Thèse de Doctorat de Mathématiques
de l'Université Paris 6
Equipe d'Analyse

M. Franz LEHNER

M_n-espaces,
sommes d'unitaires
et
analyse harmonique sur le groupe libre.

soutenue le 22 septembre 1997 devant le jury composé de :

Mme Claire ANANTHARAMAN-DELAROCHE
M. Christian LE MERDY
M. Bernard MAUREY
M. Gilles PISIER

Cette thèse a été réalisée sous la direction de Monsieur Gilles PISIER. Je le remercie pour son attention et ses conseils qui rendaient ce travail possible. Il m'a proposé une multitude de problèmes intéressants tout en me laissant travailler très librement.
Je suis très reconnaissant à Madame Claire ANANTHARAMAN-DELAROCHE ainsi qu'à Messieurs Bernard MAUREY et Christian LE MERDY pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de participer au jury.
Je remercie la Gruppe Funktionalanalysis de l'université de Linz, le programme ERASMUS et en particulier Jim COOPER, qui m'a ouvert la possibilité de faire des études à Paris et m'a supporté pendant tout mon travail.
Les étudiants et les membres de l'équipe d'analyse, qui rendaient si joyeuse l'atmosphère dans le couloir 46-0, méritent toute ma gratitude.
Je ne dois pas oublier de remercier l'équipe de Milner Hall à Texas A&M University, où j'ai passé trois séjours et où le premier résultat de cette thèse a été découvert.
Sur le plan mathématique le contre-exemple construit dans le deuxième chapitre doit beaucoup à Philippe BIANE. Je le remercie pour plusieurs discussions très stimulantes.
Sur le plan administratif Asma HARCHARRAS m'a beaucoup aidé en accélerant le chemin bureaucratique de cette thèse. Je la remercie pour les heures qu'elle y a consacré.
Je remercie enfin Olga pour sa patience et son support, et mes parents, qui ont rendu possible mes études et m'ont accordé toute leur confiance.

Table des matières

Résumé vii

Chapitre I. M_n-espaces 1
I.1. Introduction et Définitions 2
I.2. Constructions de base 8
I.3. MIN et MAX 10
I.4. Sous-algèbres de $C(K; \boldsymbol{M}_n)$ 16
I.5. Produits tensoriels 17
I.6. Théorie locale des M_n-espaces et des espaces d'opérateurs 24
I.7. Exemples 27

Chapitre II. Sommes d'unitaires et analyse harmonique sur le groupe libre 37
Introduction 38
II.1. Examples 38
II.2. Families with nonnegative alternating mixed moments 41
II.3. A Characterization of the Leinert Property 45
II.4. A Counterexample. 51
II.5. Unitaries with nonnegative alternating mixed moments 53
II.6. Free operators with operator coefficients[1] 61

Bibliographie 67

[1] voir la note p. xii.

Résumé

Cette thèse est composée de deux parties. La première partie est consacrée à la théorie des M_n-espaces et des espaces d'opérateurs abstraites que l'on peut y associer. La deuxième partie traite quelques propriétés du groupe libre liées à une inégalité récemment démontrée dans [**45**].

M_n-espaces. La théorie des espaces d'opérateurs a été fondée récemment par les équipes Effros-Ruan et Blecher-Paulsen à partir de la caractérisation abstraite des sous-espaces de $B(H)$ comme espaces matriciellement normés avec la propriété L^∞, donnée dans la thèse de Z.-J. Ruan. Cette caractérisation a notamment permis de définir une notion de dualité et de développer une théorie des espaces normés «non-commutatifs» analogue à la théorie des espaces de Banach.

Rappelons donc que pour un espace vectoriel X on note $M_n(X)$ l'espace des matrices $x = [x_{ij}]_{i,j=1}^n$ avec coefficients $x_{ij} \in X$. D'après Effros-Ruan on appelle *norme matricielle* sur l'espace X la donnée d'une suite de normes $\{\| \; \|_n\}$ sur $M_n(X)$ qui vérifient les propriétés de compatibilité suivantes.

(R0) On a pour tout $k, n \in \mathbf{N}$ et toute matrice $x \in M_k(X)$ l'identité

$$\left\| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_n = \|x\|_k$$

(R1) Pour des matrices scalaires $\alpha = [\alpha_{ij}] \in \boldsymbol{M}_n$, $\beta = [\beta_{ij}] \in \boldsymbol{M}_n$ et pour une matrice $x = [x_{ij}] \in M_n(X)$ on a

$$\left\| \left[\sum_{k,l=1}^n \alpha_{ik} x_{kl} \beta_{lj} \right]_{i,j=1}^n \right\|_n \leq \|\alpha\| \, \|x\|_n \, \|\beta\|$$

La norme matricielle est dite L^∞ si pour $x \in M_m(X)$ et $x' \in M_n(X)$ elle vérifie en plus

$$\text{(R2)} \qquad \left\| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x' \end{bmatrix} \right\|_{m+n} = \max \{ \, \|x\|_m, \|x'\|_n \, \}$$

Les morphismes dans cette catégorie sont les applications complètement bornées (en abrégé c.b.). Le théorème de Ruan dit que si un espace matriciellement normé vérifie la condition (R2), alors il existe un plongement $X \to B(H)$ complètement isométrique. Pour cette raison on appelle (R1) et (R2) les *axiomes de Ruan*. Il y a donc deux façons de présenter un espace d'opérateurs X : Soit la donnée d'un plongement explicite $J : X \to B(H)$, soit la donnée d'une norme matricielle sur X vérifiant les axiomes de Ruan. En particulier, tout espace de Banach autant que sous-espace des fonctions continues sur la boule unité de son dual peut être muni d'une structure d'espace d'opérateurs «naturelle». À l'exception de quelques exemples, cette structure n'est pas la seule possible. En effet, Vern Paulsen [**40**] a observé que sur un espace de Banach X il y a toujours une structure d'espace d'opérateurs minimale et une structure maximale de sorte que toute autre structure d'espace d'opérateurs sur X est incluse entre ces deux structures et il a introduit le paramètre $\alpha(X) = \|id : MIN(X) \to MAX(X)\|_{cb}$ pour mesurer la «distance» entre MIN et MAX.

Le but de la première partie de cette thèse est d'étudier les espaces n-normés, c'est-à-dire la catégorie des espaces vectoriels X donnés avec une norme $\| \; \|_n$ sur $M_n(X)$ pour un nombre *n fixé*. D'une part, on va établir un critère analogue aux axiomes de Ruan caractérisant les espaces n-normés qui admettent une réalisation n-isométrique comme sous-espace de $B(H)$. D'autre part, un espace n-normé qui vérifie ce critère peut alors

être considéré comme classe d'équivalence d'espaces d'opérateurs et on peut définir des structures minimales et maximales analogues aux structures MIN et MAX de Paulsen.

Voici un résumé de la première partie.
Dans la section I.1 on donne la théorie de base des espaces n-normés. Les morphismes de cette catégorie sont les applications n-bornés. Comme dans la catégorie des espaces d'opérateurs on peut munir l'espace dual d'un espace n-normé avec une n-norme en posant $M_n(X^*) = B_n(X, \boldsymbol{M}_n)$. Un résultat de Roger Smith [**56**] implique que cette définition est compatible avec la définition du dual d'un espace d'opérateurs, c'est-à-dire que pour un espace d'opérateurs X, la norme sur $M_n(X^*)$ ne dépend que de la norme $\| \|_n$ sur $M_n(X)$. Pour caractériser les espace n-normés d'opérateurs, que l'on appellera désormais *M_n-espaces*, la condition (R2) doit être remplacée par la condition suivante :

$$\text{(R)} \qquad \left\|\sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i\right\|_{M_n(X)} \leq \left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|_{\boldsymbol{M}_n}^{1/2} \max \|x_i\|_{M_n(X)} \left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\|_{\boldsymbol{M}_n}^{1/2}$$

pour toutes suites finies $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n$ et $x_i \in M_n(X)$. On a en effet le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit $(X, \| \|_n)$ un espace n-normé. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe un plongement n-isométrique $X \to B(H)$.
(ii) Il existe un plongement n-isométrique $X \to M_n(C(K)) = C(K; \boldsymbol{M}_n)$.
(iii) $(X, \| \|_n)$ vérifie la condition (R).
(iv) L'inclusion naturelle $X \to X^{**}$ est une n-isométrie.

Par exemple, le dual d'un espace n-normé est toujours un M_n-espace.
Dans la section I.2 on rappelle les constructions de base d'espaces d'opérateurs qui peuvent être adaptées aux M_n-espaces, comme quotients, sommes directes, interpolation complexe, ultraproduits, conjugaison et transposition.
Dans la section I.3 les structures minimales et maximales d'espaces d'opérateurs sur un M_n-espace $(X, \| \|_n)$ sont introduites de manière analogue aux structures MIN et MAX de Paulsen. Ces structures seront notées $MIN(X, \| \|_n)$ et $MAX(X, \| \|_n)$ respectivement et pour $x \in M_p(X)$ on a les formules suivantes :

$$\|x\|_{M_p(MIN(X,\| \|_n))} = \sup \left\{ \left\|[\langle f_{ij}, x_{kl}\rangle]\right\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \,\middle|\, [f_{ij}] \in M_n(X^*), \left\|[f_{ij}]\right\|_n^* \leq 1 \right\}$$

$$\|x\|_{M_p(MAX(X,\| \|_n))} = \inf \left\{ \left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} \left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} \,\middle|\, x = \sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i, \right.$$
$$\left. \alpha_i \in \boldsymbol{M}_{p,n},\ \beta_i \in \boldsymbol{M}_{n,p},\ x_i \in M_n(X), \|x\|_n \leq 1 \right\}.$$

On peut donc caractériser les espaces $MIN(X, \| \|_n)$ comme les sous-espaces d'opérateurs de $C(K; \boldsymbol{M}_n)$. La structure MAX peut être définie également comme la structure duale de MIN. On a en effet

$$MAX(X, \| \|_n)^* = MIN(X^*, \| \|_n^*)$$
$$MIN(X, \| \|_n)^* = MAX(X^*, \| \|_n^*)$$

complètement isométriquement. Ceci est une conséquence du fait que la structure MIN est *injective* dans le sens qu'un plongement n-isométrique d'un M_n-espace $(X, \| \|_n)$ dans un autre M_n-espace $(Y, \| \|_n)$ induit un plongement complètement isométrique de $MIN(X, \| \|_n)$ dans $MIN(Y, \| \|_n)$. En particulier, on a l'identité complètement isométrique $MIN(X^{**}, \| \|_n^{**}) = MIN(X, \| \|_n)^{**}$. On peut aussi caractériser les structures MIN et MAX comme les structures universelles pour les propriétés d'extension suivantes.

Pour tout espace d'opérateurs Y et tout application n-bornée $u : Y \to (X, \| \|_n)$ on a que $u : Y \to MIN(X, \| \|_n)$ est complètement bornée avec $\|u\|_{cb} \leq \|u\|_n$.

Pour tout espace d'opérateurs Y et tout application n-bornée $u : (X, \| \|_n) \to Y$ on a que $u : MAX(X, \| \|_n) \to Y$ est complètement bornée avec $\|u\|_{cb} \leq \|u\|_n$.

Après la caractérisation des sous-espaces de $C(K; \boldsymbol{M}_n)$ de la section précédente on donne dans la section I.4 une caractérisation des quotients des sous-algèbres de $C(K; \boldsymbol{M}_n)$ analogue au lemme de Craw.

Proposition 2. *Une algèbre de Banach X est isomorphe à un quotient d'une sous-algèbre de $C(K; \boldsymbol{M}_n)$ si et seulement si il existe une constante C telle que pour tout entier m et tout polynôme non-commutatif à m variables P on a pour $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ avec $\|x_i\| \leq C$ l'inégalité*

$$\|P(x_1, x_2, \ldots, x_m)\|_X \leq \sup \left\{ \|P(u_1, u_2, \ldots, u_m)\|_{\boldsymbol{M}_n} \mid u_i \in \boldsymbol{M}_n \textit{ unitaires} \right\}$$

Dans la section I.5 on développe une théorie des produits tensoriels raisonnables analogues aux cross-normes raisonnables sur les produits tensoriels des espaces de Banach. Pour munir le produit tensoriel de deux M_n-espaces X et Y d'une norme «naturelle», c'est-à-dire d'une norme qui se comporte bien par rapport aux n-normes données sur les espaces de base, il convient d'employer le produit tensoriel de Haagerup. Pour des matrices $x \in M_n(X)$ et $y \in M_n(Y)$ on note $x \odot y \in M_n(X \otimes Y)$ la matrice $\left[\sum_k x_{ik} \otimes y_{kj}\right]_{i,j}$ et on dit qu'une norme α sur $M_n(X \otimes Y)$ est *raisonnable* si elle vérifie la condition (R) et si on a en plus $\alpha(x \odot y) \leq \|x\|_n \|y\|_n$ pour $x \in M_n(X)$ et $y \in M_n(Y)$. Ensuite on montre que parmi ces normes il y a une norme raisonnable minimale injective $\| \|_{\vee,n}$ et une norme raisonnable maximale projective $\| \|_{\wedge,n}$ qui ont des propriétés analogues aux propriétés des normes tensorielles injectives et projectives classiques, avec lesquelles elles coïncident si $n = 1$.
Pour $u = [u_{kl}] \in M_n(X \otimes Y)$ ces normes sont données par les formules

$$\|u\|_{\vee,n} = \sup \left\{ \left\| [\langle (f \odot g)_{ij}, u_{kl} \rangle]_{ik,jl} \right\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \mid \|f\|_{M_n(X^*)} \leq 1, \; \|g\|_{M_n(Y^*)} \leq 1 \right\}$$

$$\|u\|_{\wedge,n} = \inf \left\{ \left\| \sum \alpha_i \alpha_i^* \right\|^{1/2} \left\| \sum \beta_i^* \beta_i \right\|^{1/2} \max \|x_i\|_n \max \|y_i\|_n \;\middle|\; u = \sum \alpha_i \cdot x_i \odot y_i \cdot \beta_i, \; \alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n, x_i \in \boldsymbol{M}_n(X), y_i \in \boldsymbol{M}_n(Y) \right\}$$

qui convergent vers les deux formules équivalentes du produit tensoriel de Haagerup.
La section I.6 contient des outils pour étudier la théorie locale des M_n-espaces et leurs structures d'espaces d'opérateurs. Rappelons qu'un espace d'opérateurs X est dit *homogène* si $CB(X, X) = B(X, X)$ isométriquement. On observe que pour un espace d'opérateurs homogène $(X, \{\| \|_n\})$ les espaces $MIN(X, \| \|_n)$ et $MAX(X, \| \|_n)$ le sont aussi et qu'ils sont donc accessibles aux calculs assez explicites, comme on verra dans la section I.7. Puis on montre des versions plus générales des résultats de Zhang **[61]** qui permettront notamment d'étudier les M_n-espaces hilbertiens. On établie également un lien avec la constante $d_{S\mathcal{K}}$ qui a été introduite dans **[48]**, et que l'on peut interpréter de la manière suivante :

$$d_{S\mathcal{K}}(X) = \inf_k d_{cb}(X, MIN(X, \| \|_k)).$$

Les valeurs connues de ce paramètre pour certaines espaces d'opérateurs donneront des estimations asymptotiques dans la section qui suit.
La section I.7 est consacrée aux calculs des distances de Banach-Mazur entre plusieurs espaces d'opérateurs «classiques» et les constantes de Paulsen généralisées de leurs structures minimales et maximales. En particulier on donne des estimations pour les espaces

d'opérateurs hilbertiens homogènes $MIN(\ell_2^n)$, $MAX(\ell_2^n)$, R_n, C_n, $R_n \cap C_n$, $R_n + C_n$ et OH_n. On obtient également une généralisation d'un résultat de M. Junge et G. Pisier qui montre que sur un M_n-espace $(X, \| \|_n)$ de dimension supérieure à $16\,n$ on ne peut pas avoir unicité de la structure d'espace d'opérateurs. L'exemple de R_n et C_n dont la structure d'espace d'opérateurs est déterminée par la n-structure montre que à constante près cette estimation est optimale.

Sommes d'unitaires et analyse harmonique sur le groupe libre. Dans la deuxième partie on fait une étude de l'inégalité suivante due à Gilles Pisier (cf. [**45**, Theorem 1] et [**29**] pour une application). Notons g_i les générateurs du groupe libre et $\lambda(g_i)$ leurs images par la représentation régulière gauche. Alors on a pour toute suite finie d'opérateurs unitaires $u_i \in B(H)$

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes \overline{u_i} \Big\|_{\min} \geq \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda(g_i) \Big\|_{\min} = 2\sqrt{n-1} \tag{1}$$

Ceci généralise une inégalité obtenue pour les représentations régulières des groupes discrets par H. Kesten [**30**]. On étudie le principe combinatoire sous-jacent et on donne des versions plus générales. Ensuite on essaie de caractériser les unitaires pour lesquelles on a égalité dans l'inégalité mentionné ci-dessus. On donne une caractérisation complète pour le cas où les u_i viennent de la représentation régulière d'un groupe discret ainsi qu'un contre-exemple à une conjecture de Pisier qui montre que dans le cas général une caractérisation sera plus compliquée. Ce contre-exemple a été trouvé en collaboration avec Philippe Biane.
Voici un résumé.
Dans la section II.1 on donne quelques exemples qui sont accessibles aux calculs explicites et qui exhibent la propriété combinatoire qui distingue les générateurs de la C^*-algèbre réduite du groupe libre.
Dans la section II.2 on introduit la notion d'une *famille d'opérateurs avec moments alternés non-négatifs* qui est un analogue non-commutatif des coefficients scalaires non-négatifs. Soit A une C^*-algèbre et soit φ un état sur A. Alors on dit qu'une famille d'opérateurs $(a_i)_{i\in I}$ a des moments alternés mixtes non-négatifs si pour tout entier m et tout choix d'indices $i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_m, j_m \in I$ on a

$$\varphi(a_{i_1}^* a_{j_1} a_{i_2}^* a_{j_2} \cdots a_{i_m}^* a_{j_m}) \geq 0.$$

Cette propriété est particulièrement intéressante si elle est satisfaite pour une *famille fidèle d'états*. On dit qu'une famille d'états S sur A est *fidèle* si l'application complètement positive $\Phi_S : A \to \ell_\infty(S)$, $a \to (\varphi(a))_{\varphi\in S}$ est fidèle. Leur intérêt vient du lemme suivant.

Lemme 3. *Soient A et B des C^*-algèbres et soit $\Phi : A \to B$ une application complètement positive fidèle. Alors on peut calculer la norme d'un élément $a \in A$ à l'aide de Φ comme suit.*

$$\|a\|_A = \lim_{p\to\infty} \big\| \Phi\big((a^*a)^p\big) \big\|^{\frac{1}{2p}}$$

Si Φ vient d'une famille fidèle d'états cette formule devient particulièrement simple et permet d'établir des versions des inégalités de Kesten et de Pisier mentionnées ci-dessus à valeurs vectorielles.

Proposition 4. *Soient A, S comme ci-dessus.*

(i) *Soient* $u_i \in A$ *des unitaires avec moments alternés mixtes non-négatifs par rapport à la famille* S*, alors on a pour toute suite de nombres* α_i *non-négatifs*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \lambda(g_i)\Big\| \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, u_i \otimes \overline{u_i}\Big\|_{\min} \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, u_i\Big\|.$$

(ii) *Soit* $(a_i) \subseteq A$ *une famille à moments alternés mixtes non-négatifs et soient* v_i *des unitaires d'une* C^**-algèbre* B *dont les moments alternés mixtes par rapport à un certain état* ψ *sur* B *sont non-négatifs. Alors on a*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes v_i\Big\| \geq \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \lambda(g_i)\Big\|.$$

(iii) *Soient* a_i *comme dans* (ii) *et soient* w_i *des unitaires dans* $B(H)$ *tels que* $\|\sum_{i=1}^{n} w_i\| = n$*. Alors on a*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes w_i\Big\|_{\min} = \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i\Big\|.$$

Dans la section II.3 on caractérise partiellement les unitaires pour lesquelles on a égalité dans (1).

Théorème 5. *Soit* G *un groupe discret et soit* $\{ t_1, t_2, \dots , t_n \}$ *un sous-ensemble de* G *de cardinalité* $n \geq 3$ *tel que pour une certaine suite de nombres strictement positifs* α_i *on a*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \lambda_G(t_i)\Big\|_{C^*_\lambda(G)} = \Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \lambda(g_i)\Big\|_{C^*_\lambda(\mathbf{F}_n)}$$

où λ_G *est la représentation régulière gauche de* G*. Alors l'ensemble* $\{ t_1, t_2, \dots , t_n \}$ *a la* propriété de Leinert*, c'est-à-dire il existe des éléments* $s_0, s_1, \dots , s_{n-1} \in G$ *tels que* $s_1, s_2, \dots , s_{n-1}$ *engendrent une copie du groupe libre* $\mathbf{F}_{n-1}$ *dans* G *et tels que* $\{ t_1, t_2, \dots , t_n \} = \{ s_0, s_0 s_1, s_0 s_2, \dots , s_0 s_{n-1} \}$.

Ceci généralise un résultat de Kesten qui a montré le même énoncé pour les ensembles symétriques, cf. [**30**]. Le lien avec l'inégalité (1) est donné par le principe de Fell qui entraîne que les représentations $g \mapsto \lambda(g) \otimes I$ et $g \mapsto \lambda(g) \otimes \overline{\lambda(g)}$ sont unitairement équivalentes. Dans la section II.4 on exhibe des unitaires u_i qui vérifient d'une part

$$\Big\|\sum_{i=1}^{r} \big(u_i \otimes \overline{u_i} + u_i^* \otimes \overline{u_i^*}\big)\Big\| = 2\sqrt{2r-1}$$

et d'autre part

$$\Big\|\sum_{i=1}^{r} (u_i + u_i^*)\Big\| > 2\sqrt{2r-1}.$$

Ceci résout une conjecture de G. Pisier énoncé dans [**45**]. Néanmoins, la conjecture suivante reste ouverte.

