N^*(p; B) = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}^n : \|\bar{x}\| \leq B, \bar{x} \pmod{p} \in Y_F(\mathbb{F}_p)\},$$

втората група от точки преброявани от $N_2(B)$ е ограничена отгоре от

$$\# \bigcup_{p > \xi_1} N^*(p; B) \ll \frac{B^n}{\xi_1 \log \xi_1} + B^{n-1}$$

Благодаря за вниманието!