Conjecture 6. Soient $u_1, u_2, \dots , u_n$ des unitaires dans une C^*-algèbre A ayant des moments alternés mixtes non-négatifs par rapport à une famille fidèle d'états et tels que

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} u_i\Big\| = 2\sqrt{n-1}$$

alors l'espace d'opérateurs engendré par u_i est (complètement) isométrique à celui engendré par $\lambda(g_i)$.

Elle fait l'objet de la section II.5 et avec des méthodes combinatoires on obtient les résultats suivants.

Proposition 7. *Soit A une C^*-algèbre.*

(i) Soient $a, u \in A$ avec u unitaire. Alors si les moments alternés mixtes de a et u par rapport à une famille fidèle d'états sont non-négatifs, on a

$$\|a+u\| \geq \frac{1}{2}\left(\|a\| + \sqrt{\|a\|^2+4}\right).$$

(ii) Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n \in A$ des unitaires à moments alternés mixtes par rapport à une famille fidèle d'états. Alors si pour $2 \leq m \leq n$ on note $T_m = \sum_1^m u_i$, $y_m = \|T_m\|^2 - 2(m-1)$, et

$$w_m = y_m + \sqrt{y_m^2 - 4(m-1)^2} = \|T_m\|^2 - 2(m-1) + \|T_m\|\sqrt{\|T_m\|^2 - 4(m-1)}$$

on a

$$w_m \leq w_n.$$

En particulier, si l'on a $\left\|\sum_1^n u_i\right\| = 2\sqrt{n-1}$ alors

$$\left\|\sum_{i=1}^m u_i\right\| \leq 2\sqrt{m-1+\frac{(n-m)^2}{4(n-1)}}.$$

Pour la démonstration on développe une théorie des fonctions radiales non-symétriques analogue à la théorie des fonctions radiales sur le groupe libre, cf. [**11**], [**12**] et [**51**].
Enfin dans la section II.6 on donne une formule analogue à celle de C. Akemann et P. Ostrand pour estimer les normes des opérateurs libres à valeurs opérateurs.

Proposition 8. *(i) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des opérateurs dans l'adhérence des opérateurs invertibles sur un espace de Hilbert. Alors on a*

$$\left\|\sum_{i=1}^n \lambda(g_i)\otimes a_i\right\|_{\min} \leq \inf_{s>0} \left\|\sum_{i=1}^n \left(s^2 I + a_i a_i^*\right)^{1/2} - (n-2)sI\right\|^{1/2} \times$$

$$\times \left\|\sum_{i=1}^n \left(s^2 I + a_i^* a_i\right)^{1/2} - (n-2)sI\right\|^{1/2}$$

(ii) Pour des opérateurs $a_i \in B(H)$ arbitraires on a

$$\left\|\sum_{i=1}^n \lambda(g_i)\otimes a_i\right\|_{\min} \leq 2\sqrt{1-\frac{1}{n}}\left(\frac{\|\sum_{i=1}^n a_i a_i^*\| + \|\sum_{i=1}^n a_i^* a_i\|}{2}\right)^{1/2}$$

$$\leq 2\sqrt{1-\frac{1}{n}}\max\left\{\left\|\sum_{i=1}^n a_i a_i^*\right\|^{1/2}, \left\|\sum_{i=1}^n a_i^* a_i\right\|^{1/2}\right\}$$

Cette formule fournit la constante optimale dans une inégalité dans [**26**]. Sa démonstration suit la démonstration simplifiée de la formule de Akemann due à M.A. Picardello et T. Pytlik [**44**]. Celle-ci s'adapte aisément aux coefficients non-commutatifs inversibles. Pour montrer (ii) on fait appel à la théorie des espaces d'opérateurs. Malheureusement des exemples montrent que cette formule n'est qu'une estimation et il reste à trouver une formule exacte[2].

[2] Au moment de la réliure de cette thèse une formule est trouvée et fera l'objet d'un article en préparation.

Les sections II.3 *«A characterization of the Leinert property»* et II.6 *«Free operators with operator coefficients»* paraîtront sous les mêmes titres dans *Proceedings of the American Mathematical Society* et *Colloquium Mathematicum* respectivement.

CHAPITRE I

M_n-espaces

I.1. Introduction et Définitions

Définition I.1.1. Soit $\boldsymbol{M}_n = M_n(\mathbf{C})$ l'algèbre des matrices complexes et $\{ e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n \}$ sa base canonique. Pour un espace normé complexe X on note $M_n(X)$ l'espace vectoriel $\boldsymbol{M}_n \otimes X$ des matrices $x = [x_{ij}]_{i,j=1}^n = \sum e_{ij} \otimes x_{ij}$ avec entrées $x_{ij} \in X$ muni de l'addition et multiplication scalaire naturelle. On va considérer $M_n(X)$ aussi comme $\boldsymbol{M}_n$-bimodule avec multiplications à gauche et à droite par des matrices $\alpha = [\alpha_{ij}]$, $\beta = [\beta_{ij}] \in \boldsymbol{M}_n$

$$(\alpha \cdot x)_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_{kj}$$
$$(x \cdot \beta)_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik} \beta_{kj}$$

Une *n-norme matricielle* sur X est une norme $\| \, \|_n$ sur $M_n(X)$ avec les propriétés suivantes.

$(\mathrm{R}0)_n$ Pour toute matrice de la forme

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on a $\|x\|_n = \|x_{11}\|_X$

$(\mathrm{R}1)_n$ Pour toute paire de matrices unitaires $\upsilon, \omega \in U(n)$ et toute matrice $x \in M_n(X)$ on a

$$\|\upsilon \cdot x \cdot \omega\|_n = \|x\|_n.$$

La norme $\| \, \|_n$ sur $M_n(X)$ est dite L^∞ si elle vérifie en plus

$(\mathrm{R}2)_n$ Pour toute matrice $x \in M_n(X)$ de la forme

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

avec $x_1 \in M_k(X)$ et $x_2 \in M_{n-k}(X)$ on a

$$\|x\|_n = \max \{ \|x_1\|_k, \|x_2\|_{n-k} \} ;$$

ici la norme $\| \, \|_k$ est la norme induite sur $M_k(X)$ par l'inclusion naturelle $M_k(X) \ni x \mapsto \left[\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in M_n(X)$.

Remarque I.1.2. Par le théorème de Russo-Dye la condition $(\mathrm{R}1)_n$ équivaut à la condition

$(\mathrm{R}1)'_n$
$$\|\alpha \cdot x \cdot \beta\|_n \leq \|\alpha\|_{\boldsymbol{M}_n} \|x\|_n \|\beta\|_{\boldsymbol{M}_n}.$$

pour toutes $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n$ et tout $x \in M_n(X)$.

Les morphismes naturels dans cette catégorie sont les applications n-bornées de la définition suivante.

Définition I.1.3. Soient $(X, \| \, \|_{X,n})$, $(Y, \| \, \|_{Y,n})$ des espaces n-normés et soit $u : X \to Y$ une application linéaire continue. Alors on note u_n l'application

$$\begin{aligned} u_n : M_n(X) &\to M_n(Y) \\ [x_{ij}] &\mapsto [u(x_{ij})] \end{aligned}$$

et $B_n(X, Y)$ l'espace $B(X, Y)$ muni de la norme $\|u\|_n = \|u_n\|$. Les notions de n-contraction et n-isométrie s'appliquent aux applications linéaires φ pour lesquelles φ_n est contractante ou isométrique respectivement. On note

$$d_n(X, Y) = \inf \{ \|u\|_n \|u^{-1}\|_n \mid u : X \to Y \text{ isomorphisme} \} \tag{I.1.1}$$

la n-distance de Banach-Mazur entre X et Y. On sera conduit à identifier deux espaces n-normés $(X, \| \|_{X,n})$ et $(Y, \| \|_{Y,n})$ s'il existe un isomorphisme linéaire n-isométrique entre X et Y, i.e. si $d_n(X, Y) = 1$.
En particulier, si l'on prend $Y = \boldsymbol{M}_n$, on obtient une n-norme L^∞ naturelle sur X^* en identifiant $M_n(X^*)$ avec $B_n(X, \boldsymbol{M}_n)$ isométriquement, i.e. pour $f = [f_{ij}] \in M_n(X^*)$ on pose

$$\|f\|_n^* = \sup \left\{ \left\| [f_{ij}(x_{kl})]_{ik,jl} \right\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \;\middle|\; \left\| [x_{kl}] \right\|_n \le 1 \right\} \tag{I.1.2}$$

et on appelle $(X^*, \| \|_n^*)$ l'espace n-normé dual de $(X, \| \|_n)$. Ici et dans la suite le produit tensoriel $\boldsymbol{M}_m \otimes \boldsymbol{M}_n$ est le produit tensoriel minimal obtenu en identifiant $[\alpha_{ij}] \otimes [\beta_{kl}]$ avec la matrice $[\alpha_{ij}\beta_{kl}]_{ik,jl} \in \boldsymbol{M}_{mn}$. Pour $f \in M_m(X^*)$, $x \in M_n(X)$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{M}_m$ et $\gamma, \delta \in \boldsymbol{M}_n$ on va noter $\langle f, x \rangle = [\langle f_{ij}, x_{kl} \rangle] \in \boldsymbol{M}_m \otimes \boldsymbol{M}_n$ de sorte que

$$\langle \alpha \cdot f \cdot \beta, \gamma \cdot x \cdot \delta \rangle = \alpha \otimes \gamma \, \langle f, x \rangle \, \beta \otimes \delta.$$

Remarque I.1.4. Une application linéaire $\Phi : M_n(X) \to M_n(Y)$ peut être représentée sous la forme φ_n pour un certain $\varphi : X \to Y$ si et seulement si elle respecte la structure de $\boldsymbol{M}_n$-bimodule de $M_n(X)$ et $M_n(Y)$, i.e. si et seulement si $\Phi(\alpha \cdot x \cdot \beta) = \alpha \cdot \Phi(x) \cdot \beta$ pour $\alpha, \beta \in \boldsymbol{M}_n$ et $x \in M_n(X)$.

Remarque I.1.5. Rappelons également la formule suivante de la n-norme duale pour les espaces de dimension finie. Soit $(X, \| \|_n)$ un espace n-normé de dimension finie avec base $\{ e_1, e_2, \ldots, e_N \}$ et soit $\{ e_1^*, e_2^*, \ldots, e_N^* \}$ une base biorthonormale de X^*. Alors on a pour toute suite $\alpha_i \in \boldsymbol{M}_n$ la formule

(I.1.3)
$$\left\| \sum \alpha_i \otimes e_i^* \right\|_{M_n(X^*)} = \sup \left\{ \left\| \sum \alpha_i \otimes \beta_i \right\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \;\middle|\; \beta_i \in \boldsymbol{M}_n, \left\| \sum \beta_i \otimes e_i \right\|_{M_n(X)} \le 1 \right\}.$$

Définition I.1.6.

1. Un *espace matriciellement normé* est un espace vectoriel X dont tous les espaces matricielles $M_n(X)$ sont munis de normes $\| \|_n$ compatibles dans le sens que les conditions $(R0)_n$, et $(R1)_n$ sont vérifiées pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Soit $B(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Hilbert H. Un *espace d'opérateurs* est un sous-espace linéaire X de $B(H)$. Un tel espace est muni de n-normes naturelles en identifiant $M_n(X)$ avec un sous-espace de $M_n(B(H)) = B(\ell_2^n(H))$.
3. Une application linéaire $T : X \to Y$ entre deux espaces matriciellement normés X et Y est dite *complètement bornée (c.b.)* si les normes $\|T_n : M_n(X) \to M_n(Y)\|$ sont uniformément bornées et on pose $\|T\|_{cb} = \sup_n \|T\|_n$. On note $cb(X, Y)$ l'espace de Banach des applications complètement bornées muni de la norme $\| \|_{cb}$. On note

   $$d_{cb}(X, Y) = \inf \{ \|u\|_{cb} \|u^{-1}\|_{cb} \mid u : X \to Y \text{ isomorphisme} \} = \sup_n d_n(X, Y)$$

   la distance c.b. entre X et Y.

Une caractérisation des normes matricielles d'opérateurs est donnée par le

Théorème de Ruan (**[54]**,**[22]**)**.** Un espace matriciellement normé $(X, \{\| \ \|_n\})$ peut être plongé dans $B(H)$ complètement isométriquement si et seulement si les normes $\| \ \|_n$ vérifient $(\mathrm{R2})_n$ pour tout n.

Ce théorème a donné naissance à une théorie d'espaces de Banach «quantiques», voir **[20]**, **[21]**, **[6]**, **[5]** et les livres **[47]**, **[19]** ; on peut en particulier munir le dual d'un espace d'opérateur avec une structure d'espace d'opérateurs canonique.

Définition I.1.7. Soit X un espace d'opérateurs. On définit la structure d'espace d'opérateurs *duale standard* sur X^* en posant $M_n(X^*) = cb(X, \boldsymbol{M}_n)$.

Remarque I.1.8. Un résultat de R. R. Smith (cf. [**56**, Theorem 2.10]) dit que l'on a $cb(X, \boldsymbol{M}_n) = B_n(X, \boldsymbol{M}_n)$ isométriquement et ceci implique que pour un espace d'opérateurs X la norme sur $M_n(X^*)$ ne dépend que de la norme sur $M_n(X)$. En particulier, la définition du dual d'un espace n-normé est compatible avec la définition du dual d'un espace d'opérateurs.

Toute structure d'espace d'opérateurs sur X induit naturellement une n-norme L^∞ sur X et la question se pose si toute n-norme L^∞ sur X s'étend à une structure d'espace d'opérateurs sur X.
On vérifie facilement que la condition suivante est nécessaire.

$$\text{(R)} \qquad \left\|\sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i\right\|_n \leq \max \|x_i\|_n \left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|_{\boldsymbol{M}_n}^{1/2} \left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\|_{\boldsymbol{M}_n}^{1/2}$$

pour toutes suites $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n$ et $x_i \in M_n(X)$.
D'autre part, on vérifie que (R) implique $(\mathrm{R1})_n$ et $(\mathrm{R2})_n$. On a en fait le théorème suivant.

Théorème I.1.9. *Soit $(X, \| \ \|_n)$ un espace n-normé et $(X^{**}, \| \ \|_n^{**})$ son bidual défini par* (I.1.2). *Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe une application n-isométrique $X \to B(H)$.
(ii) L'inclusion naturelle $X \to X^{**}$ est une n-isométrie.
(iii) $\| \ \|_n$ vérifie (R) .
(iv) Il existe une application n-isométrique $X \to M_n(C(K)) = C(K; \boldsymbol{M}_n)$ avec K compact.

L'équivalence de (i) et (ii) a été observé dans **[6]** ; voir aussi la proposition I.3.1 pour une construction explicite. Alors (iv) est une conséquence de (ii) si l'on prend pour K la boule unité de $M_n(X^*)$ avec la topologie $*$-faible. Il reste à montrer que (iii) implique (i). Ceci est une conséquence de la construction explicite (I.3.2b), mais on peut également déduire l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (ii) de [**22**, Theorem C], qui est valable dans notre contexte aussi, si l'on fait une petite modification dans la démonstration.

Théorème I.1.10 (**[22]**)**.** *Soit $(X, \| \ \|_n)$ un espace n-normé vérifiant* (R) *et soit $F \in M_n(X)^*$ avec $\|F\| \leq 1$. Alors il existe une application $\Phi : X \to \boldsymbol{M}_n$ n-contractante et des matrices contractantes $\gamma, \delta \in \boldsymbol{M}_{n^2,1}$ telles que pour tout $x \in M_n(x)$*

$$F(x) = \gamma^* \Phi_n(x) \delta$$

Lemme I.1.11. *Soit $\| \ \|_n$ une norme sur $M_n(X)$ vérifiant la condition* (R) *et soit $F \in M_n(X)^*$ avec $\|F\| \leq 1$. Alors il existe des états φ_F, ψ_F sur $\boldsymbol{M}_n$ tels que pour toute suite finie $(x_k)_{k=1}^p$ d'éléments de $M_n(X)$ et pour $\alpha_k, \beta_k \in \boldsymbol{M}_n$ on a*

$$\text{(I.1.4)} \qquad \left|F\left(\sum \alpha_k \cdot x_k \cdot \beta_k\right)\right| \leq \max \|(x_k)\|_n \, \varphi_F\left(\sum \alpha_k\alpha_k^*\right)^{1/2} \psi_F\left(\sum \beta_k^*\beta_k\right)^{1/2}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de trouver φ_F, ψ_F tels que pour toute $x \in M_n(X)$ et toute $\alpha, \beta \in \boldsymbol{M}_n$ on a

$$\mathfrak{Re} F(\alpha \cdot x \cdot \beta) \leq \frac{1}{2}\big(\varphi_F(\alpha\alpha^*) + \psi_F(\beta^*\beta)\big); \tag{I.1.5}$$

le cas général (I.1.4) se réduit à (I.1.5) en choisissant $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $e^{i\theta}F(\sum \alpha_k \cdot x_k \cdot \beta_k) = |F(\alpha_k \cdot x_k \cdot \beta_k)|$ et puis en minimisant la borne

$$\left| F\left(\sum t^{1/2}\alpha_k \cdot x_k \cdot t^{-1/2}\beta_k\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left(t\,\varphi_F\left(\sum \alpha_k\alpha_k^*\right) + t^{-1}\psi_F\left(\sum \beta_k^*\beta_k\right)\right).$$

Notons S_n l'espace des états sur $\boldsymbol{M}_n$ et $C_{\mathbf{R}}(S_n \times S_n)$ l'espace des fonctions continues réelles sur $S_n \times S_n$. Posons $\mathcal{E}_F \subseteq C_{\mathbf{R}}(S_n \times S_n)$ le cône convexe des sommes de fonctions de la forme

$$e_{\alpha,x,\beta}(\varphi, \psi) = \varphi(\alpha\alpha^*) + \psi(\beta^*\beta) - 2\,\mathfrak{Re} F(\alpha \cdot x \cdot \beta)$$

avec $\alpha, \beta \in \boldsymbol{M}_n$ et $\|x\| \leq 1$. Une fonction $e = \sum e_i \in \mathcal{E}_F$, où $e_i = e_{\alpha_i,x_i,\beta_i}$, ne peut pas être strictement négative. En effet, on peut choisir des états φ_0 et ψ_0 sur $\boldsymbol{M}_n$ tels que $\varphi_0(\sum \alpha_i\alpha_i^*) = \|\sum \alpha_i\alpha_i^*\|$ et $\psi_0(\sum \beta_i^*\beta_i) = \|\sum \beta_i^*\beta_i\|$, respectivement. Alors la valeur de e évalué en ce point satisfait

$$\begin{aligned}
e(\varphi_0, \psi_0) &= \varphi_0\left(\sum \alpha_i\alpha_i^*\right) + \psi_0\left(\sum \beta_i^*\beta_i\right) - 2\,\mathfrak{Re} F\left(\sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i\right) \\
&\geq \left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\| + \left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\| - 2\left|F\left(\sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i\right)\right| \\
&\geq 2\left(\left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|^{1/2}\left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\|^{1/2} - \left|F\left(\sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i\right)\right|\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

à cause de (R). Notons $\mathcal{K}^-$ le cône convexe des fonctions strictement négatives sur $S_n \times S_n$. Son intérieur est non-vide et l'intersection $\mathcal{E}_F \cap \mathcal{K}^- = \emptyset$. Le théorème de Hahn-Banach fournit une mesure μ_F sur $S_n \times S_n$ qui vérifie $\mu_F|_{\mathcal{K}^-} \leq 0$ et $\mu_F|_{\mathcal{E}_F} \geq 0$. L'inégalité pour $\mu_F|_{\mathcal{K}^-}$ implique que μ_F est une mesure positive et on peut supposer que μ_F est une probabilité. On définit maintenant les états

$$\varphi_F(\alpha) = \iint \varphi(\alpha)\, d\mu_F(\varphi, \psi)$$

et

$$\psi_F(\beta) = \iint \psi(\beta)\, d\mu_F(\varphi, \psi)$$

respectivement. Alors l'inégalité pour $\mu_F|_{\mathcal{E}_F}$ implique

$$\varphi_F\left(\sum \alpha_i\alpha_i^*\right) + \psi_F\left(\sum \beta_i^*\beta_i\right) - 2\,\mathfrak{Re} F\left(\sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i\right) = \iint \left(\sum e_i\right)(\varphi, \psi)\, d\mu_F(\varphi, \psi) \geq 0$$

□

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I.1.10. Fixons une contraction $F \in M_n(X)^*$. Le lemme I.1.11 fournit des états φ_F et ψ_F tels que F vérifie l'inégalité (I.1.4). Par la construction de Gel'fand-Naimark-Segal on peut réaliser ces états avec deux matrices de densité $\xi_F, \eta_F \in \boldsymbol{M}_n$ de sorte que $\|\xi_F\|_{HS} = \|\eta_F\|_{HS} = 1$ et

$$\varphi_F(\alpha) = \mathrm{tr}_n(\xi_F\alpha\xi_F^*)$$
$$\psi_F(\beta) = \mathrm{tr}_n(\eta_F\beta\eta_F^*)$$

pour toute $\alpha, \beta \in \boldsymbol{M}_n$. Posons

$$K_F = [\xi_F \boldsymbol{M}_{n,1}] = \{\, \xi_F \alpha \mid \alpha \in \boldsymbol{M}_{n,1} \,\} \subseteq \boldsymbol{M}_{n,1}$$
$$L_F = [\eta_F \boldsymbol{M}_{n,1}] = \{\, \eta_F \beta^* \mid \beta \in \boldsymbol{M}_{1,n} \,\} \subseteq \boldsymbol{M}_{n,1}$$

et pour chaque $x \in X$ définissons une forme sesquilinéaire sur $K_F \times L_F$ en posant

$$\text{(I.1.6)} \qquad \langle \xi_F \alpha, \eta_F \beta^* \rangle_x = F(\alpha \cdot x \cdot \beta);$$

alors en identifiant $B(\boldsymbol{M}_{n,1})$ avec $\boldsymbol{M}_n$ on trouve une matrice $\rho(x)^t \in \boldsymbol{M}_n$ telle que

$$\text{(I.1.7)} \qquad \rho(x)^t = P_{L_F} \rho(x)^t P_{K_F}$$

et

$$\langle \xi_F \alpha, \eta_F \beta^* \rangle_x = \beta \eta_F^* \rho(x)^t \xi_F \alpha = \alpha^t \xi_F^t \rho(x) \eta_F^{*t} \beta^t.$$

En posant $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \mathrm{i} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ on a donc pour $x = [x_{ij}] \in M_n(X)$ la formule suivante

$$F(x) = \sum_{ij} F(e_i \cdot x_{ij} \cdot e_j^*) = \sum_{ij} e_i^t \xi_F^t \rho(x_{ij}) \eta_F^{*t} e_j^{*t} = \gamma^* \rho_n(x) \delta$$

où $\gamma = (\xi_F^{t*} e_i)_{i=1}^n \in M_{1,n}(\boldsymbol{M}_{1,n}) \cong \mathbf{C}^{n^2}$ vérifie

$$\gamma^* \gamma = \sum_i e_i^t \xi_F^t \xi_F^{t*} e_i = \sum_i \mathrm{tr}_n(\xi_F^{t*} e_i e_i^t \xi_F^t) = \mathrm{tr}_n(\xi_F^{t*} \xi_F^t) = 1$$

et $\delta = (\eta_F^{t*} e_j)_{j=1}^n$ a une propriété analogue. Enfin l'application $\rho : X \to \boldsymbol{M}_n$ est évidemment linéaire et il reste a montrer qu'elle est n-contractante. Fixons $x = [x_{ij}] \in M_n(X)$. Alors

$$\begin{aligned}
\|\rho_n(x)\| &= \sup \{\, \omega^* \rho_n(x) \zeta \mid \omega, \zeta \in M_{n,1}(\boldsymbol{M}_{n,1}), \omega^* \omega \le 1, \zeta^* \zeta \le 1 \,\} \\
&= \sup \Big\{ \sum_{i,j} \omega_i^* \rho(x_{ij}) \zeta_j \,\Big|\, \sum_i \omega_i^* \omega_i \le 1, \sum_j \zeta_j^* \zeta_j \le 1 \Big\} \\
&= \sup \Big\{ \sum_{i,j} \zeta_j^t \rho(x_{ij})^t \omega_i^{t*} \,\Big|\, \sum_i \omega_i^* \omega_i \le 1, \sum_j \zeta_j^* \zeta_j \le 1 \Big\}.
\end{aligned}$$

Maintenant (I.1.7) implique que l'on peut restreindre ce supremum aux vecteurs ω et ζ pour lesquels il existe $\alpha_i \in \boldsymbol{M}_{n,1}$ et $\beta_j \in \boldsymbol{M}_{1,n}$ tels que

$$\omega_i^{*t} = \xi_F \alpha_i \qquad \text{et} \qquad \zeta_i^{*t} = \xi_F \beta_i^*$$

avec

$$\begin{aligned}
\varphi_F\Big(\sum_i \alpha_i \alpha_i^*\Big) &= \sum_i \mathrm{tr}_n(\xi_F \alpha_i \alpha_i^* \xi_F^*) = \sum_i \alpha_i^* \xi_F^* \xi_F \alpha_i \\
&= \sum_i \alpha_i^t \xi_F^t \xi_F^{*t} \alpha_i^{*t} = \sum_i \omega_i^* \omega_i \\
&\le 1
\end{aligned}$$

et par un calcul analogue

$$\psi_F\Big(\sum_j \beta_j^* \beta_j\Big) \le 1.$$

On a donc

$$\|\rho_n(x)\| = \sup \Big\{ \sum_{ij} \beta_j \eta_F^* \rho(x_{ij})^t \xi_F \alpha_i \,\Big|\, \varphi_F\Big(\sum \alpha_i \alpha_i^*\Big) \le 1, \psi_F\Big(\sum \beta_j^* \beta_j\Big) \le 1 \Big\}$$

et par (I.1.4) on peut estimer

$$\begin{aligned}\sum_{ij} \beta_j \eta_F^* \rho(x_{ij})^t \xi_F \alpha_i &= F\Big(\sum \alpha_i \cdot x_{ij} \cdot \beta_j\Big) \\ &= F\Big(\Big(\sum \alpha_i e_i^*\Big) \cdot x \cdot \Big(\sum e_j \beta_j\Big)\Big) \\ &\le \varphi_F\Big(\sum \alpha_i \alpha_i^*\Big)^{1/2} \|x\|_n \, \psi_F\Big(\sum \beta_j^* \beta_j\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

□

Définition I.1.12. On appelle M_n-*espace* tout espace n-normé $(X, \| \, \|_n)$ qui vérifie les conditions équivalentes du théorème I.1.9. On dira qu'une structure d'espace d'opérateurs $\{\| \, \|'_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ sur X est *compatible* avec $\| \, \|_n$ si $\| \, \|'_n = \| \, \|_n$.

Remarque I.1.13. 1. En particulier, tout M_n-espace $(X, \| \, \|_n)$ a une réalisation n-isométrique comme sous-espace de $C(\Omega, \boldsymbol{M}_n)$, où Ω est la boule unité de $M_n(X^*)$.

2. Soit $\| \, \|_n$ une norme sur $M_n(X)$ qui admet une formule

$$\|x\|_n = \sup \left\{ \|\Phi_n(x)\|_{M_n(Y)} \mid \Phi \in S \right\}$$

où $S \subseteq B(X, Y)$ et Y est un M_n-espace. Alors $(X, \| \, \|_n)$ vérifie (R) aussi. En particulier, tout dual d'un espace n-normé vérifie (R).

Proposition I.1.14. *Soit $(X, \| \, \|_n)$ un espace n-normé, $(Y, \| \, \|_n)$ un M_n-espace et soient $(X^*, \| \, \|_n^*)$ et $(Y^*, \| \, \|_n^*)$ leurs duaux. Alors pour toute application n-bornée $u : X \to Y$ on a $\|u\|_n = \|u^*\|_n$.*

Démonstration. En effet, le théorème I.1.9 (ii) permet d'écrire

$$\|u\|_n = \sup \Big\{ \big\|[\langle g_{ij}, u(x_{kl})\rangle]\big\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \mid \\ [g_{ij}] \in M_n(Y^*), \big\|[g_{ij}]\big\|_n^* \le 1; \; [x_{kl}] \in M_n(X), \big\|[x_{kl}]\big\|_n \le 1 \Big\}$$

et ceci implique l'assertion. □

Remarque I.1.15. Pour un opérateur de rang fini $u : X \to Y$, $u(x) = \sum \langle f_i, x\rangle \, y_i$ avec $f_i \in X^*$ et $y_i \in Y$ on a les formules suivantes pour la norme.

$$\begin{aligned}\|u\|_n &= \sup \left\{ \Big\|\sum \langle f_i, x\rangle \otimes y_i\Big\|_{M_n(Y)} \,\Big|\, x \in M_n(X), \|x\|_n \le 1 \right\} \\ &= \sup \Big\{ \Big\|\sum \langle f_i, x\rangle \otimes \langle g, y_i\rangle\Big\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \,\Big| \\ &\qquad\qquad x \in M_n(X), \|x\|_n \le 1, g \in M_n(Y^*), \|g\|_n^* \le 1 \Big\} \\ &= \sup \left\{ \Big\|\sum f_i \otimes \langle g, y_i\rangle\Big\|_{M_n(X^*)} \,\Big|\, g \in M_n(Y^*), \|g\|_n^* \le 1 \right\}\end{aligned}$$

On a également une version du théorème de Wittstock pour les M_n-espaces.

Proposition I.1.16. *Soient $(X, \| \, \|_{n,X}) \subseteq (X', \| \, \|_{n,X'})$ des M_n-espaces et soit $u : X \to \boldsymbol{M}_n$ une application n-bornée. Alors il existe une extension $\hat{u} : X' \to \boldsymbol{M}_n$ telle que $\hat{u}|_X = u$ et $\|\hat{u}\|_n = \|u\|_n$.*

Démonstration. Ceci est une conséquence du théorème de Wittstock (cf. [**49**, Theorem 3.6]) et du résultat de R. Smith déjà mentionné ci-dessus [**56**, Theorem 2.10]. □

I.2. Constructions de base

Outre le dual, on peut obtenir de nouveaux M_n-espaces par les opérations suivantes.

I.2.1. Quotients. Soit $(X, \| \ \|_n)$ un M_n-espace et soit Y un sous-espace fermé. On définit

$$M_n(X/Y) = M_n(X)/M_n(Y)$$

et un calcul élémentaire montre que la condition (R) est satisfaite ainsi que les identités n-isométriques

$$Y^* = X^*/Y^\perp$$
$$(X/Y)^* = Y^\perp$$

Si X et Y sont des espaces d'opérateurs, on obtient l'espace d'opérateurs quotient X/Y avec la structure matricielle $\{ M_n(X/Y) \mid n \in \mathbf{N} \}$.

I.2.2. Sommes directes. Soit $(X_i, \| \ \|_{n,i})_{i\in I}$ une famille de M_n-espaces. Alors on note $\bigoplus X_i = \bigoplus_\infty X_i = \ell_\infty(X_i)$ l'espace des suites uniformément bornées $(x_i) \in \prod X_i$ avec la M_n-structure

$$\|(x_i)\|_{M_n(\oplus X_i)} = \sup \|x_i\|_{n,i}.$$

La construction duale est la ℓ_1-somme directe. A priori il y a deux possibilités de généraliser la somme directe d'espaces d'opérateurs décrite dans [**47**]. Pour deux M_n-espaces X_0 et X_1 posons

$$P_\infty = \{ u = (u_0, u_1) \mid u_i : X_i \to B(H_u) \ n\text{-contractantes} \}$$
$$P_n = \{ u = (u_0, u_1) \mid u_i : X_i \to \boldsymbol{M}_n \ n\text{-contractantes} \};$$

alors les n-normes correspondantes sur $X_0 \oplus X_1$

$$\|x_0 \oplus x_1\|_{1,(\infty)} = \sup_{u\in P_\infty} \|u_{0n}(x_0) + u_{1n}(x_1)\|_{M_n(B(H_u))}$$
$$\|x_0 \oplus x_1\|_{1,n} = \sup_{u\in P_n} \|u_{0n}(x_0) + u_{1n}(x_1)\|_{\boldsymbol{M}_n\otimes \boldsymbol{M}_n}$$

vérifient (R) et en fait elles sont égales : la remarque I.1.13 (1.) fournit un plongement n-isométrique $\rho : X_0 \oplus_{1,(\infty)} X_1 \to C(K; \boldsymbol{M}_n)$, d'où des n-contractions $\rho_i = \rho|_{X_i} : X_i \to C(K; \boldsymbol{M}_n)$ et ceci implique que

$$\begin{aligned}\|x_0 \oplus x_1\|_{1,(\infty)} &= \sup_{t\in K} \|\rho_{0n}(x_0)(t) + \rho_{1n}(x_1)(t)\|_{\boldsymbol{M}_n\otimes \boldsymbol{M}_n} \\ &\le \|x_0 \oplus x_1\|_{1,n}.\end{aligned}$$

On va donc noter $X_0 \oplus_1 X_1$ le M_n-espace $(X_0 \oplus X_1, \| \ \|_{1,n})$. Il est caractérisée par la propriété universelle suivante : Pour tout M_n-espace Y et pour toutes n-contractions $u_i : X_i \to Y$ l'application

$$\begin{aligned} X_0 \oplus_1 X_1 &\to Y \\ (x_0, x_1) &\mapsto u_0(x_0) + u_1(x_1)\end{aligned}$$

est n-contractante aussi. En particulier on peut identifier n-isométriquement

$$(X_0 \oplus_\infty X_1)^* = X_0^* \oplus_1 X_1^* \tag{I.2.1}$$

$$(X_0 \oplus_1 X_1)^* = X_0^* \oplus_\infty X_1^* \tag{I.2.2}$$

pour la dualité

$$\begin{aligned}(X_0^* \oplus X_1^*) \times (X_0 \oplus X_1) &\to \mathbf{C} \\ \langle f \oplus g, x \oplus y\rangle &= \langle f, x\rangle + \langle g, y\rangle.\end{aligned}$$

I.2.3. Interpolation complexe. Rappelons la définition de la méthode d'interpolation complexe. Un couple (X_0, X_1) de M_n-espaces est dit compatible s'il existe un espace vectoriel complexe topologique V avec des inclusions continues $X_0, X_1 \subseteq V$, permettant ainsi de définir les espaces $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1$; en munissant ces derniers avec les normes

$$\|x\|_{M_n(X_0 \cap X_1)} = \max\{\, \|x\|_{M_n(X_0)}, \|x\|_{M_n(X_1)} \,\}$$

pour $x \in M_n(X_0 \cap X_1)$ et

$$\|x\|_{M_n(X_0+X_1)} = \inf\{\, \|x_0\|_{M_n(X_0)} + \|x_1\|_{M_n(X_1)} \mid \\ x = x_0 + x_1, x_0 \in M_n(X_0), x_1 \in M_n(X_1) \,\}$$

pour $x \in M_n(X_0 + X_1)$ respectivement, on obtient des M_n-espaces correspondants à l'inclusion «diagonale» $X_0 \cap X_1 \subseteq X_0 \oplus_\infty X_1$ et au quotient $X_0 + X_1 = X_0 \oplus_1 X_1 / \{\, (x, -x) \mid x \in X_0 \cap X_1 \,\}$. On observe que ces constructions vérifient

$$\begin{aligned}(X_0 \cap X_1)^* &= X_0^* + X_1^* \\ (X_0 + X_1)^* &= X_0^* \cap X_1^*.\end{aligned}$$

On peut donc supposer que V est un M_n-espace lui aussi.
Soit maintenant

$$\Delta = \{\, x + iy \mid 0 < x < 1, y \in \mathbf{R} \,\}$$

l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\Delta_0 = i\,\mathbf{R}$ et $\Delta_1 = 1 + i\,\mathbf{R}$. Posons

$$\mathcal{F}_0(X_0, X_1) = \Big\{ f : \overline{\Delta} \to X_0 + X_1 \,\Big|\, f = \sum f_k x_k, x_k \in X_0 \cap X_1, \\ f_k : \overline{\Delta} \to \mathbf{C} \text{ continue, analytique sur } \Delta \text{ et tendant vers 0 à l'infini} \Big\}$$

et notons $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ son complété pour la norme

$$\|f\|_{\mathcal{F}} = \max\{\, \sup_{t\in\mathbf{R}} \|f(it)\|_{X_0}, \sup_{t\in\mathbf{R}} \|f(1+it)\|_{X_1} \,\}.$$

Cet espace a une M_n-structure évidente naturelle induite par les M_n-structures de X_0 et X_1. Fixons $0 < \theta < 1$. On note $S_\theta(X_0, X_1)$ l'adhérence de

$$N_\theta(X_0, X_1) = \{\, f \in \mathcal{F}_0(X_0, X_1) \mid f(\theta) = 0 \,\}$$

et on définit

$$X_\theta = (X_0, X_1)_\theta = \mathcal{F}(X_0, X_1)/S_\theta(X_0, X_1)$$

avec la M_n-structure quotient. Dans le cas où (X_0, X_1) est un couple compatible d'espaces d'opérateurs on obtient l'espace d'opérateurs interpolé comme quotient d'espace d'opérateurs de $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ par $S_\theta(X_0, X_1)$, cf. **[50]**.

I.2.4. Ultraproduits. Soit $(X_i, \| \|_{n,i})_{i\in I}$ une famille de M_n-espaces et soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. Soit

$$\mathcal{N}_{\mathcal{U}} = \{ (x_i) \in \ell_\infty(X_i) \mid \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|_{n,i} = 0 \}.$$

Alors on note $\hat{X}_{\mathcal{U}} = \prod X_i/\mathcal{U}$ l'espace $\ell_\infty(X_i)/\mathcal{N}_{\mathcal{U}}$ avec la M_n-structure quotient

$$M_n(\prod X_i/\mathcal{U}) = M_n(\ell_\infty(X_i))/M_n(\mathcal{N}_{\mathcal{U}}).$$

L'ultraproduit respecte les sous-espaces et les quotients et on a pour toute famille de sous-espaces $Y_i \subseteq X_i$ l'inclusion n-isométrique

$$\prod Y_i/\mathcal{U} \subseteq \prod X_i/\mathcal{U}$$

et l'identité n-isométrique

$$\prod X_i/\mathcal{U}\Big/_{\prod Y_i/\mathcal{U}} = \prod X_i/Y_i\Big/_{\mathcal{U}}.$$

On vérifie également que pour une suite uniformément bornée d'opérateurs $u_i : X_i \to Y_i$ on obtient $\hat{u} : \hat{X}_{\mathcal{U}} \to \hat{Y}_{\mathcal{U}}$ avec $\|\hat{u}\|_n = \lim_{\mathcal{U}} \|u_i\|_n$. En particulier on a un plongement n-isométrique

$$\prod X_i^*/\mathcal{U} \subseteq (\prod X_i/\mathcal{U})^*$$

et cette application est surjective si tous les X_i ont la même dimension finie.

I.2.5. Conjugaison complexe. Soit X un M_n-espace dont on peut, autant qu'espace vectoriel complexe, considérer l'espace conjugué complexe $\overline{X}$, qui est le même espace avec multiplication scalaire conjuguée $\lambda\overline{x} = \overline{\overline{\lambda}x}$ et que l'on peut munir de la M_n-structure conjuguée en identifiant n-anti-isométriquement

$$M_n(\overline{X}) = \overline{\boldsymbol{M}}_n \otimes X$$

i.e.

$$\Big\|\sum \alpha_i \otimes \overline{x_i}\Big\|_{\boldsymbol{M}_n(\overline{X})} = \Big\|\sum \overline{\alpha_i} \otimes x_i\Big\|_{\boldsymbol{M}_n(X)}$$

où $\overline{\alpha} = [\overline{\alpha_{ij}}]$ est la conjugaison complexe usuelle dans $\boldsymbol{M}_n$.

I.2.6. Opposé. Ici on transfère l'opération de transposition des matrices usuelles aux matrices à valeurs vectorielles, c'est-à-dire l'espace X^{op} est l'espace vectoriel X avec la n-norme

$$\big\|[x_{ij}]\big\|_{M_n(X^{op})} = \big\|[x_{ji}]\big\|_{M_n(X)}.$$

On remarque que pour vérifier la condition (R) pour les deux dernières constructions on doit utiliser la n-anti-isométrie de $\boldsymbol{M}_n$ et $\overline{\boldsymbol{M}}_n$.

I.3. *MIN* et *MAX*

Il y a plusieurs conceptions de structures MIN et MAX. On peut considérer la n-norme minimale sur un espace normé X, qui en fait est induit par la structure d'espace d'opérateurs minimale :

$$\begin{aligned}\big\|[x_{ij}]\big\|_{n,MIN} &= \sup \Big\{ \big\|[\langle f, x_{ij}\rangle]\big\|_{\boldsymbol{M}_n} \mid f \in X^*, \|f\| \leq 1 \Big\} \\ &= \sup \{ \|(\upsilon \cdot [x_{ij}] \cdot \omega)_{11}\|_X \mid \upsilon, \omega \in \boldsymbol{M}_n \text{ unitaires} \}.\end{aligned}$$

En effet, l'axiome $(\mathrm{R1})'_n$ implique, que pour toutes $\upsilon, \omega \in U(n)$ et toute $x \in M_n(X)$ on a

$$\begin{aligned}\|(\upsilon \cdot x \cdot \omega)_{11}\|_X &= \|e_{11}\upsilon \cdot x \cdot \omega e_{11}\|_n \\ &\leq \|x\|_n.\end{aligned}$$

Donc la n-norme minimale vérifie automatiquement (R) et en particulier elle est L^∞.
La n-norme maximale dépend de la catégorie en considération.

$$\big\|[x_{ij}]\big\|_{n,MAX} = \sup \big\|[T(x_{ij})]\big\|_{M_n(Y)}$$

définit la plus grande n-norme, la plus grande n-norme L^∞ et la plus grande n-norme d'espace d'opérateurs, si l'on prend le supremum sur tous les applications contractantes T de X dans Y, où Y varie sur les espaces n-normés, les espaces n-normés L^∞ ou $B(H)$ (en fait, le théorème I.1.9 (iv) permet de prendre $Y = \boldsymbol{M}_n$), respectivement. En particulier, la plus grande n-norme qui vérifie (R) est la n-norme induite par la structure d'espace d'opérateurs maximale sur X.
On peut également sur un M_n-espace $(X, \| \ \|_n)$ introduire des structures d'espaces d'opérateurs MIN et MAX analogues aux structures MIN et MAX des espaces normés introduites dans [**6**] et [**40**], voir aussi [**41**, Theorem 2.1].

Proposition I.3.1. *Soit $(X, \| \ \|_n)$ un M_n-espace. Posons, pour $p \in \mathbf{N}$ et $x = [x_{kl}] \in M_p(X)$,*

$$\text{(I.3.1)} \qquad \begin{aligned}\|x\|_{MIN,p} &= \sup \Big\{ \|\langle f, x\rangle\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_p} \mid f \in M_n(X^*), \|f\|_n^* \leq 1 \Big\} \\ &= \sup \Big\{ \|\rho_p(x)\|_{M_p(\boldsymbol{M}_n)} \mid \rho : X \to \boldsymbol{M}_n \ n\text{-contractante} \Big\}\end{aligned}$$

et

$$\text{(I.3.2a)} \qquad \|x\|_{MAX,p} = \sup \Big\{ \|\rho_p(x)\|_{M_p(B(H))} \mid \rho : X \to B(H) \ n\text{-contractante} \Big\}$$

$$\text{(I.3.2b)} \qquad = \inf \Big\{ \Big\|\sum \alpha_i \alpha_i^*\Big\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} \Big\|\sum \beta_i^* \beta_i\Big\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} \ \Big| \ x = \sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i, \quad \alpha_i \in \boldsymbol{M}_{p,n}, \ \beta_i \in \boldsymbol{M}_{n,p}, \ x_i \in M_n(X), \|x_i\|_n \leq 1 \Big\}.$$

Alors les p-normes $\| \ \|_{MIN,p}$ et $\| \ \|_{MAX,p}$ définissent des structures d'espace d'opérateurs sur X compatibles avec $\| \ \|_n$ et de plus, toute autre structure d'espace d'opérateurs compatible $\{\| \ \|_k\}$ sur X satisfait pour $k \in \mathbf{N}$ et $x \in M_k(X)$ les inégalités

$$\text{(I.3.3)} \qquad \|x\|_{M_k(MIN(X, \| \ \|_n))} \leq \|x\|_k \leq \|x\|_{M_k(MAX(X, \| \ \|_n))}.$$

Démonstration. Les inclusions de X dans $B(H)$ de la formule (I.3.1) ainsi que de la formule (I.3.2a) définissent explicitement des structures d'espace d'opérateurs sur X compatibles avec la n-norme $\| \ \|_n$ comme conséquence du théorème I.1.9 (ii). Ce qui concerne (I.3.3), il est clair que la norme matricielle (I.3.2a) domine tout autre norme matricielle compatible avec $\| \ \|_n$. Le fait que la structure MIN est dominée par toute autre structure d'espaces d'opérateurs $\| \ \|_p$ est aussi clair, car pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in M_n(X)$ on a

$$\begin{aligned}\|x\|_p &= \sup \{ \|\langle f, x\rangle\|_{\boldsymbol{M}_p \otimes \boldsymbol{M}_p} \mid f \in M_p(X^*), \|f\|_p^* \leq 1 \} \\ &\geq \sup \{ \|\langle f, x\rangle\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_p} \mid f \in M_n(X^*), \|f\|_n^* \leq 1 \} \\ &= \|x\|_{MIN,p}.\end{aligned}$$

Il reste à montrer que (I.3.2a) et (I.3.2b) sont identiques. Pour ceci il suffit de montrer que la norme matricielle $\| \ \|'_{MAX,p}$ définie par (I.3.2b) est compatible avec $\| \ \|_n$, qu'elle vérifie les axiomes de Ruan $(\mathrm{R1})_p$ et $(\mathrm{R2})_p$, et qu'elle domine toute autre norme compatible. La condition (R) implique que $\| \ \|_n = \| \ \|'_{MAX,n}$ et la compatibilité est assurée. Il est aussi clair que les normes $\| \|'_{MAX,p}$ vérifient $(\mathrm{R1})_p$. Soit maintenant $x = \left[\begin{smallmatrix} x' & 0 \\ 0 & x'' \end{smallmatrix}\right] \in M_p(X)$ avec $x' \in M_k(X)$ et $x'' \in M_{p-k}(X)$. Alors par invariance unitaire de la norme $\| \|'_{MAX,p}$ on a l'inégalité $\max\{ \|x'\|'_{MAX,k}, \|x''\|'_{MAX,p-k} \} \leq \|x\|'_{MAX,p}$. Notons $\varepsilon_k = \left[\begin{smallmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in \boldsymbol{M}_p$ la projection sur les k premiers composants. Alors si l'on a des décompositions

$$\begin{bmatrix} x' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum \alpha'_i \cdot x'_i \cdot \beta'_i = \sum \varepsilon_k \, \alpha'_i \cdot x'_i \cdot \beta'_i \, \varepsilon_k$$

et

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x'' \end{bmatrix} = \sum \alpha''_j \cdot x''_j \cdot \beta''_j = \sum (1_p - \varepsilon_k) \, \alpha''_j \cdot x''_j \cdot \beta''_j \, (1_p - \varepsilon_k)$$

avec $\|x'_i\|_n \leq 1$ et $\|x''_j\|_n \leq 1$ et tels que

$$\left\| \sum \alpha'_i \alpha'^*_i \right\| = \left\| \sum \beta'^*_i \beta'_i \right\| < \|x'\|'_{MAX,k} + \varepsilon$$
$$\left\| \sum \alpha''_j \alpha''^*_j \right\| = \left\| \sum \beta''^*_j \beta''_j \right\| < \|x''\|'_{MAX,p-k} + \varepsilon,$$

alors on peut décomposer

$$x = \sum \varepsilon_k \, \alpha'_i \cdot x'_i \cdot \beta'_i \, \varepsilon_k + \sum (1_p - \varepsilon_k) \, \alpha''_j \cdot x''_j \cdot \beta''_j \, (1_p - \varepsilon_k)$$

avec

$$\begin{aligned} &\left\| \sum \varepsilon_k \, \alpha'_i \alpha'^*_i \varepsilon_k + \sum (1_p - \varepsilon_k) \, \alpha''_j \alpha''^*_j (1_p - \varepsilon_k) \right\| = \\ &\qquad = \max \left\{ \left\| \sum \varepsilon_k \, \alpha'_i \alpha'^*_i \varepsilon_k \right\|, \left\| \sum \varepsilon_k \, \alpha''_j \alpha''^*_j \varepsilon_k \right\| \right\} \\ &\qquad < \max\{ \|x'\|_{MAX,k}, \|x''\|_{MAX,p-k} \} + \varepsilon \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\left\| \sum (1_p - \varepsilon_k) \, \beta'^*_i \beta'_i \, (1_p - \varepsilon_k) + \sum (1_p - \varepsilon_k) \, \beta''^*_j \beta''_j \, (1_p - \varepsilon_k) \right\| = \\ &= \max \left\{ \left\| \sum (1_p - \varepsilon_k) \, \beta'^*_i \beta'_i \, (1_p - \varepsilon_k) \right\|, \left\| \sum (1_p - \varepsilon_k) \, \beta''^*_j \beta''_j \, (1_p - \varepsilon_k) \right\| \right\} \\ &< \max\{ \|x'\|_{MAX,k}, \|x''\|_{MAX,p-k} \} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Enfin le fait que $\| \|'_{MAX,p}$ domine tout autre norme compatible est évident, puisque tout autre structure d'espace d'opérateurs $\| \|_p$ compatible avec $\| \|_n$ coïncide avec $\| \|'_{MAX,n}$ sur $M_n(X)$ et vérifie l'inégalité

$$\left\| \sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i \right\|_p \leq \left\| \sum \alpha_i \alpha_i^* \right\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} \left\| \sum \beta_i^* \beta_i \right\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} \max_i \|x_i\|_n$$

comme conséquence des axiomes de Ruan. □

Définition I.3.2. On note $MIN(X, \| \|_n)$ et $MAX(X, \| \|_n)$ respectivement les espaces d'opérateurs définis par les normes matricielles (I.3.1) et (I.3.2) et on note $MIN(X) = MIN(X, \| \|_1)$ et $MAX(X) = MAX(X, \| \|_1)$ les structures de Paulsen.

Remarque I.3.3.
1. Les formules (I.3.1) et (I.3.2) définissent des structures d'espaces d'opérateurs sur X pour n'importe quelle n-norme $\| \|_n$, mais ces structures sont compatibles avec la norme $\| \|_n$ si et seulement si elle vérifie les conditions du théorème I.1.9.
2. N'importe quelle n-isométrie $\Phi : X \to C(K; \boldsymbol{M}_n)$ induit la structure d'espace opérateurs $MIN(X, \| \|_n)$ sur X.

Les structures MIN est MAX sont caractérisées par les propriétés universelles suivantes (cf. [**32**] et [**48**, Theorem 18] pour une généralisation).

Proposition I.3.4. *Soit $(X, \{\| \ \|_k\})$ un espace d'opérateurs. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Pour tout espace d'opérateurs Y, toute application bornée $u : Y \to X$ est complètement bornée avec $\|u\|_{cb} = \|u\|_n$.

(ii) Il existe un compact K tel que on a un plongement complètement isométrique $X \subseteq C(K; \boldsymbol{M}_n)$.

(iii) On a $X = MIN(X, \| \ \|_n)$ complètement isométriquement.

Démonstration. En effet, l'équivalence de (ii) et (iii) est clair par la remarque précédente ; pour montrer l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) il suffit de rappeler que $C(K; \boldsymbol{M}_n) = \boldsymbol{M}_n \check{\otimes} C(K)$ (cf. e.g. [**49**, Corollary 3.18]), ce qui permet de calculer la norme complètement bornée de n'importe quelle application linéaire $u : Y \to C(K; \boldsymbol{M}_n)$ à partir des normes de $u_t : Y \to \boldsymbol{M}_n, y \mapsto u(y)(t)$, $t \in K$, et puis d'appliquer [**56**, Theorem 2.10]

$$\|u : Y \to C(K; \boldsymbol{M}_n)\| = \sup_{t \in K} \|u_t\|_{cb} = \sup_{t \in K} \|u_t\|_n = \|u\|_n.$$

D'autre part, la condition (i) implique que

$$\|id : MIN(X, \| \ \|_n) \to X\|_{cb} = \|id : MIN(X, \| \ \|_n) \to X\|_n = 1$$

i.e. $d_{cb}(X, MIN(X, \| \ \|_n)) = 1$. □

Remarque I.3.5. Dans [**48**, Theorem 18] (voir aussi [**28**, Corollary 3.1.7.9]) il est montré que les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $\inf \{ \, d_{cb}(X, Y) \mid Y \subseteq C(K; \boldsymbol{M}_n), \ K \text{ compact} \, \} \leq C$

(ii) Pour tout espace d'opérateurs Y, toute application linéaire bornée $u : Y \to X$ est complètement bornée avec $\|u\|_{cb} \leq C\|u\|_n$.

Avec un argument analogue on montre

Proposition I.3.6. *Soit $(X, \{\| \ \|_k\})$ un espace d'opérateurs. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Pour tout espace d'opérateurs Y, toute application bornée $u : X \to Y$ est complètement bornée avec $\|u\|_{cb} = \|u\|_n$.

(ii) On a $X = MAX(X, \| \ \|_n)$ complètement isométriquement.

Proposition I.3.7. *Soit $(X, \| \ \|_n)$ un M_n-espace et soit Y un sous-espace fermé. Alors on a les propriétés suivantes.*

(i) La structure MIN est injective : Le plongement

$$MIN(Y, \| \ \|_n) \subseteq MIN(X, \| \ \|_n)$$

est complètement isométrique.

(ii) La structure MAX est projective : L'application quotient

$$q : MAX(X, \| \ \|_n) \to MAX(X/Y, \| \ \|_n)$$

est une surjection métrique complète.

DÉMONSTRATION. (i) Ceci est une conséquence du théorème de Wittstock (cf. proposition I.1.16). En effet, pour $p \in \mathbf{N}$ et $y \in M_p(Y)$

$$\begin{aligned}\|y\|_{MIN,p} &= \sup\{\, \|\langle g, y\rangle\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_p} \mid g \in M_n(Y^*), \|g\|_n^* \leq 1 \,\} \\ &= \sup\{\, \|\langle f, y\rangle\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_p} \mid f \in M_n(X^*), \|f\|_n^* \leq 1 \,\}\end{aligned}$$

puisque tout $g \in M_n(Y^*)$ a une extension $\tilde{g} \in M_n(X^*)$ telle que $\|\tilde{g}\|_{M_n(X^*)} \leq \|g\|_{M_n(Y^*)}$.
(ii) Soit $(X/Y, \|\ \|_n)$ le M_n-espace quotient de X et Y et soit q l'application quotient. Soit $\hat{x} \in M_p(X/Y)$ avec

$$\|\hat{x}\|_{M_p(MAX(X/Y, \|\ \|_n))} < 1,$$

alors par (I.3.2b) il existe une décomposition finie

$$\hat{x} = \sum \alpha_i \cdot \hat{x}_i \cdot \beta_i$$

avec $\hat{x}_i \in M_n(X/Y)$, $\alpha_i \in \boldsymbol{M}_{p,n}$, $\beta_i \in \boldsymbol{M}_{n,p}$ tels que $\|\hat{y}_i\|_{M_n(X/Y)} < 1$ et

$$\Big\|\sum \alpha_i \alpha_i^*\Big\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} \Big\|\sum \beta_i^* \beta_i\Big\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} < 1.$$

Alors on peut choisir $x_i \in M_n(X)$ tels que $q_n(x_i) = \hat{x}_i$ et $\|x_i\|_{M_n(X)} < 1$ et en posant

$$x = \sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i$$

on a $q_n(x) = \hat{x}$ et $\|x\|_n < 1$. □

Remarque I.3.8. La structure MAX n'étant pas injective, permet pourtant grâce à la formule (I.3.2b) la formule «locale» suivante

$$\|x\|_{M_p(MAX(X, \|\ \|_n))} = \inf\Big\{\, \|x\|_{M_p(MAX(Y, \|\ \|_n))} \mid Y \subseteq X \text{ fini-dimensionnel t.q. } x \in M_p(Y) \,\Big\}$$

Les structures MIN et MAX sont en dualité pour $n = 1$ (cf. [**5**, Corollary 2.8]), et la même démonstration donne le cas général.

Théorème I.3.9. *On a*

$$MIN(X^{**}, \|\ \|_n^{**}) = MIN(X, \|\ \|_n)^{**}$$

complètement isométriquement.

DÉMONSTRATION. Par définition de la structure MIN, l'application identité $Id : MIN(X, \|\ \|_n)^{**} \to MIN(X^{**}, \|\ \|_n^{**})$ est une contraction complète et il suffit de montrer que son inverse l'est aussi. L'inclusion $X \subseteq X^{**}$ induit sur $M_n(X)$ la structure d'espace d'opérateurs $MIN(X^{**}, \|\ \|_n^{**})$. et celle-ci doit coïncider avec $MIN(X, \|\ \|_n)$, puisque $Id : (X, \|\ \|_n) \to (X^{**}, \|\ \|_n^{**})$ est une n-isométrie. On a donc deux inclusions complètement isométriques $MIN(X, \|\ \|_n) \to MIN(X, \|\ \|_n)^{**}$ et $MIN(X, \|\ \|_n) \to MIN(X^{**}, \|\ \|_n^{**})$. Alors il résulte de [**5**, Theorem 2.5] que la structure d'espace d'opérateurs sur X^{**} est uniquement determinée par celle sur X. □

Corollaire I.3.10. *On a complètement isométriquement*

$$MAX(X, \|\ \|_n)^* = MIN(X^*, \|\ \|_n^*) \tag{I.3.4}$$

$$MIN(X, \|\ \|_n)^* = MAX(X^*, \|\ \|_n^*) \tag{I.3.5}$$

DÉMONSTRATION. Notons d'abord l'identité

$$\begin{aligned}\|f\|_{MIN(X^*, \|\ \|_n^*), p} &= \sup\Big\{\, \|\langle f, x\rangle\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_p} \mid x \in M_n(X), \|x\|_n \leq 1 \,\Big\} \\ &= \big\|[f_{ij}]\big\|_{B_n((X, \|\ \|_n), \boldsymbol{M}_p)}\end{aligned} \tag{I.3.6}$$

pour $f \in M_p(X^*)$. Ensuite les identités isométriques

$$\begin{aligned} M_p\big(MAX(X, \|\ \|_n)^*\big) &= CB(MAX(X, \|\ \|_n), \boldsymbol{M}_p) \\ &= B_n((X, \|\ \|_n), \boldsymbol{M}_p) && \text{par définition de } MAX \\ &= M_p(MIN(X^*, \|\ \|_n^*)) && \text{par (I.3.6)} \end{aligned}$$

impliquent (I.3.4). D'autre part, les identités complètement isométriques

$$\begin{aligned} MAX(X^*, \|\ \|_n^*)^* &= MIN(X^{**}, \|\ \|_n^{**}) && \text{par (I.3.4)} \\ &= MIN(X, \|\ \|_n)^{**} && \text{par (I.3.9)} \end{aligned}$$

montrent que les espaces d'opérateurs duaux de $MIN(X, \|\ \|_n)^*$ et $MAX(X^*, \|\ \|_n^*)$ sont isomorphes complètement isométriquement et ceci implique (I.3.5). □

Plus tard on aura besoin du paramètre suivant (cf. [**40**]).

Définition I.3.11. Soit $(X, \|\ \|_n)$ un M_n-espace. On notera

$$\begin{aligned} \alpha(X, \|\ \|_n) &= \sup \left\{ \|x\|_{MAX,p} \mid x \in M_p(X), \|x\|_{MIN,p} \leq 1,\, p \in \mathbf{N} \right\} \\ &= \big\| Id : MIN(X, \|\ \|_n) \to MAX(X, \|\ \|_n) \big\|_{cb} \end{aligned}$$

Ceci n'est rien d'autre que la distance c.b. entre la structure MIN et MAX, voir la proposition I.6.4. Le corollaire I.3.10 et la proposition I.1.14 entraînent le corollaire suivant.

Corollaire I.3.12. *Soit $(X, \|\ \|_n)$ un M_n-espace, alors*

$$\alpha(X, \|\ \|_n) = \alpha(X^*, \|\ \|_n^*).$$

Ensuite on généralise facilement [**40**, Proposition 2.3] et [**41**, Proposition 2.2].

Proposition I.3.13. *Soit X un M_n-espace de dimension finie $N < \infty$ et soient $(e_1, e_2, \ldots, e_N)$ une base de X et $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_N^*)$ une base de X^* biorthonormale à (e_i). Notons*

$$B_{\boldsymbol{M}_n}(X, \|\ \|_n) = \left\{ \underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \in {\boldsymbol{M}_n}^N \;\middle|\; \left\| \sum_{i=1}^N \lambda_i \otimes e_i \right\|_n \leq 1 \right\}$$

et

$$B_{\boldsymbol{M}_n}(X^*, \|\ \|_n^*) = \left\{ \underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N) \in {\boldsymbol{M}_n}^N \;\middle|\; \left\| \sum_{i=1}^N \mu_i \otimes e_i^* \right\|_n^* \leq 1 \right\}.$$

(i) Pour $x = \sum b_k \otimes e_k$ où $a_i \in \boldsymbol{M}_p$, on a les formules

$$\|x\|_{MIN,p} = \sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^N \mu_k \otimes b_k \right\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_p} \;\middle|\; \underline{\mu} \in B_{\boldsymbol{M}_n}(X^*, \|\ \|_n^*) \right\}$$

$$\begin{aligned} \|x\|_{MAX,p} = \inf \Bigg\{ & \left\| \sum_{k=1}^N \alpha_i \alpha_i^* \right\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} \left\| \sum_{k=1}^N \beta_i^* \beta_i \right\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} \;\Bigg| \\ & \exists \underline{\lambda_i} \in B_{\boldsymbol{M}_n}(X, \|\ \|_n)\, \forall k \in \{1, \ldots, n\} : b_k = \sum \alpha_i \lambda_{i,k} \beta_i \Bigg\} \end{aligned}$$

(ii) On a

$$\alpha(X,\|\ \|_n)=\sup\Bigg\{\Big\|\sum_{i=1}^N a_i\otimes b_i\Big\|_{\min}\ \Bigg|\ a_i,b_i\in B(H)\ t.q.$$
$$\forall\underline{\lambda}\in B_{\boldsymbol{M}_n}(X,\|\ \|_n):\ \Big\|\sum_{i=1}^N \lambda_i\otimes a_i\Big\|_{M_n(B(H))}\le 1\quad et$$
$$\forall\underline{\mu}\in B_{\boldsymbol{M}_n}(X_n^*,\|\ \|_n^*):\ \Big\|\sum_{i=1}^N \mu_i\otimes b_i\Big\|_{M_n(B(H))}\le 1\Bigg\}$$

Démonstration. Les formules (i) ne sont que des reformulations de (I.3.1) et (I.3.2b) respectivement. Alors (ii) est élémentaire en utilisant le fait que pour $T:X\to B(H)$ et $a_i=T(e_i)$ on a

$$\|T\|_n=\sup\left\{\Big\|\sum_{k=1}^N \lambda_k\otimes a_k\Big\|_{M_n(B(H))}\ \Bigg|\ \lambda_k\in\boldsymbol{M}_n\ \text{t.q.}\ \Big\|\sum_{k=1}^N\lambda_k\otimes e_k\Big\|_n\le 1\right\}.$$

□

I.4. Sous-algèbres de $C(K;\boldsymbol{M}_n)$

Ce paragraphe est consacré à une généralisation du lemme de Craw [**14**]. Pour cela on a besoin du petit lemme suivant.

Lemme I.4.1. *Soient $a_1,a_2,\dots,a_m\in\boldsymbol{M}_n$ des contractions et soit p un polynôme non-commutatif à m variables avec coefficient constant nul. Alors*

$$\|p(a_1,a_2,\dots,a_m)\|_{\boldsymbol{M}_n}\le\sup\{\,\|p(u_1,u_2,\dots,u_m)\|_{\boldsymbol{M}_n}\mid u_i\in\boldsymbol{M}_n\ unitaire\}$$

et on notera $\|p\|_{\infty,n}$ ce supremum.

Démonstration. On reprend la démonstration de [**38**] (voir aussi [**49**, Ch. 1] et [**8**]). Par décomposition polaire, pour chaque i on peut écrire $a_i=v_i|a_i|$, où v_i est une matrice unitaire et $|a_i|=(a_i^*a_i)^{1/2}$ est positive. On a donc une décomposition spectrale

$$|a_i|=u_i\begin{bmatrix}s_1(a_i)&&0\\&\ddots&\\0&&s_n(a_i)\end{bmatrix}u_i^*$$

où $s_k(a_i)\le 1$ sont les valeurs caractéristiques de a_i et $u_i\in\boldsymbol{M}_n$ est unitaire. On peut donc écrire

$$p(a_1,a_2,\dots,a_m)=\big[p_{ij}\left(s_1(a_1),s_2(a_1),\dots,s_n(a_m)\right)\big]$$

où p_{ij} sont des polynômes sur le disque $\mathbf{D}^{mn}$ tels que

$$\big[p_{ij}(z_{11},z_{21},\dots,z_{nm})\big]=p\left(v_1u_1\begin{bmatrix}z_{11}&&0\\&\ddots&\\0&&z_{n1}\end{bmatrix}u_1^*,\dots,v_mu_m\begin{bmatrix}z_{1m}&&0\\&\ddots&\\0&&z_{nm}\end{bmatrix}u_m^*\right).$$

La fonction

$$(z_{11},\dots,z_{nm})\to\big\|\big[p_{ij}(z_{11},z_{21},\dots,z_{nm})\big]\big\|_{\boldsymbol{M}_n},$$

étant sous-harmonique sur $\mathbf{D}^{mn}$, atteint son sup sur $\{\,(z_{11},\dots,z_{nm})\mid |z_{ij}|=1\,\}$ et dans ce cas là les a_i sont unitaires, d'où la conclusion du lemme. □

Corollaire I.4.2. *Soit X un quotient d'une sous-algèbre de $C(K;\boldsymbol{M}_n)$. Alors pour toutes $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m \in X$ et pour tout polynôme non-commutatif à m variables avec coefficient constant nul on a*

$$\|p(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m)\|_X \leq \|p\|_{\infty,n}$$

Ce corollaire donne une des implications de la proposition suivante.

Proposition I.4.3. *Soit X une algèbre de Banach. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe un compact K tel que X est un quotient d'une sous-algèbre de $C(K;\boldsymbol{M}_n)$.

(ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \mathbf{N}$, pour tout polynôme non-commutatif à m variables avec coefficient constant nul et pour toutes $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ avec $\|x_i\| \leq C$ on a

$$\|p(x_1, x_2, \dots, x_m)\|_X \leq \|p\|_{\infty,n}.$$

Démonstration. Soit $\Gamma = \{ x \in X \mid \|x\| \leq C \}$ et soit K la boule unité de $\ell_\infty(\Gamma;\boldsymbol{M}_n)$ munie de la topologie $*$-faible du prédual $\ell_1\hat{\otimes}S_n^1$. Alors tout $x \in \Gamma$ définit un élément $e_x \in C(K;\boldsymbol{M}_n)$ en posant $e_x(\omega) = \omega_x$. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des polynômes non-commutatifs à coefficient constant nul et soit

$$Y_0 = \{ p(e_{x_1}, e_{x_2}, \dots, e_{x_m}) \mid m \in \mathbf{N}, x_i \in X, p \in \mathcal{A} \}$$

la sous-algèbre de $C(K;\boldsymbol{M}_n)$ engendrée par $\{ e_x \mid x \in X \}$, dont la complétion sera noté par Y. Alors

$$\begin{aligned} T : Y &\to X \\ p(e_{x_1}, \dots, e_{x_m}) &\mapsto p(x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

est un homomorphisme surjectif. □

I.5. Produits tensoriels

Dans la catégorie des espaces d'opérateurs il y a une théorie bien développée des produits tensoriels analogue à la théorie des produits tensoriels des espaces de Banach. Il y a donc a priori une abondance de M_n-structures sur le produit tensoriel de deux M_n-espaces induites par les différents produits tensoriels des structures d'espace d'opérateurs. On va voir dans cette section certaines n-normes «naturelles» qui ne dépendent que de la M_n-structure des espaces composants.
Rappelons donc la définition des cross-normes d'espaces d'opérateurs (cf. **[6]**). Soient X et Y des espaces d'opérateurs. Une norme matricielle $\{\alpha_k\}$ sur $X\otimes Y$ est appelée une *cross-norme d'espaces d'opérateurs* si elle vérifie les axiomes de Ruan et si en plus on a pour $m, n \in \mathbf{N}$ et $x \in M_m(X)$, $y \in M_n(Y)$ l'inégalité

$$\alpha_{mn}(x\otimes y) \leq \|x\|_{M_m(X)}\, \|y\|_{M_n(Y)}. \tag{I.5.1}$$

L'analogue de cette condition pour les M_n-espaces n'est pas «naturelle», car elle suggère plutôt de considérer $M_{n^2}(X\otimes Y)$ au lieu de $M_n(X\otimes Y)$. En effet, on a la formule suivante pour le produit tensoriel minimal des espaces d'opérateurs (**[6**, Theorem 5.1**]**) :

$$\|u\|_{M_n(X\otimes_{\min}Y)} = \sup \left\|\langle f\otimes g, u\rangle\right\|_{\boldsymbol{M}_p\otimes\boldsymbol{M}_q\otimes\boldsymbol{M}_n}$$

où le sup porte sur $p, q \in \mathbf{N}$ et $f \in M_p(X^*)$, $g \in M_q(Y^*)$ avec $\|f\|_p^* \leq 1$, $\|g\|_q^* \leq 1$. En particulier, la norme sur $M_n(X\otimes_{\min}Y)$ dépend des structures d'espace d'opérateurs de X et Y entières et la donnée de leurs M_n-structure ne la détermine pas.

Par contre, quelques variantes du produit tensoriel de Haagerup sont très bien adaptées à notre situation.

Définition I.5.1. Soient $(X, \| \ \|_n)$ et $(Y, \| \ \|_n)$ deux M_n-espaces. Pour $x \in M_n(X)$ et $y \in M_n(Y)$ on note $u = x \odot y \in M_n(X \otimes Y)$ la matrice $u_{ij} = \sum_k x_{ik} \otimes y_{kj}$. Soit A une algèbre et soient $\rho : X \to A$ et $\sigma : Y \to A$ des applications linéaires continues. Alors on note $\rho \cdot \sigma : X \otimes Y \to A$ la réduction de $\rho \otimes \sigma$

$$\rho \cdot \sigma \left(\sum x_i \otimes y_i \right) = \sum \rho(x_i) \sigma(y_i);$$

on a en particulier $(\rho \cdot \sigma)_n(x \odot y) = \rho_n(x) \sigma_n(y)$, où le produit est à évaluer dans l'algèbre $M_n(A)$.

Considérons pour $u \in M_n(X \otimes Y)$ les normes suivantes.

(I.5.2)

$$\|u\|_{f,n} = \sup \left\{ \|(\rho \cdot \sigma)_n(u)\|_{M_n(B(H))} \,\middle|\, \rho : X \to B(H), \sigma : Y \to B(H) \ n\text{-contractions} \right\}$$

Ceci n'est rien d'autre que la norme induite sur $M_n(X \otimes Y)$ par l'espace d'opérateurs $MAX(X, \| \ \|_n) \otimes_h MAX(Y, \| \ \|_n)$, puisque par définition de MAX, $B_n((X, \| \ \|_n), B(H)) = CB(MAX(X, \| \ \|_n), B(H))$ isométriquement (cf. [**47**]). D'autre part, on a un analogue de [**3**, Prop. 6] comme suit.

(I.5.3) $$\|u\|_{M_n(MIN(X, \| \ \|_n) \otimes_h MIN(Y, \| \ \|_n))} =$$
$$= \inf \left\{ \sup \left\{ \left\| \sum f_n(x_i) f_n(x_i)^* \right\|^{1/2}_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \left\| \sum g_n(y_i)^* g_n(y_i) \right\|^{1/2}_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \,\middle|\, f \in M_n(X^*), \|f\|^*_n \le 1; g \in M_n(Y^*), \|g\|^*_n \le 1 \right\} \,\middle|\, u = \sum x_i \odot y_i \right\}$$

En effet [**6**],

$$\|u\|_h = \inf \left\{ \| [x_1, \dots, x_m] \|_{M_{1,m}(M_n(X))} \left\| \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \right\|_{M_{m,1}(M_n(Y))} \,\middle|\, u = \sum_{i=1}^m x_i \odot y_i, m \in \mathbf{N} \right\}$$

et

$$\| [x_1, \dots, x_m] \|_{M_{1,m}(M_n(X))} =$$
$$= \sup \left\{ \| [f_n(x_1), \dots, f_n(x_m)] \|_{M_{1,m}(\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n)} \,\middle|\, f : X \to \boldsymbol{M}_n \ n\text{-contractante} \right\}$$
$$= \sup \left\{ \left\| \sum f_n(x_i) f_n(x_i)^* \right\|^{1/2}_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \,\middle|\, f : X \to \boldsymbol{M}_n \ n\text{-contractante} \right\}.$$

Pour la catégorie des M_n-espaces il conviendra de considérer les normes tensorielles avec les propriétés suivantes, analogues aux produits tensoriels d'espaces de Banach, (cf. [**18**, Chap. 8]).

Définition I.5.2. Soient $(X, \| \ \|_n)$ et $(Y, \| \ \|_n)$ des M_n-espaces et soit α une n-norme sur $X \otimes Y$. Définissons une dualité $< \ , \ >_\odot$ entre $M_n(X \otimes Y)$ et $M_n(X^*, Y^*)$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n$ en posant pour $u^* = \sum \alpha_i \otimes f_i \otimes g_i \in M_n \otimes X^* \otimes Y^*$ et $u = \sum \beta_j \otimes x_j \otimes y_j \in M_n \otimes X \otimes Y$

$$\langle u^*, u \rangle_\odot = \sum_{ij} \alpha_i \otimes \beta_j \langle f_i, x_j \rangle \langle g_i, y_j \rangle;$$

autrement dit, on a pour $f \in M_n(X^*)$, $g \in M_n(Y^*)$, $x \in M_n(X)$ et $y \in M_n(Y)$

$$\langle f \odot g, x \odot y\rangle_\odot = \langle f, x\rangle \langle g, y\rangle = \left[\sum_{jq}\langle f_{ij}, x_{pq}\rangle \langle g_{jk}, y_{qr}\rangle\right]_{ip,kr} \in \boldsymbol{M}_n\otimes\boldsymbol{M}_n$$

et par linéarité, si $u^* \in M_n(X^*\otimes Y^*)$ et $u \in M_n(X\otimes Y)$ peuvent être écrit sous la forme $u^* = \sum f_i \odot g_i$ et $u = \sum x_j \odot y_j$ respectivement, on a

$$\langle u^*, u\rangle_\odot = \sum_{ij}\langle f_i \odot g_i, x_j \odot y_j\rangle_\odot.$$

Cette dualité permet grace la remarque I.1.13 2 d'identifier le M_n-espace dual $(X\otimes Y, \alpha)^*$ avec le complété de $(X^*\otimes Y^*, \alpha^*)$, où l'on pose

$$\alpha^*(u^*) = \sup\left\{ \|\langle u^*, u\rangle_\odot\|_{\boldsymbol{M}_n\otimes\boldsymbol{M}_n} \,\middle|\, u \in M_n(X\otimes Y), \alpha(u) \le 1 \right\}.$$

Alors α est dite une *norme raisonnable* si elle vérifie la condition (R) et en plus les propriétés suivantes.

1. Pour toutes $x \in M_n(X)$ et $y \in M_n(X)$ on a l'inégalité

(I.5.4a) $$\alpha(x \odot y) \le \|x\|_n \|y\|_n.$$

2. Pour toutes $f \in M_n(X^*)$ et $g \in M_n(Y^*)$ on a

(I.5.4b) $$\alpha^*(f \odot g) \le \|f\|_n^* \|g\|_n^*.$$

Remarque I.5.3. Soient X et Y des M_n-espaces et soit α une norme raisonnable sur $M_n(X\otimes Y)$.

1. Pour clarifier notons que par définition $M_n(X^*) = B_n(X, \boldsymbol{M}_n)$ isométriquement où l'on identifie une application linéaire continue $\rho : X \to \boldsymbol{M}_n$ avec la matrice $f \in M_n(X^*)$ donnée par $f_{ij}(x) = (\rho(x))_{ij}$. Alors si l'on note $g \in M_n(Y^*)$ la matrice correspondant à $\sigma : Y \to \boldsymbol{M}_n$, on a l'identité
$$I_{\boldsymbol{M}_n}\otimes(\rho \cdot \sigma)(u) = \langle f \odot g, u\rangle_\odot$$
pour $u \in M_n(X\otimes Y)$.
2. Pour toutes $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n$, $x_i \in M_n(X)$, $y_i \in M_n(Y)$, $f_i \in M_n(X^*)$ et $g_i \in M_n(Y^*)$ on a

(I.5.5a) $$\alpha\left(\sum \alpha_i \cdot x_i \odot y_i \cdot \beta_i\right) \le \left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|^{1/2} \left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\|^{1/2} \max\|x_i\|_n \max\|y_i\|_n$$

(I.5.5b) $$\alpha^*\left(\sum \alpha_i \cdot f_i \odot g_i \cdot \beta_i\right) \le \left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|^{1/2} \left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\|^{1/2} \max\|f_i\|_n^* \max\|g_i\|_n^*$$

Proposition I.5.4. *La norme*

(I.5.6)
$$\begin{aligned}\|u\|_{\vee,n} &= \sup\{ \|\langle f \odot g, u\rangle_\odot\|_{\boldsymbol{M}_n\otimes\boldsymbol{M}_n} \mid f \in M_n(X^*), \|f\|_n^* \le 1,\, g \in M_n(Y^*), \|g\|_n^* \le 1\}\\ &= \sup\{ \|I_{\boldsymbol{M}_n}\otimes(\rho \cdot \sigma)(u)\|_{\boldsymbol{M}_n\otimes\boldsymbol{M}_n} \mid \rho : X \to \boldsymbol{M}_n, \sigma : Y \to \boldsymbol{M}_n \text{ } n\text{-contractions}\}\end{aligned}$$

est la plus petite norme raisonnable sur $M_n(X\otimes Y)$. En plus, elle est injective dans le sens que pour toutes inclusions n-isométriques $X \subseteq X'$ et $Y \subseteq Y'$, l'inclusion $X\otimes_{\vee,n}Y \subseteq X'\otimes_{\vee,n}Y'$ est n-isométrique aussi. Finalement, pour toutes applications linéaires $u : X_1 \to X_2$ et $v : Y_1 \to Y_2$ on a

(I.5.7) $$\|u\otimes v : X_1\otimes_{\vee,n}Y_1 \to X_2\otimes_{\vee,n}Y_2\|_n \le \|u\|_n\|v\|_n.$$

Démonstration. Vérifions d'abord les conditions de la définition I.5.2. La remarque I.1.13 (2.) s'applique à $\| \, \|_{\vee,n}$ et (R) est donc satisfaite ; l'inégalité (I.5.4b) est une conséquence immédiate de la définition et il reste à vérifier (I.5.4a) :

$$\begin{aligned}\|x \odot y\|_{\vee,n} &= \sup \{ \|\langle f, x\rangle \, \langle g, y\rangle\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \mid \|f\|_n^* \le 1, \|g\|_n^* \le 1 \} \\ &\le \|x\|_n \, \|y\|_n.\end{aligned}$$

Soit maintenant α une norme raisonnable quelconque sur $M_n(X \otimes Y)$, soient $f \in M_n(X^*)$, $g \in M_n(Y^*)$ et soit $u \in M_n(X \otimes Y)$. Alors la condition (I.5.4b) sur α^* entraîne que

$$\|\langle f \odot g, u\rangle_\odot\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \le \|f\|_n^* \, \|g\|_n^* \, \alpha(u)$$

et par conséquent

$$\|u\|_{\vee,n} = \sup \left\{ \|\langle f \odot g, u\rangle_\odot\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} : \|f\|_{M_n(X^*)} \le 1, \|g\|_{M_n(Y^*)} \le 1 \right\} \le \alpha(u).$$

L'injectivité de $\| \, \|_{\vee,n}$ est une conséquence du théorème d'extension de Wittstock (Proposition I.1.16) et (I.5.7) résulte immédiatement de la définition de la structure MIN, et de la proposition I.1.14 :

$$\begin{aligned}\Big\|(u \otimes v)_n\Big(\sum x_i \odot y_i\Big)\Big\|_{\vee,n} &= \sup \Big\{ \Big\|\sum \langle f, u_n(x_i)\rangle \, \langle g, v_n(y_i)\rangle\Big\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \;\Big|\; \\ &\qquad f \in M_n(X_2^*), \|f\|_n^* \le 1, g \in M_n(Y_2^*), \|g\|_n^* \le 1 \Big\} \\ &= \sup \Big\{ \Big\|\sum \langle u_n^*(f), x_i\rangle \, \langle v_n^*(g), y_i\rangle\Big\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \;\Big|\; \\ &\qquad f \in M_n(X_2^*), \|f\|_n^* \le 1, g \in M_n(Y_2^*), \|g\|_n^* \le 1 \Big\} \\ &\le \|u\|_n \, \|v\|_n \Big\|\sum x_i \odot y_i\Big\|_{\vee,n}.\end{aligned}$$

□

Définition I.5.5. Soient X, Y, Z des M_n-espaces. Notons $Bil_n(X, Y; Z)$ l'espace des applications bilinéaires et définissons $\psi_n : M_n(X) \times M_n(Y) \to M_n(Z)$ par

$$\psi_n(x, y)_{ij} = \sum_k \psi(x_{ik}, y_{kj});$$

alors on peut munir $Bil_n(X, Y; Z)$ de la norme

$$\begin{aligned}\|\psi\|_{Bil_n} = \sup \Big\{ \Big\|\sum \psi_n(\alpha_i \cdot x_i, y_i \cdot \beta_i)\Big\|_{M_n(Z)} \;\Big|\; &\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n \\ &\Big\|\sum \alpha_i \alpha_i^*\Big\| \le 1, \Big\|\sum \beta_i^* \beta_i\Big\| \le 1, \|x_i\|_n \le 1, \|y_i\|_n \le 1 \Big\}.\end{aligned}$$

En particulier, $Bil_n(X, Y; \mathbf{C})$ a une M_n-structure canonique donnée par

$$M_n(Bil_n(X, Y; \mathbf{C})) = Bil_n(X, Y; \boldsymbol{M}_n).$$

Alors on a

Proposition I.5.6. *Soient X, Y des M_n-espaces. À chaque $u = \sum \alpha_i \otimes x_i \otimes y_i \in M_n(X \otimes Y)$ on associe une forme bilinéaire $T(u)$ sur $X^* \times Y^*$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}_n$ en posant*

$$T(u)(f, g) = \sum \alpha_i \, \langle f, x_i\rangle \, \langle g, y_i\rangle.$$

Autrement dit, si u a la forme spéciale $u = x \odot y$ avec $x \in M_n(X)$ et $y \in M_n(Y)$, on a

$$T(x \odot y)(f,g) = \langle f, x\rangle \, \langle g, y\rangle = \Big[\sum_j \langle f, x_{ij}\rangle \, \langle g, y_{jk}\rangle\Big]_{i,k}.$$

Alors l'inclusion

$$T : M_n(X \otimes_{\vee,n} Y) \to Bil_n(X^*, Y^*; \boldsymbol{M}_n)$$

est une isométrie.

Démonstration. Par la définition de $\| \; \|_{\vee,n}$ on a pour tout $u \in M_n(X \otimes Y)$ l'inégalité

$$\|u\|_{\vee,n} = \sup \left\{ \|T(u)_n(f,g)\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \,\middle|\, \|f\|_{M_n(X^*)} \leq 1, \|g\|_{M_n(Y^*)} \leq 1 \right\} \leq \|T(u)\|_{Bil_n};$$

pour vérifier l'inégalité inverse, on estime, pour $f_i \in M_n(X^*)$, $g_i \in M_n(Y^*)$ et $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n$,

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum T(u)_n(\alpha_i \cdot f_i, g_i \cdot \beta_i)\Big\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} &= \\
&= \Big\|\Big\langle \sum \alpha_i \cdot f_i \odot g_i \cdot \beta_i, u \Big\rangle_{\odot}\Big\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \\
&= \Big\|\sum (\alpha_i \otimes I_n) \, T(f_i \odot g_i)_n(u) \, (\beta_i \otimes I_n)\Big\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \\
&\leq \Big\|\sum \alpha_i \alpha_i^*\Big\|^{1/2} \max \|f_i\|_n^* \|g_i\|_n^* \, \|u\|_{\vee,n} \, \Big\|\sum \beta_i^* \beta_i\Big\|^{1/2}
\end{aligned}$$

□

Proposition I.5.7. *La norme*

$$\|u\|_{\wedge,n} = \sup \{ \, \|\psi_n(u)\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \mid \psi \in Bil_n(X, Y; \boldsymbol{M}_n), \|\psi\|_{Bil_n} \leq 1 \}$$

est la plus grande norme raisonnable sur $M_n(X \otimes Y)$.

Démonstration. Il est clair que $\| \; \|_{\wedge,n}$ est une semi-norme qui vérifie (R) . Par l'inclusion isométrique $T : M_n(X^* \otimes_{\vee,n} Y^*) \subseteq Bil_n(X^{**}, Y^{**}; \boldsymbol{M}_n)$ on peut considérer $\hat{T}(f \odot g) = T(f \odot g)|_{X \otimes Y}$, pour des contractions $f \in M_n(X^*)$ et $g \in M_n(Y^*)$, comme élément de la boule unité de $Bil_n(X, Y; \boldsymbol{M}_n)$ et on a donc

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\vee,n} &= \sup \left\{ \|\hat{T}(f \odot g)_n(u)\| \,\middle|\, \|f\|_n^* \leq 1, \|g\|_n^* \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup \{ \, \|\psi_n(u)\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \mid \psi \in Bil_n(X, Y; \boldsymbol{M}_n), \|\psi\|_{Bil_n} \leq 1 \} \\
&= \|u\|_{\wedge,n}
\end{aligned} \tag{I.5.8}$$

pour tout $u \in M_n(X \otimes Y)$. Ceci montre que $\| \; \|_{\wedge,n}$ est une norme sur $M_n(X \otimes Y)$. La condition (I.5.4b) est satisfaite comme conséquence de (I.5.8) et la définition (I.5.6). Il reste à montrer (I.5.4a) :

$$\|x \odot y\|_{\wedge,n} = \sup \{ \, \|\psi_n(x,y)\| \mid \psi \in Bil_n(X, Y; \boldsymbol{M}_n), \|\psi\|_{Bil_n} \leq 1 \} \leq \|x\|_n \|y\|_n.$$

Soit maintenant α une norme raisonnable quelconque sur $M_n(X \otimes Y)$ et soit $u \in M_n(X \otimes Y)$. Alors comme pour la norme $\| \; \|_{\vee,n}$ le théorème I.1.9 fournit une représentation de la norme

$$\alpha(u) = \sup \left\{ \|\langle u^*, u\rangle_{\odot}\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \mid u^* \in M_n((X \otimes Y, \alpha)^*), \|u^*\|_{\alpha,n}^* \leq 1 \right\}$$

et tout $u^* \in M_n((X\otimes Y,\alpha)^*)$ correspond à un élément $\psi \in Bil_n(X,Y;\boldsymbol{M}_n)$ en posant $\psi(x,y) = u^*(x\otimes y) \in \boldsymbol{M}_n$. Cette forme bilinéaire vérifie

$$\begin{aligned}\left\|\sum \psi_n(\alpha_i\cdot x_i, y_i\cdot\beta_i)\right\|_{\boldsymbol{M}_n\otimes\boldsymbol{M}_n} &= \left\|\left\langle u^*, \sum \alpha_i\cdot x_i\odot y_i\cdot\beta_i\right\rangle_\odot\right\|_{\boldsymbol{M}_n\otimes\boldsymbol{M}_n}\\ &\le \alpha\left(\sum\alpha_i\cdot x_i\odot y_i\cdot\beta_i\right)\|u^*\|^*_{\alpha,n}\\ &\le \left\|\sum\alpha_i\alpha_i^*\right\|^{1/2}\max\|x_i\|\,\|y_i\|\left\|\sum\beta_i^*\beta_i\right\|^{1/2}\|u^*\|^*_{\alpha,n}\end{aligned}$$

puisque α est une norme raisonnable. Ceci implique que la boule unité de $M_n((X\otimes Y,\alpha)^*)$ est contenue dans celle de $M_n((X\otimes_{\wedge,n}Y)^*)$. $\square$

Proposition I.5.8. *Soient $(X,\|\ \|_n)$ et $(Y,\|\ \|_n)$ des M_n-espaces.*

(i) On a la formule suivante pour la norme raisonnable maximale sur $M_n(X\otimes Y)$:

$$\text{(I.5.9)}\quad \|u\|_{\wedge,n} = \inf\left\{\left\|\sum\alpha_i\alpha_i^*\right\|^{1/2}\left\|\sum\beta_i^*\beta_i\right\|^{1/2}\max\|x_i\|_n\max\|y_i\|_n\ \middle|\ u=\sum\alpha_i\cdot x_i\odot y_i\cdot\beta_i,\ \alpha_i,\beta_i\in\boldsymbol{M}_n, x_i\in\boldsymbol{M}_n(X), y_i\in\boldsymbol{M}_n(Y)\right\}$$

(ii) Pour tout $u \in M_n(X\otimes_{\wedge,n}Y)$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des matrices $x_i \in M_n(X)$, $y_i \in M_n(Y)$ avec $\|x_i\|_n, \|y_i\|_n \le 1$ et $\alpha_i,\beta_i \in \boldsymbol{M}_n$ telles que

$$\text{(I.5.10)}\qquad u = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i\cdot x_i\odot y_i\cdot\beta_i$$

$$\text{(I.5.11)}\qquad \left\|\sum_{i=1}^\infty\alpha_i\alpha_i^*\right\|^{1/2}\left\|\sum_{i=1}^\infty\beta_i^*\beta_i\right\|^{1/2} \le \|u\|_{\wedge,n}+\varepsilon$$

et la somme (I.5.10) *converge absolument pour la norme $\|\ \|_{\wedge,n}$.*

(iii) Le produit tensoriel $\otimes_{\wedge,n}$ est projectif : Soit $Z \subseteq X$ un sous-espace fermé et soit $q : X \to X/Z$ l'application quotient. Alors l'application $q\otimes id : X\otimes_{\wedge,n}Y \to (X/Z)\otimes_{\wedge,n}Y$ est une application n-quotient.

Remarque I.5.9. Les formules (I.5.6) et (I.5.9) montrent que les normes $\|\ \|_{\vee,n}$ et $\|\ \|_{\wedge,n}$ convergent vers les formules équivalentes pour le produit tensoriel de Haagerup [**42**] et on a pour $u \in M_p(X\otimes Y)$

$$\|u\|_{M_p(X\otimes_h Y)} = \sup_{n\ge p}\|u\|_{M_n(X\otimes_{\vee,n}Y)} = \inf_{n\ge p}\|u\|_{M_n(X\otimes_{\wedge,n}Y)}.$$

Démonstration. (i) Soit α la norme définie par le coté droit de (I.5.9). Alors $\|u\|_{\wedge,n} \le \alpha(u)$ par (I.5.5a) et α est une norme raisonnable. La condition (I.5.4b) est immédiate et il reste à montrer (R) . Soit $u = \sum \alpha_i \cdot u_i \cdot \beta_i$, alors

$$\alpha(u) \leq \inf \Bigg\{ \Big\| \sum_i \alpha_i \Big(\sum_k \gamma_k^{(i)} \gamma_k^{(i)*} \Big) \alpha_i^* \Big\|^{1/2} \Big\| \sum_i \beta_i^* \Big(\sum_k \delta_k^{(i)*} \delta_k^{(i)} \Big) \beta_i \Big\|^{1/2} \times$$

$$\times \max_{i,k} \|x_k^{(i)}\| \max_{i,k} \|y_k^{(i)}\| \;\Bigg|\; u_i = \sum_k \gamma_k^{(i)} \cdot x_k^{(i)} \odot y_k^{(i)} \cdot \delta_k^{(i)} \Bigg\}$$

$$\leq \inf \Bigg\{ \Big\| \sum_i \alpha_i \alpha_i^* \Big\|^{1/2} \max_i \Big\| \sum_k \gamma_k^{(i)} \gamma_k^{(i)*} \Big\|^{1/2} \Big\| \sum_i \beta_i^* \beta_i \Big\|^{1/2} \max_i \Big\| \sum_k \delta_k^{(i)*} \delta_k^{(i)} \Big\|^{1/2} \times$$

$$\times \max_{i,k} \|x_k^{(i)}\| \max_{i,k} \|y_k^{(i)}\| \;\Bigg|\; u_i = \sum_k \gamma_k^{(i)} \cdot x_k^{(i)} \odot y_k^{(i)} \cdot \delta_k^{(i)} \Bigg\}$$

$$\leq \Big\| \sum_i \alpha_i \alpha_i^* \Big\|^{1/2} \Big\| \sum_i \beta_i^* \beta_i \Big\|^{1/2} \max_i \alpha(u_i).$$

(ii) Soit $u_k \in M_n(X \otimes Y)$ une suite approximante pour u telle que $\|u - u_k\|_{\wedge,n} < \frac{\varepsilon}{2^{k+3}}$ et soit

$$u_1 = \sum_{i=1}^{i(1)} \alpha_i \cdot x_i \odot y_i \cdot \beta_i$$

une décomposition de u_1 telle que

$$\Big\| \sum_{i=1}^{i(1)} \alpha_i \alpha_i^* \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^{i(1)} \beta_i^* \beta_i \Big\| \leq \|u_1\|_{\wedge,n} + \frac{\varepsilon}{2^4}.$$

Comme

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{\wedge,n} \leq \|u - u_{k+1}\|_{\wedge,n} + \|u - u_k\|_{\wedge,n} < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$$

on peut décomposer

$$u_{k+1} - u_k = \sum_{i=i(k)+1}^{i(k+1)} \alpha_i \cdot x_i \odot y_i \cdot \beta_i$$

de sorte que

$$\Big\| \sum_{i=i(k)+1}^{i(k+1)} \alpha_i \alpha_i^* \Big\| = \Big\| \sum_{i=i(k)+1}^{i(k+1)} \beta_i^* \beta_i \Big\| < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

Alors la somme

$$u_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (u_{k+1} - u_k)$$

converge absolument vers u et on a

$$\Big\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \alpha_i^* \Big\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Big\| \sum_{i=i(k)+1}^{i(k+1)} \alpha_i \alpha_i^* \Big\| < \|u\|_{\wedge,n} + \varepsilon$$

$$\Big\| \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^* \beta_i \Big\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Big\| \sum_{i=i(k)+1}^{i(k+1)} \beta_i^* \beta_i \Big\| < \|u\|_{\wedge,n} + \varepsilon.$$

(iii) Soit $\hat{u} \in M_n\big((X/Z)\otimes_{\wedge,n}Y\big)$. Alors en utilisant ce que l'on a montré dans le paragraphe précédent on peut trouver des $\hat{x}_i \in M_n(X/Z)$, $y_i \in M_n(Y)$ et $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n$ telles que

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot \hat{x}_i \odot y_i \cdot \beta_i$$

et $\|\hat{x}_i\|_n < 1$, $\|y_i\|_n \leq 1$, ainsi que $\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\|^{1/2} \, \|\sum \beta_i^*\beta_i\|^{1/2} \leq \|\hat{u}\|_{\wedge,n} + \varepsilon$. Ensuite il existe des $x_i \in M_n(X)$ telles que $q_n(x_i) = \hat{x}_i$ et $\|x_i\|_n < 1$. Posons

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot x_i \odot y_i \cdot \beta_i;$$

alors $u \in M_n(X\otimes_{\wedge,n}Y)$ puisque la suite converge absolument pour la norme $\| \ \|_{\wedge,n}$ (ainsi que pour toute norme raisonnable) comme conséquence de (I.5.5a) et $(q\otimes id)_n(u) = \hat{u}$ avec

$$\|u\|_{\wedge,n} \leq \Big\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\Big\|^{1/2} \Big\|\sum \beta_i^*\beta_i\Big\|^{1/2} \leq \|\hat{u}\|_{\wedge,n} + \varepsilon.$$

□

Comme pour les espaces de Banach, le dual du produit tensoriel projectif est l'espace des fonctions bilinéaires continues :

Proposition I.5.10. *On a l'identité isométrique*

$$Bil_n(X \times Y; Z) = B_n(X\otimes_{\wedge,n}Y, Z); \tag{I.5.12}$$

en particulier,

$$M_n((X\otimes_{\wedge,n}Y)^*) = Bil_n(X \times Y; \boldsymbol{M}_n) \tag{I.5.13}$$

isométriquement.

Démonstration. Notons $\hat{\psi}$ l'application linéaire de $X\otimes Y$ dans Z correspondante à $\psi \in Bil(X,Y;Z)$. Soit $u \in M_n(X\otimes Y)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des matrices $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n$ et des matrices $x_i \in M_n(X)$, $y_i \in M_n(Y)$ telles que

$$u = \sum \alpha_i \cdot x_i \odot y_i \cdot \beta_i$$

et d'autre part,

$$\Big\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\Big\| < \|u\|_{\wedge,n} + \varepsilon \qquad \Big\|\sum \beta_i^*\beta_i\Big\| < \|u\|_{\wedge,n} + \varepsilon$$
$$\|x_i\|_n \leq 1 \qquad \|y_i\|_n \leq 1.$$

On a donc

$$\|\hat{\psi}_n(u)\|_{M_n(Z)} = \Big\|\sum \psi_n(\alpha_i \cdot x_i, y_i \cdot \beta_i)\Big\|_{M_n(Z)} \leq \|\psi\|_{Bil_n} (\|u\|_{\wedge,n} + \varepsilon),$$

i.e. $\|\hat{\psi}_n\| \leq \|\psi_n\|$; l'inégalité inverse est aussi immédiate. □

I.6. Théorie locale des M_n-espaces et des espaces d'opérateurs

Dans cette section on va rappeler quelques notions de la théorie locale des espaces d'opérateurs qui a comme objet la description des espaces d'opérateurs et des M_n-espaces par leurs sous-espaces de dimension finie. On va donc établir des outils pour calculer les distances de Banach-Mazur entre les espaces «classiques» de la section I.7.
Rappelons d'abord une estimation facile (pourtant optimale, on a égalité pour l'application de transposition des matrices, cf. **[59]**).

Lemme I.6.1. *Soient X, Y des M_n-espaces et soit $u : X \to Y$ une application bornée. Alors u est n-bornée avec*

$$\|u\|_n \leq n\,\|u\|$$

Démonstration. Notons d'abord que l'on peut estimer la norme d'une matrice d'opérateurs $[y_{ij}] \in M_n(B(H))$ par une sorte de norme de Frobenius comme suit. On a pour toute suite $\xi_i, \eta_i \in H$

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{ij}\langle y_{ij}\xi_j, \eta_i\rangle\Big| &\leq \sum_{ij}\|y_{ij}\|\,\|\xi_i\|\,\|\eta_j\| \\ &\leq \Big(\sum_{ij}\|y_{ij}\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j}\|\xi_j\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i}\|\eta_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

d'où

$$\big\|[y_{ij}]\big\|_n \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n}\|y_{ij}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq n\,\big\|[y_{ij}]\big\|_n$$

comme conséquence de $(\mathrm{R1})_n'$. Soit $x = [x_{ij}] \in M_n(X)$, alors

$$\begin{aligned}\|u_n(x)\|_{M_n(Y)} = \big\|[u(x_{ij})]\big\|_{M_n(Y)} \leq \Big(\sum\|u(x_{ij})\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \|u\|\,\Big(\sum\|x_{ij}\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq n\,\|u\|\,\|x\|_{M_n(X)}\end{aligned}$$

□

Ensuite rappelons quelques idées de C. Zhang (cf. [**61**]) que l'on peut facilement adapter à notre situation. Pour ceci on a besoin de la notion d'*homogénéité* introduite dans [**50**, §1]

Définition I.6.2. Un espace d'opérateurs X est dit *n-homogène* si toute application n-bornée $u : X \to X$ est complètement bornée avec $\|u\|_{cb} = \|u\|_n$. L'espace X est dit *homogène* s'il est 1-homogène.

Remarque I.6.3. Évidemment, un espace n-homogène est aussi k-homogène pour tout $k \geq n$. Par exemple, les propositions I.3.4 et I.3.6 impliquent que pour un M_n-espace $(X, \|\ \|_n)$ les structures $MIN(X, \|\ \|_n)$ et $MAX(X, \|\ \|_n)$ sont n-homogènes. De plus, si $(X, \{\|\ \|_k\})$ est un espace d'opérateurs n-homogène, alors pour tout $k \geq n$ les espaces $MIN(X, \|\ \|_k)$ et $MAX(X, \|\ \|_k)$ sont n-homogènes aussi. En effet, soit $u : MIN(X, \|\ \|_k) \to MIN(X, \|\ \|_k)$ une application n-bornée. Alors comme $MIN(X, \|\ \|_k)$ est k-homogène, on a

$$\begin{aligned}\big\|u : MIN(X, \|\ \|_k) \to MIN(X, \|\ \|_k)\big\|_{cb} &= \big\|u : MIN(X, \|\ \|_k) \to MIN(X, \|\ \|_k)\big\|_k \\ &= \|u : X \to X\|_k \\ &= \|u : X \to X\|_n \\ &= \big\|u : MIN(X, \|\ \|_k) \to MIN(X, \|\ \|_k)\big\|_n.\end{aligned}$$

Proposition I.6.4 ([**61**, Proposition 2.1])**.** *Soit $(X, \|\ \|_n)$ un M_n-espace avec deux structures d'espace d'opérateurs compatibles $X' = (X, \{\|\ \|_k'\})$ et $X'' = (X, \{\|\ \|_k''\})$ dont X' est n-homogène et dominée par X'' de sorte que l'on a pour tout entier positif k et pour tout $x \in M_k(X)$*

$$\|x\|_k' \leq \|x\|_k''. \tag{I.6.1}$$

Alors on a pour tout k

$$d_k(X', X'') = \|i_X : X' \to X''\|_k \tag{I.6.2a}$$

et par conséquent

$$d_{cb}(X', X'') = \|i_X : X' \to X''\|_{cb} \tag{I.6.2b}$$

DÉMONSTRATION. La condition (I.6.1) ne dit rien d'autre que $\|i_X^{-1} : X'' \to X'\|_k \le 1$ pour tout k, d'où l'inégalité $d_k(X', X'') \le \|i_X\|_k$. L'inégalité inverse est bien claire aussi pour $k \le n$. Pour $k > n$, notons que $i_X : X' \to X''$ est une n-isométrie et que l'on a, par la n-homogénité de X', pour tout isomorphisme linéaire $T : X' \to X''$,

$$\|T^{-1} i_X : X' \to X'\|_k = \|T^{-1} i_X : X' \to X'\|_n = \|T^{-1} : X'' \to X'\|_n;$$

ensuite,

$$\|i_X\|_k \le \|T\|_k \, \|T^{-1} i_X\|_k \le \|T\|_k \, \|T^{-1}\|_n$$

d'où la conclusion. □

Ceci donne une nouvelle interprétation de la constante de Paulsen (cf. Définition I.3.11).

Corollaire I.6.5. *Soit $(X, \| \, \|_n)$ un M_n-espace.*

(i) $\alpha(X, \| \, \|_n) = d_{cb}\big(MIN(X, \| \, \|_n), MAX(X, \| \, \|_n)\big)$

(ii) Soit X' une structure d'espace d'opérateurs sur X compatible avec $\| \, \|_n$. Alors

$$d_{cb}\big(X', MIN(X, \| \, \|_n)\big) = \|i_X : MIN(X) \to X'\|_{cb} \le \alpha(X, \| \, \|_n)$$

et

$$d_{cb}\big(X', MAX(X, \| \, \|_n)\big) = \|i_X : X' \to MAX(X)\|_{cb} \le \alpha(X, \| \, \|_n)$$

Remarque I.6.6. La démonstration de la proposition I.6.4 montre en fait l'énoncé suivant. Soit $(X, \| \, \|_n)$ un M_n-espace et soient X', X'' deux structures d'espaces d'opérateurs compatibles sur X dont X'' soit n-homogène. Alors pour toute paire de n-isométries $u, v : X' \to X''$ on a $\|u\|_k = \|v\|_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Si les espaces en considération sont en plus hilbertiens on peut se débarrasser de la condition de majorisation. Rappelons d'abord qu'un espace d'opérateurs H est dit *hilbertien*, s'il est hilbertien autant qu'espace de Banach.

Remarque I.6.7. Soit H un espace d'opérateurs hilbertien homogène, alors toute paire de sous-espaces de la même dimension est complètement isométrique. On peut donc parler du sous-espace n-dimensionnel $H_n \subseteq H$. Par le théorème de Russo-Dye un espace d'opérateurs hilbertien H est homogène si et seulement si tout opérateur unitaire $u : H \to H$ est complètement contractant.

Proposition I.6.8 ([**61**, Theorem 3.1])**.** *Soient H' et H'' des espaces d'opérateurs homogènes isométriques à ℓ_2, soient H'_n et H''_n leurs sous-espaces de dimension n et soient $i_H : H' \to H''$ et $i_n : H'_n \to H''_n$ les applications identités de ℓ_2 et ℓ_2^n respectivement. Alors pour on a pour $1 \le k \le \infty$*

$$d_k(H'_n, H''_n) = \|i_n\|_k \, \|i_n^{-1}\|_k$$

et

$$d_k(H', H'') = \|i_H\|_k \, \|i_H^{-1}\|_k = \sup_n \|i_n\|_k \, \|i_n^{-1}\|_k.$$

Définition I.6.9 ([**48**])**.** Soit $\mathcal{K}$ l'espace des opérateurs compacts sur ℓ_2 et soit X un espace d'opérateurs de dimension finie. Notons

$$\delta_k(X) = \inf \{ d_{cb}(X,Y) \mid Y \subseteq C(K; \boldsymbol{M}_k),\ K \text{ compact} \}$$

et posons

$$\begin{aligned} d_{S\mathcal{K}}(X) &= \inf \{ d_{cb}(X,Y) \mid Y \subseteq \mathcal{K} \} \\ &= \inf \{ d_{cb}(X,Y) \mid Y \subseteq \boldsymbol{M}_n,\ n \in \mathbf{N} \} \\ &= \inf_k \delta_k(X) \\ &= \inf_{k\to\infty} \delta_k(X) \end{aligned}$$

Pour un espace d'opérateurs X de dimension infinie on définit $d_{S\mathcal{K}}(X) = \sup d_{S\mathcal{K}}(X')$ où le sup porte sur tous les sous-espaces X' de dimension finie de X et on dit que X est *exact* si ce supremum est fini.

En termes de M_n-espaces on a une description alternative de ces nombres.

Proposition I.6.10. *Soit* $(X, \{\| \ \|_k\})$ *un espace d'opérateurs de dimension finie. Alors on a les identités*

$$\delta_k(X) = d_{cb}\big(X, MIN(X, \| \ \|_k)\big) \tag{I.6.3}$$

et par conséquent

$$d_{S\mathcal{K}}(X) = \inf_k d_{cb}\big(X, MIN(X, \| \ \|_k)\big) \tag{I.6.4}$$

$$= \inf_k \big\| id : MIN(X, \| \ \|_k) \to X \big\|_{cb} \tag{I.6.5}$$

Démonstration. L'inégalité $\delta_k(X) \le d_{cb}\big(X, MIN(X, \| \ \|_k)\big)$ est clair par la proposition I.3.4. Pour l'inverse on utilise la remarque I.3.5 qui implique que

$$\big\| id : MIN(X, \| \ \|_k) \to X \big\|_{cb} \le \delta_k(X) \big\| id : MIN(X, \| \ \|_k) \to X \big\|_k = \delta_k(X);$$

ensuite la proposition I.3.4 entraîne que

$$\big\| id : X \to MIN(X, \| \ \|_k) \big\|_{cb} = \big\| id : X \to MIN(X, \| \ \|_k) \big\|_k = 1$$

d'où la conclusion. □

I.7. Exemples

I.7.1. $\boldsymbol{M_n}$ et ses sous-espaces. Les algèbres d'opérateurs et leurs sous-espaces sont des exemples naturels de M_n-espaces, dont $\boldsymbol{M}_n$ et ses sous-espaces paraissent particulièrement intéressants, cf. la remarque I.1.8. $\boldsymbol{M}_n$ ayant la structure minimale pour la n-norme, entraîne sur son dual S_1^n la structure $MAX(S_1^n, \| \ \|_n^*)$ comme structure duale standard. Parmi les sous-espaces de $\boldsymbol{M}_n$ figurent ℓ_∞^n et les espaces hilbertiens R_n et C_n, qui ont comme base $\{ e_{1i} \mid i = 1, \dots, n \}$ et $\{ e_{i1} \mid i = 1, \dots, n \}$ respectivement. Les normes matricielles sont donc données par

$$\Big\| \sum \alpha_i \otimes e_{1i} \Big\|_{M_k(R_n)} = \Big\| \sum \alpha_i \alpha_i^* \Big\|_{\boldsymbol{M}_k}^{1/2} \quad \text{et} \quad \Big\| \sum \alpha_i \otimes e_{i1} \Big\|_{M_k(C_n)} = \Big\| \sum \alpha_i^* \alpha_i \Big\|_{\boldsymbol{M}_k}^{1/2}$$

respectivement. Notons que R_n et C_n sont en dualité complètement isométriquement et qu'ils sont homogènes, cf. [**4**, Proposition 2.2] ou [**21**, Corollary 4.2]. On va étudier également les versions de dimension infinie de ces espaces, notées R et C respectivement.

La structure d'espace d'opérateurs sur $\boldsymbol{M}_n$ pourtant n'est pas déterminée par la M_n-structure, i.e. $MAX(\boldsymbol{M}_n, \|\ \|_n)$ est différent de $\boldsymbol{M}_n = MIN(\boldsymbol{M}_n, \|\ \|_n)$. Ceci est une conséquence de la proposition suivante, qui montre que même $\alpha(\ell_\infty^n, \|\ \|_k) > 1$ pour tout $k \geq 3$. Pour cela rappelons que $MAX(\ell_1^n) = \ell_\infty^{n\,*}$ a une réalisation concrète comme le sous-espace E_1^n de la C^*-algèbre pleine du groupe libre $\mathbf{F}_n$ engendré par $\{\, U_i = \pi_u(g_i) \mid i = 1, \dots n \,\}$, où π_u est la représentation universelle du groupe libre et $g_1, g_2, \dots, g_n$ sont ses générateurs. Alors pour ces espaces on a les minorations suivantes (voir aussi la proposition I.7.21), qui résultent des corollaires I.3.12 et I.6.5.

Proposition I.7.1 ([**28**, Example 3.3.1.3], [**48**, Theorem 7])**.**

(i) Il existe une constante positive C_1 telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a

$$\alpha(\boldsymbol{M}_n, \|\ \|_k) \geq d_{S\mathcal{K}}(S_1^n) \geq C_1\, n.$$

(ii) Pour tout $n \geq 2$ on a

$$\alpha(\ell_\infty^n, \|\ \|_k) \geq d_{S\mathcal{K}}(E_1^n) \geq \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Remarque I.7.2. Notons que l'on peut interpréter ce nombre de la manière suivante :

$$\alpha(E_1^n, \|\ \|_k) = \sup \left\{ \frac{\left\| \sum_{i=1}^n a_i \otimes U_i \right\|}{\left\| \sum_{i=1}^n a_i \otimes U_i^{(k)} \right\|} \mid a_i \in B(H) \right\},$$

où $U_i^{(k)}$ sont les images des générateurs du groupe libre $\mathbf{F}_n$ par la représentation $\pi_u^{(k)} = \oplus\{\, \pi \mid \pi : \mathbf{F}_n \to \boldsymbol{M}_k \text{ unitaire} \,\}$, puisque $(E_1^n, \|\ \|_k)$ étant le dual de $(\ell_\infty^n, \|\ \|_k)$ est la structure MAX pour tout k et dans ce cas le théorème de Russo-Dye permet d'écrire la formule (I.3.1) de manière

$$\left\| \sum a_i \otimes e_i \right\|_{B(H) \otimes_{\min} MIN(E_1^n, \|\ \|_k)} = \sup \left\{ \left\| \sum a_i \otimes u_i \right\| \mid u_i \in \boldsymbol{M}_k \text{ unitaires} \right\}.$$

V. Paulsen [**41**, Corollary 3.4] a estimé $\alpha(\ell_\infty^n) = \alpha(\ell_1^n) \leq \sqrt{n-1}$ et on a donc $\alpha(\ell_\infty^n, \|\ \|_k) \approx \sqrt{n}$ indépendemment de k.

Plus généralement, la proposition suivante, corollaire simple de la proposition I.6.10 et du corollaire I.3.12, restreint la classe des espaces d'opérateurs $(X, \{\|\ \|_k\})$ dont la structure MIN et la structure MAX coïncident pour un certain entier k.

Proposition I.7.3. *Soit $(X, \{\|\ \|_k\})$ un espace d'opérateurs pour lequel $\alpha(X, \|\ \|_n) = 1$ pour un certain n. Alors $d_{S\mathcal{K}}(X) = d_{S\mathcal{K}}(X^*) = 1$.*

Remarque I.7.4. Les seuls exemples connus avec cette propriété sont $\ell_1^2, \ell_\infty^2, R_n, C_n, R$ et C. En effet, on a $\alpha(\ell_\infty^2) = \alpha(\ell_1^2) = 1$ [**40**] et $\alpha(R_n, \|\ \|_n) = \alpha(C_n, \|\ \|_n) = 1$, puisque d'un coté $R_n = MIN(R_n, \|\ \|_n)$ (cf. la proposition I.3.4), et d'un autre coté, R_n étant le dual de $C_n = MIN(C_n, \|\ \|_n)$, on a aussi $R_n = MAX(R_n, \|\ \|_n)$ (cf. corollaire I.3.10) ; voir (I.7.6) pour une estimation de $\alpha(R_n, \|\ \|_k)$.

Remarque I.7.5. Il est bien connu qu'un espace de Banach X dont tous les sous-espaces de dimension 2 sont isométriquement hilbertiens est lui-même hilbertien. La remarque I.6.7 soulève la question de savoir si les espaces d'opérateurs hilbertiens homogènes ont une propriété analogue. Dans [**61**], C. Zhang a montré que ce n'est pas le cas en exhibant pour tout entier n des exemples d'espaces d'opérateurs hilbertiens H',

H'' homogènes non-isomorphes qui ont les mêmes sous-espaces de dimension n. Le fait que la structure d'espace d'opérateurs sur R_n est déterminée par la M_n-structure fournit un autre exemple. En effet, $MIN(R, \| \|_n)$ et $MAX(R, \| \|_n)$ coïncident sur leurs sous-espaces de dimension inférieure à n, mais ils ne sont pas complètement isomorphes, car $MAX(R, \| \|_n)$ n'est pas exact (cf. proposition I.7.21).

I.7.2. L'espace hilbertien M_nH. On note $M_nH(I)$ le M_n-espace sous-jacent à l'espace d'opérateurs $OH(I)$ de [**50**]. Rappelons-en quelques propriétés.

Proposition I.7.6 ([**50**, Theorem 1.1])**.** *Pour tout ensemble d'indices I il y a un M_n-espace unique $M_nH(I)$ qui vérifie les propriétés suivantes.*

(i) $M_nH(I) = \ell_2(I)$ isométriquement.

(ii) L'identification canonique entre $M_nH(I)$ et $\overline{M_nH(I)^*}$ est une n-isométrie.

En plus, si l'on note $\{\theta_i\}$ la base canonique de $\ell_2(I)$, la n-norme sur $M_nH(I)$ est donnée par

$$\Big\|\sum \alpha_i \otimes \theta_i\Big\|_{M_n(M_nH(I))} = \Big\|\sum \alpha_i \otimes \overline{\alpha_i}\Big\|^{1/2}_{\boldsymbol{M_n}\otimes\overline{\boldsymbol{M_n}}}. \tag{I.7.1}$$

On notera $M_nH = M_nH(\mathbf{N})$ et $M_nH_m = M_nH(\{1, \dots, m\})$.

Remarque I.7.7. La formule (I.7.1) pour la n-norme sur $M_nH(I)$ entraîne que

$$\Big\|\sum \alpha_i \otimes \theta_i\Big\|_{M_n(M_nH(I))} = \Big\|\sum \overline{\alpha_i} \otimes \theta_i\Big\|_{M_n(M_nH(I))} = \Big\|\sum \alpha_i \otimes \overline{\theta_i}\Big\|_{M_n(\overline{M_nH(I)})}.$$

Proposition I.7.8 ([**50**, Proposition 1.4])**.** *Soit X un M_n-espace et soit $u : M_nH(I) \to X$ une application n-bornée avec $u(\theta_i) = x_i$. Alors*

$$\|u\|_n = \sup_{J \subseteq I \text{ fini}} \sup \left\{ \Big\|\sum_{i\in J} \langle f, x_i\rangle \otimes \overline{\langle f, x_i\rangle}\Big\|^{1/2}_{\boldsymbol{M_n}\otimes\overline{\boldsymbol{M_n}}} \mid f \in M_n(X^*), \|f\|^*_n \le 1 \right\}$$

Démonstration. Avec l'identification anti-isométrique $M_nH(I)^* = \overline{M_nH(I)}$ on a $u(h) = \sum \langle \overline{\theta_i}, h\rangle x_i$. Supposons d'abord que u soit de rang fini, alors les remarques I.1.15 et I.7.7 entraînent

$$\begin{aligned}\|u\|_n &= \sup \left\{ \Big\|\sum \overline{\theta_i} \otimes \langle f, x_i\rangle\Big\|_{M_n(\overline{M_nH(I)^*})} \mid \|f\|^*_n \le 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \Big\|\sum \langle f, x_i\rangle \otimes \overline{\langle f, x_i\rangle}\Big\|^{1/2}_{\boldsymbol{M_n}\otimes\overline{\boldsymbol{M_n}}} \mid \|f\|^*_n \le 1 \right\}.\end{aligned}$$

Dans le cas général, on note que $\|u\|_n = \sup\{ \|uP_J\|_n \mid J \subseteq I \text{ fini} \}$, où P_J désigne la projection orthogonale de $\ell_2(I)$ sur $\ell_2(J)$. □

Proposition I.7.9 ([**50**, Corollary 2.4, Proposition 7.2])**.** *Soit X un M_n-espace avec un plongement borné injectif $v : M_nH \to X$ à image dense et tel que l'application $v\overline{v^*} : \overline{X^*} \to X$ est injective et à image dense aussi. Alors $(\overline{X^*}, X)$ est un couple compatible inclus dans X et on a*

$$M_nH = (\overline{X^*}, X)_{\frac{1}{2}}$$

n-isométriquement. Soit H_n un espace d'opérateurs homogène isométrique à ℓ_2^n. Alors on a

$$d_k(H_n, \overline{H_n^*}) = d_k(H_n, OH_n)^2. \tag{I.7.2}$$

Le corollaire I.3.10 et [**50**, Corollary 2.5] impliquent immédiatement

Corollaire I.7.10. *Pour tout ensemble d'indices I et pour tout entier positif n on a*

$$\big(MIN(M_nH(I)), MAX(M_nH(I))\big)_{\frac{1}{2}} = OH(I)$$

n-isométriquement.

I.7.3. Comparaisons. Dans ce paragraphe on va donner quelques estimations des k-distances entre les espaces hilbertiens «classiques». Notons que par la k-homogénéité des structures MIN et MAX la k-distance $d_k(X,Y)$ entre les M_n-espaces X et Y n'est rien d'autre que la distance complètement bornée $d_{cb}\big(MIN(X,\|\ \|_k), MIN(Y,\|\ \|_k)\big) = d_{cb}\big(MAX(X,\|\ \|_k), MAX(Y,\|\ \|_k)\big)$. Dans ce qui suit on va constamment (et sans référence) utiliser la proposition I.6.8.

Proposition I.7.11.

$$d_k(R_n, C_n) = \min\{k,n\} \qquad d_k(R,C) = k \tag{I.7.3a}$$

$$d_k(R_n, OH_n) = \sqrt{\min\{k,n\}} \qquad d_k(R,OH) = \sqrt{k} \tag{I.7.3b}$$

$$d_k(C_n, OH_n) = \sqrt{\min\{k,n\}} \qquad d_k(C,OH) = \sqrt{k} \tag{I.7.3c}$$

Démonstration. Il est bien connu que $d_{cb}(R_k, C_k) = d_k(R_k, C_k) = k$ et on a donc pour $k \le n$ la minoration $d_k(R,C) \ge d_k(R_n,C_n) \ge d_k(R_k,C_k) = k$. Pour montrer l'inégalité inverse, notons que

$$\|id : R \to C\|_k = \sup\left\{ \left\|\sum \alpha_i^*\alpha_i\right\|^{1/2} \mid \alpha_i \in \boldsymbol{M}_k, \left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|^{1/2} \le 1 \right\}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\left\|\sum \alpha_i^*\alpha_i\right\|^{1/2} &\le \left[\operatorname{tr}\left(\sum \alpha_i^*\alpha_i\right)\right]^{1/2}\\ &= \left[\operatorname{tr}\left(\sum \alpha_i\alpha_i^*\right)\right]^{1/2}\\ &\le \left(k\left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|\right)^{1/2}\end{aligned}$$

et on a donc $d_k(R,C) \le \|id : R \to C\|_k^2 \le k$, d'où (I.7.3a). Les formules (I.7.3b) et (I.7.3c) en résultent comme conséquence de la proposition I.7.9. $\square$

Proposition I.7.12.

$$d_k(OH_n, R_n \cap C_n) = \|id : OH_n \to R_n \cap C_n\|_k = (\min\{k,n\})^{1/4}$$

Démonstration. La formule pour la dualité (I.1.3) implique que $\|id : R_n \cap C_n \to OH_n\|_k = 1$. Pour estimer

$$\|OH_n \to R_n \cap C_n\|_k = \sup\max\left\{ \left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|_{\boldsymbol{M}_k}^{1/2}, \left\|\sum \alpha_i^*\alpha_i\right\|_{\boldsymbol{M}_k}^{1/2} \right\}$$

où le supremum porte sur les matrices $\alpha_i \in \boldsymbol{M}_k$ dont la norme OH vérifie

$$\left\|\sum \alpha_i \otimes \overline{\alpha_i}\right\|_{\boldsymbol{M}_k \otimes \overline{\boldsymbol{M}_k}}^{1/2} \le 1,$$

on fait appel à la formule (I.1.3) encore une fois :

$$\left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|^{1/2} = \sup\left\{ \left\|\sum \alpha_i \otimes \overline{\beta_i}\right\| \mid \left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\|^{1/2} \le 1 \right\};$$

ensuite en appliquant l'inégalité (I.1.3) on obtient par le même argument que dans la démonstration précédente

$$\begin{aligned}\left\|\sum \alpha_i \otimes \overline{\beta_i}\right\| &\leq \left\|\sum \alpha_i \otimes \overline{\alpha_i}\right\|^{1/2} \left\|\sum \beta_i \otimes \overline{\beta_i}\right\|^{1/2} \\ &\leq \left\|\sum \alpha_i \otimes \overline{\alpha_i}\right\|^{1/2} \left\|\sum \beta_i \beta_i^*\right\|^{1/4} \left\|\sum \beta_i^* \beta_i\right\|^{1/4} \\ &\leq \left\|\sum \alpha_i \otimes \overline{\alpha_i}\right\|^{1/2} \sqrt[4]{k} \left\|\sum \beta_i^* \beta_i\right\|^{1/2}\end{aligned}$$

et de façon analogue on montre que $\|\sum a_i^* a_i\|^{1/2} \leq \sqrt[4]{k}$, d'où la conclusion. □

Proposition I.7.13.

(I.7.4a) $$d_k\big(MIN(\ell_2^n), MAX(\ell_2^n)\big) = \|Id : MIN(\ell_2^n) \to MAX(\ell_2^n)\|_k \approx \min\{k, n\}$$

(I.7.4b) $$d_k\big(MIN(\ell_2^n), OH_n\big) = d_k\big(MAX(\ell_2^n), OH_n\big) \approx \sqrt{\min\{k, n\}}$$

Démonstration. Notons $\tau_n = \frac{1}{n}\mathrm{tr}$ la trace normalisée de $\boldsymbol{M}_n$. Un résultat de M. Junge [**28**, Lemma 4.3.1] dit qu'il existe une constante universelle C telle que pour tout entier n il existe des matrices $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \in \boldsymbol{M}_n$ orthonormales dans $L^2(\boldsymbol{M}_n, \tau_n)$ avec la propriété supplémentaire que pour toute suite de scalaires λ_i on a aussi en norme d'opérateurs

$$\left\|\sum \lambda_i \, \delta_i\right\| \leq C \left(\sum |\lambda_i|^2\right)^{1/2}.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}\|id : MIN(\ell_2^n) \to OH_n\|_n = \sup &\left\{ \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes \overline{\alpha_i}\right\|^{1/2}_{\boldsymbol{M}_n \otimes \overline{\boldsymbol{M}_n}} \;\middle|\; \right. \\ &\left. \alpha_i \in \boldsymbol{M}_n, \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i \, \alpha_i\right\|_{\boldsymbol{M}_n} \leq \left(\sum |\lambda_i|^2\right)^{1/2} \text{ pour } \lambda_i \in \mathbf{C} \right\} \\ &\geq \frac{1}{C}\left\|\sum_{i=1}^n \delta_i \otimes \overline{\delta_i}\right\|^{1/2}_{\boldsymbol{M}_n \otimes \overline{\boldsymbol{M}_n}} \\ &\geq \frac{1}{C}\left(\sum_{i=1}^n \tau_n(\delta_i \delta_i^*)\right)^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{C}.\end{aligned}$$

On a donc par la proposition I.7.9 et le lemme I.6.1 pour $k \leq n$

$$\frac{k}{C^2} \leq \|MIN(\ell_2^k) \to MAX(\ell_2^k)\|_k \leq \|MIN(\ell_2^n) \to MAX(\ell_2^n)\|_k \leq k$$

d'où (I.7.4a) ; pour l'autre formule (I.7.4b) il suffit de rappeler (I.7.2).

□

Dans le reste de ce paragraphe on va estimer le paramètre α de Paulsen pour les M_n-espaces hilbertiens homogènes OH_n, R_n, C_n, $R_n \cap C_n$, $MIN(\ell_2^n)$ et $MAX(\ell_2^n)$.

Lemme I.7.14. *Soit e_i la base canonique de ℓ_2^n et soit $(H_n, \|\ \|_k)$ une M_n-structure homogène sur ℓ_2^n. Alors on a l'inégalité*

$$\alpha(H_n, \|\ \|_k) \leq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \left\|\sum_{i=1}^k e_{1i} \otimes e_i\right\|_{M_k(H_n)} \left\|\sum_{i=1}^k e_{i1} \otimes e_i\right\|_{M_k(H_n^*)}$$

où $\lceil t \rceil$ est le plus petit nombre entier supérieur au nombre réel positif t.

DÉMONSTRATION. On applique la proposition I.3.13 au couple (H_n, H_n^*) et on obtient

$$\alpha(H_n, \| \|_k) = \sup \left\| \sum a_i \otimes b_i \right\|$$

où le supremum porte sur les n-uplets $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ dans $B(H)$ qui satisfont

$$\text{(I.7.5)} \quad \left\| \sum a_i \otimes \alpha_i \right\| \leq \left\| \sum \alpha_i \otimes e_i \right\|_{M_k(H_n)}^{1/2} \quad \text{et} \quad \left\| \sum b_i \otimes \beta_i \right\| \leq \left\| \sum \beta_i \otimes e_i \right\|_{M_k(H_n^*)}^{1/2}$$

pour toutes n-uplets $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ dans $\boldsymbol{M}_k$. Alors en rajoutant $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{\lceil \frac{n}{k} \rceil} = 0$ on a

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \right\| &\leq \sum_{j=1}^{\lceil \frac{n}{k} \rceil} \left\| \sum_{i=1}^{k} a_{jk+i} \otimes b_{jk+i} \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\lceil \frac{n}{k} \rceil} \left\| \sum_{i=1}^{k} a_{jk+i} \otimes e_{i1} \right\| \left\| \sum_{i=1}^{k} b_{jk+i} \otimes e_{1i} \right\| && \text{par (I.1.3)} \\
&\leq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \left\| \sum e_{i1} \otimes e_i \right\|_{M_k(H_n)}^{1/2} \left\| \sum e_{1i} \otimes e_i \right\|_{M_k(H_n^*)}^{1/2} && \text{par (I.7.5)}
\end{aligned}$$

puisque les e_{ij} qui apparaissent sont dans $\boldsymbol{M}_k$. □

Proposition I.7.15. *Pour tout $k \leq n$*

$$\text{(I.7.6)} \quad \alpha(R_n, \| \|_k) = \alpha(C_n, \| \|_k) \leq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$$

$$\text{(I.7.7)} \quad \alpha(R_n + C_n, \| \|_k) = \alpha(R_n \cap C_n, \| \|_k) \leq \min \left\{ \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \sqrt{k}, \sqrt{n} \right\}$$

$$\text{(I.7.8)} \quad \alpha(OH_n, \| \|_k) = \delta_k(OH_n)^2 \leq \min \left\{ \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \sqrt{k}, \sqrt{n} \right\}$$

$$\text{(I.7.9)} \quad \alpha(MIN(\ell_2^n, \| \|_k) = \alpha(MAX(\ell_2^n, \| \|_k) \leq \min \left\{ \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \sqrt{k}, \sqrt{n} \right\}$$

Remarque I.7.16. En vue des inégalités

$$\delta_n(R_n) = \delta_n(C_n) = 1 \qquad \text{cf. remarque I.7.4}$$

$$\delta_k(OH_n) \geq d_{S\mathcal{K}}(OH_n) \geq \sqrt{\frac{n}{2\sqrt{n-1}}} \geq \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2}} \qquad [\textbf{48}, \text{Corollary 10}]$$

$$d_{S\mathcal{K}}\big(MAX(\ell_2^n)\big) \geq \frac{\sqrt{n}}{4} \qquad [\textbf{29}, \text{Theorem 3.2}]$$

les estimations (I.7.6), (I.7.8) et (I.7.9) sont optimales pour $k \geq n$.

DÉMONSTRATION. Ces inégalités résultent du lemme précédent et des calculs suivants. Pour (I.7.6) on observe que

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} e_{1i} \otimes e_i \right\|_{M_k(C_n)} = \left\| \sum_{i=1}^{k} e_{i1} \otimes e_i \right\|_{M_k(R_n)} = 1.$$

Pour voir (I.7.7), on note que

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} e_{1i} \otimes e_i \right\|_{M_k(R_n \cap C_n)} = \sqrt{k} \qquad \text{et} \qquad \left\| \sum_{i=1}^{k} e_{i1} \otimes e_i \right\|_{M_k(R_n + C_n)} = 1;$$

l'inégalité pour l'espace d'opérateurs de Hilbert vient de

$$\Big\|\sum_{i=1}^{k} e_{1i}\otimes e_i\Big\|_{M_k(OH_n)} = \Big\|\sum_{i=1}^{k} e_{i1}\otimes e_i\Big\|_{M_k(OH_n)} = k^{1/4}$$

Enfin, pour MIN et MAX on a d'une part

$$\Big\|\sum_{i=1}^{k} e_{i1}\otimes e_i\Big\|_{M_k(MIN(\ell_2^n))} = 1$$

et d'autre part par dualité

$$\Big\|\sum_{i=1}^{k} e_{1i}\otimes e_i\Big\|_{M_k(MAX(\ell_2^n))} = \sup\left\{\Big\|\sum_{i=1}^{k} e_{1i}\otimes a_i\Big\| \;\Big|\; \Big\|\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\, a_i\Big\| \leq \Big(\sum_{i=1}^{k}|\lambda_i|^2\Big)^{1/2}\right\}$$

que l'on peut estimer comme suit.

$$\Big\|\sum_{i=1}^{k} e_{1i}\otimes a_i\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^{k} a_i a_i^*\Big\|^{1/2} \leq \Big(\sum_{i=1}^{k}\|a_i\|^2\Big)^{1/2} \leq \sqrt{k}$$

ce qui achève la démonstration. □

Proposition I.7.17 ([**28**, Lemma 3.3.3.1])**.**

$$d_k\big(MIN(\ell_2^n), R_n\cap C_n\big) = \big\|id : MIN(\ell_2^n)\to R_n\cap C_n\big\|_k = \sqrt{\min\{k,n\}}$$

et par conséquent, pour n'importe quel espace d'opérateurs X et $u : X\to R_n\cap C_n$ on a

$$\|u\|_k \leq \sqrt{\min\{k,n\}}\,\|u\| \tag{I.7.10}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\big\|id : MIN(\ell_2^n)\to C_n\big\|_k \leq \sqrt{k}$ pour $k\leq n$, l'autre inégalité en résulte par symétrie. Puis on déduit (I.7.10) de la proposition I.3.4 en utilisant la factorisation $X\to MIN(\ell_2^n)\to C_n\cap R_n$. Soit $\sum a_i\otimes e_i$ dans la boule unité de $M_k(MIN(\ell_2^n))$, i.e. tel que

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\Big\|_{\boldsymbol{M_k}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\Big)^{1/2} \tag{I.7.11}$$

pour toute suite $\lambda_i\in\mathbf{C}$. Notons que $\|\sum a_i\otimes e_i\|_{M_k(C_n)} = \sup\|\sum a_i\xi_i\|$, où le sup porte sur les suites $\xi_i\in\mathbf{C}^k$ telles que $\sum\|\xi_i\|_{\ell_2}^2\leq 1$. Soient ε_i des variables aléatoires i.i.d. de Bernoulli, c'est-à-dire $P(\varepsilon_i=+1)=P(\varepsilon_i=-1)=\frac{1}{2}$. Alors pour $\xi_i=(\xi_i^j)\in\mathbf{C}^k$ fixe on a

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum a_i\xi_i\Big\|_{\ell_2}^2 &= \Big\|\sum_{i,j} a_i\xi_i^j e_j\Big\|_{\ell_2}^2 = \Big\|\mathbf{E}\sum_{i,j,j'} a_i\xi_i^j\varepsilon_j e_{j'}\varepsilon_{j'}\Big\|^2 \\
&\leq \mathbf{E}\Big\|\sum_{i,j} a_i\xi_i^j\varepsilon_j\sum_{j'}\varepsilon_{j'}e_{j'}\Big\|_{\ell_2}^2 && \text{par convexité} \\
&\leq k\,\mathbf{E}\sum_i\Big|\sum_j\xi_i^j\varepsilon_j\Big|^2 && \text{par (I.7.11)} \\
&= k\sum_{i,j}|\xi_i^j|^2 = k\sum\|\xi_i\|_{\ell_2}^2
\end{aligned}$$

□

Pour la suite rappelons quelques notations.

Notation I.7.18 ([**29**],[**46**])**.** Soient X et Y des espaces de Banach et soit $u : X \to Y$ un opérateur linéaire. Alors u est dit 2-sommant s'il existe une constante C telle que pour toute suite finie $x_i \in X$ on a

$$\sum \|u(x_i)\|_Y^2 \leq C^2 \sup \left\{ \sum |\xi(x_i)|^2 \,\middle|\, \xi \in X^*, \|\xi\| \leq 1 \right\}$$

et on note $\pi_2(u)$ la plus petite constante. Si de plus X est muni d'une structure d'espace d'opérateurs, on notera pour une suite $x_i \in B(H)$

$$RC\big((x_i)\big) = \max \left\{ \left\|\sum x_i x_i^*\right\|, \left\|\sum x_i^* x_i\right\| \right\}$$

et $\pi_{2,RC}(u)$ sera la plus petite constante C pour laquelle on a

$$\sum \|u(x_i)\|_Y^2 \leq C^2\, RC\big((x_i)\big).$$

Il est facile à voir que $\pi_{2,RC}(u) \leq \pi_2(u)$ avec égalité quand X est muni de la structure $MIN(X)$. Pour la structure $MIN(X, \| \|_k)$ on a l'estimation suivante.

Corollaire I.7.19. *Soient* $(X, \{\| \|_k\})$ *et* Y *des espaces d'opérateurs et soit* $u : MIN(X, \| \|_k) \to Y$ *une application linéaire* $(2, RC)$*-sommante. Alors* u *est* 2*-sommante avec*

$$\pi_2(u) \leq \sqrt{k}\, \pi_{2,RC}(u).$$

Démonstration. Notons d'abord que d'après (I.3.1) pour $x_i \in X$ on a la formule

$$RC\big((x_i)\big) = \sup \left\{ RC(\langle f, x_i\rangle) \mid f \in M_k(X^*), \|f\|_k^* \leq 1 \right\}$$

qui peut être estimée comme suit. Toute suite $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans X définit une application

$$\begin{aligned} T_{\underline{x}} : X^* &\to R_k \cap C_k \\ f &\mapsto \sum \langle f, x_i\rangle\, \delta_i \end{aligned}$$

où $\delta_i = e_{1i} \oplus e_{i1}$ est la base canonique de $R_k \cap C_k$. On peut alors estimer

$$\begin{aligned} RC\big((\langle f, x_i\rangle)\big) &= \left\|T_{\underline{x}k}(f)\right\|^2_{M_k(R_n \cap C_n)} \\ &\leq k\, \|u\|^2\, (\|f\|_k^*)^2 \end{aligned}$$

en appliquant la proposition I.7.17 et l'identité

$$\|u\|^2 = \sup \left\{ \sum |\langle f, x_i\rangle|^2 \,\middle|\, f \in X^*, \|f\| \leq 1 \right\}$$

achève la démonstration. □

On aura besoin du résultat suivant.

Proposition I.7.20 ([**29**, Theorem 1.4])**.** *Soient* X, Y *des espaces d'opérateurs exacts et soit* $u : X \to Y^*$ *complètement bornée. Alors* u *est* $(2, RC)$*-sommant avec*

$$\pi_{2,RC}(u) \leq 4\, d_{S\mathcal{K}}(X)\, d_{S\mathcal{K}}(Y)\, \|u\|_{cb}$$

Avec ces outils on est prêt à montrer une généralisation de [**29**, Theorem 3.2]. Pour ceci rappelons la constante

$$d_{QS\mathcal{K}}(X) = \inf d_{cb}(X, Y)$$

où le inf porte sur tout les quotients Y des sous-espaces des opérateurs compacts $\mathcal{K}$. À part l'estimation $d_{QS\mathcal{K}}(X) \leq d_{S\mathcal{K}}(X) \leq \sqrt{\dim X}$ (cf. [**50**, Theorem 9.6]) on a la minoration suivante pour les espaces MAX.

Proposition I.7.21. *Soit $(X, \| \ \|_k)$ un M_n-espace de dimension n, alors*

$$d_{QS\mathcal{K}}\big(MAX(X, \| \ \|_k)\big) \geq \frac{\sqrt{n}}{4\sqrt{k}}.$$

Par conséquent, un espace d'opérateurs X de dimension n satisfait

$$\alpha(X, \| \ \|_k) \geq \frac{\sqrt{n}}{4\sqrt{k}}.$$

Démonstration. On peut adapter la démonstration de [**29**]. On utilise le fait que $\pi_2(I_{X^*}) = \sqrt{n}$ (cf. e.g. [**46**, Theorem 1.11]) et que l'on a donc $\pi_{2,RC}(I_{X^*}) \geq \sqrt{\frac{n}{k}}$ par le corollaire I.7.19, puisque X^* a la structure MIN.
Soit maintenant $v : X_1/X_2 \to MAX(X, \| \ \|_k)$ un isomorphisme avec $X_2 \subseteq X_1 \subseteq \mathcal{K}$. Alors on a un plongement complètement isométrique $J : \big(X_1/X_2\big)^* = X_2^{\perp} \subseteq X_1^*$ et on peut appliquer le corollaire I.7.20 à l'opérateur

$$Jv^* : MIN(X^*, \| \ \|_k) \to X_2^{\perp} \to X_1^*$$

pour obtenir

$$\pi_{2,RC}(v^*) = \pi_{2,RC}(Jv^*) \leq 4\,\|Jv^*\|_{cb} \leq 4\,\|v^*\|_{cb} = 4\,\|v\|_{cb}.$$

Ceci implique

$$\sqrt{\tfrac{n}{k}} \leq \pi_{2,RC}(I_{X^*}) \leq \|v^{*-1}\|\,\pi_{2,RC}(v^*) \leq 4\,\|v^{-1}\|\,\|v\|_{cb}$$

d'où la conclusion. □

Remarque I.7.22. L'exemple $R_n = MAX(R_n, \| \ \|_n) = MIN(R_n, \| \ \|_n)$ (cf. (I.7.6)) montre qu'à une constante près cette borne est optimale.

CHAPITRE II

Sommes d'unitaires et analyse harmonique sur le groupe libre

Introduction

Let A and B be C^*-algebras. Denote $\| \|_{\min}$ the minimal C^*-cross norm on the tensor product $A \otimes B$, i.e. if A and B are represented on Hilbert spaces $\mathcal{H}$ and $\mathcal{K}$, the minimal norm is the norm induced by the canonical embedding of $A \otimes B$ into $B(\mathcal{H} \otimes_2 \mathcal{K})$. For a complex Hilbert space $\mathcal{H}$ denote by $\overline{\mathcal{H}}$ the complex conjugate Hilbert space, i.e. the same space $\mathcal{H}$ with complex conjugate scalar multiplication. Then $\overline{B(\mathcal{H})}$ can be identified with $B(\overline{\mathcal{H}})$. In **[45]** it is proved that for any sequence of unitary operators $u_1, u_2, \dots, u_n \in B(\mathcal{H})$ the following inequality holds:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes \overline{u_i} \right\|_{\min} \geq 2\sqrt{n-1}. \tag{II.0.12}$$

In this chapter we establish more general inequalities, exploiting the combinatorial principle behind (II.0.12). A large part is also devoted to an attempt to characterize unitaries, for which there is equality.
This chapter has six sections.
In section II.1 we give some examples and motivation.
In section II.2 the concept of a family nonnegative alternating mixed moments is introduced and several norm inequalities are derived, generalizing (II.0.12).
In section II.3 we characterize unitaries for which equality holds in (II.0.12) under the additional assumption that these unitaries come from the regular representation of a discrete group. It turns out that such sets of unitaries come from subsets of groups which have the Leinert property, i.e. they are up to one element translations of free subsets.
In section II.4 we disprove the following conjectures.

Conjecture II.0.23 ([**45**])**.** Let $u_1, u_2, \dots, u_n$ be unitaries such that

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes \overline{u_i} \right\|_{\min} = 2\sqrt{n-1}.$$

Then the linear space spanned by $u_1, u_2, \dots, u_n$ in $B(H)$ is (completely) isometric to the space spanned by $\lambda(g_1), \lambda(g_2), \dots, \lambda(g_n)$ in $B(\ell_2(\mathbf{F}_n))$.

Question II.0.24 ([**55**])**.** Let $u_1, u_2, \dots, u_n$ and $v_1, v_2, \dots, v_n$ be unitary operators and let $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ be positive real numbers. Then

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, u_i \otimes v_i \right\|_{\min} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, u_i \otimes \overline{u_i} \right\|_{\min}. \tag{II.0.13}$$

In section II.5 we give estimates for the norm of subfamilies of unitaries for which equality holds in (II.0.12).
Finally, in section II.6 we give an estimate for the norm of free operators with operator coefficients, which involves a formula similar to the formula for the scalar case obtained by Akemann and Ostrand.
Our general reference for undefined terminology of C^*-algebras is [**58**].

II.1. Examples

Conjecture II.0.23 is motivated by theorem II.3.7 and conjecture II.0.24 by the following examples.

Example II.1.1. - Unitary matrices.

This is trivial because for $u_i \in M_n(\mathbf{C})$ (in fact, in any injective von Neumann algebra) and $\alpha_i \geq 0$ we have

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, u_i \otimes \overline{u_i}\right\|_{\min} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Example II.1.2. - Group representations. Let G and G' be discrete groups and denote their left regular representations by λ_G (resp. $\lambda_{G'}$). Then for any elements $t_i \in G$ and $t_i' \in G'$ and $\alpha_i \geq 0$ we have

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \lambda_G(t_i) \otimes \lambda_{G'}(t_i')\right\|_{\min} \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \lambda_G(t_i) \otimes \overline{\lambda_G(t_i)}\right\|_{\min}. \tag{II.1.1}$$

Note that the representation $\lambda_G \otimes \lambda_{G'}$ can be considered as the left regular representation $\lambda_{G\times G'}$ of the direct product of the two groups and that both G and G' are quotients of the direct product $G \times G'$. The following results prove the claim. The following proposition is an extension of [**30**, Lemma 3.1].

Proposition II.1.3. *Let G and H be discrete groups and $q : G \to H$ a group homomorphism. Then for every finite subset $\{t_1, t_2, \dots , t_m\}$ of G and corresponding nonnegative real numbers $\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_m$ the inequality*

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, \lambda_H(q(t_i))\right\|_{C^*_\lambda(H)} \geq \left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, \lambda_G(t_i)\right\|_{C^*_\lambda(G)} \tag{II.1.2}$$

holds.

Proof. We will use the following well known fact about the noncommutative L^p-norms associated to τ_G:

$$\|X\|_{C^*_\lambda(G)} = \sup_{1\leq p<\infty} (\tau_G((X^*X)^p))^{1/2p} \tag{II.1.3}$$

It suffices to consider the integer values of p. Denote by $W_p^{alt}(A)$ the set of all alternating words of length $2p$ in the letters $A = \{t_1, t_2, \dots , t_m\}$:

$$W_p^{alt}(A) = \left\{t_{i_1}^{-1} t_{j_1} t_{i_2}^{-1} t_{j_2} \cdots t_{i_p}^{-1} t_{j_p} : i_1, j_1, i_2, j_2, \dots , i_p, j_p \in \{1, 2, \dots , m\}\right\}.$$

For $v = t_{i_1}^{-1} t_{j_1} t_{i_2}^{-1} t_{j_2} \cdots t_{i_p}^{-1} t_{j_p} \in W_p^{alt}(A)$ we use the following abbreviation:

$$\alpha_v = \alpha_{i_1}\alpha_{j_1}\alpha_{i_2}\alpha_{j_2} \cdots \alpha_{i_p}\alpha_{j_p}. \tag{II.1.4}$$

Then we can write (note that we identify words in $W_p^{alt}(A)$ with the corresponding elements in the group G):

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, \lambda_H(q(t_i))\right\|_{C^*_\lambda(H)} &= \sup_p \left(\tau_H\left(\sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i\alpha_j\, \lambda_H(q(t_i^{-1}t_j))\right)^p\right)^{1/2p} = \\
&= \sup_p \left(\sum_{v\in W_p^{alt}(A)} \alpha_v\, \tau_H(\lambda_H(q(v)))\right)^{1/2p} = \sup_p \left(\sum_{\substack{v\in W_p^{alt}(A)\\ q(v)=e}} \alpha_v\right)^{1/2p} \\
&\geq \sup_p \left(\sum_{\substack{v\in W_p^{alt}(A)\\ v=e}} \alpha_v\right)^{1/2p} = \left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, \lambda_G(t_i)\right\|_{C^*_\lambda(G)}
\end{aligned}$$

□

In [**45**] the following more general statement is proved:

Proposition II.1.4. *Let H be a Hilbert space and $U_1, U_2, \dots, U_n$ a finite sequence of unitary operators acting on H. Consider the representation π of $\mathbf{F}_n$ which is determined by the condition $\pi(g_i) = U_i$ for all $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Then for every set of words $\{w_1, w_2, \dots, w_m\} \in \mathbf{F}_n$ and every sequence $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ of positive real numbers we have*

$$\Big\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \pi(w_i) \otimes \overline{\pi(w_i)} \Big\|_{\min} \geq \Big\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \lambda(w_i) \Big\|_{C^*_\lambda(\mathbf{F}_n)}$$

For the next lemma we refer to [**15**, Lemma 2.1].

Lemma II.1.5 (Fell's principle, [**23**])**.** *Let $(\pi, \mathcal{H})$ be a unitary representation of the discrete group G. Then there is a unitary operator $W : \ell_2(G) \otimes_2 \mathcal{H} \to \ell_2(G) \otimes_2 \mathcal{H}$ such that for all $t \in G$*

$$W^{-1} \lambda_G(t) \otimes \pi(t) \, W = \lambda_G(t) \otimes I_{\mathcal{H}}.$$

In particular we have the identity

$$\Big\| \sum \alpha_i \, \lambda_G(t_i) \otimes \overline{\lambda_G(t_i)} \Big\| = \Big\| \sum \alpha_i \, \lambda_G(t_i) \Big\|$$

which finishes the poof of (II.1.1).

Example II.1.6. Unitary representations of the free group. The inequality (II.0.13) holds for $v_i = \lambda(g_i)$ and arbitrary u_i.

Indeed, denoting $g_1, g_2, \dots, g_n$ the generators of the free group $\mathbf{F}_n$ and λ its left regular representation, it follows from Fell's principle and Pisier's inequality [**45**, Theorem 1], that

$$\Big\| \sum \alpha_i \, \lambda(g_i) \otimes u_i \Big\|_{\min} = \Big\| \sum \alpha_i \, \lambda(g_i) \otimes \overline{\lambda(g_i)} \Big\| \leq \Big\| \sum \alpha_i \, u_i \otimes \overline{u_i} \Big\|.$$

The latter is a consequence of the following apparently more general inequality.

Theorem II.1.7 ([**55**])**.** *Let $u_1, u_2, \dots, u_n$ be unitaries in a C^*-algebra A and suppose that there is a state φ on A such that for any choice of indices $i_1, i_2, \dots, i_p$ and $j_1, j_2, \dots, j_p$ we have*

$$\varphi(u_{i_1}^{-1} u_{j_1} u_{i_2}^{-1} u_{j_2} \dots u_{i_p}^{-1} u_{j_p}) \geq 0 \tag{II.1.5}$$

Then for any sequence $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ of real positive numbers we have

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, u_i \Big\| \geq \Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \lambda(g_i) \Big\|.$$

PROOF. Using (II.1.3) it suffices to estimate all the moments of the square of $X = \sum \alpha_i \lambda(g_i)$ from above.

$$\begin{aligned}
\tau\big((X^*X)^p\big) &= \sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_p \\ j_1,j_2,\dots,j_p \\ g_{i_1}^{-1}g_{j_1}g_{i_2}^{-1}g_{j_2}\cdots g_{i_p}^{-1}g_{j_p}=e}} \alpha_{i_1}\alpha_{j_1}\alpha_{i_2}\alpha_{j_2}\cdots\alpha_{i_p}\alpha_{j_p} \\
&\leq \sum_{\substack{i_1,i_2,\dots i_p \\ j_1,j_2,\dots,j_p}} \alpha_{i_1}\alpha_{j_1}\alpha_{i_2}\alpha_{j_2}\cdots\alpha_{i_p}\alpha_{j_p}\,\varphi(u_{i_1}^*u_{j_1}u_{i_2}^*u_{j_2}\cdots u_{i_p}^*u_{j_p}) \\
&= \varphi\left(\left(\left(\sum \alpha_i\, u_i\right)^*\left(\sum \alpha_j\, u_j\right)\right)^p\right) \\
&\leq \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i\, u_i\right\|^{2p}.
\end{aligned}$$

□

Actually theorem II.2.3 together with Fell's principle implies the following more general result.

Example II.1.8. Let G be a group and $u_1, u_2, \dots, u_n$ be some unitaries on a Hilbert space $\mathcal{H}$. Then for all finite sequences $t_1, t_2, \dots, t_n$ of elements in G and corresponding nonnegative coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ we have

$$\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i\,\lambda_G(t_i)\otimes u_i\right\|_{\min} \leq \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i\,\lambda_G(t_i)\otimes \overline{\lambda_G(t_i)}\right\|_{\min}.$$

II.2. Families with nonnegative alternating mixed moments

In this section we will exhibit the common principle behind all the examples in the introduction. It can be considered as a variant of Perron-Frobenius theory with some non-commutative aspects. See also [**53**].

Definition II.2.1. Let A be a C^*-algebra and φ a state on A. A family $(a_i)_{i\in I}$ of elements of A have *nonnegative alternating mixed moments* with respect to φ, if for any positive integer m and any choice of indices $i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_m, j_m \in I$ we have

$$\varphi(a_{i_1}^*a_{j_1}a_{i_2}^*a_{j_2}\cdots a_{i_m}^*a_{j_m}) \geq 0.$$

If all mixed moments with respect to φ are nonnegative, we call φ a *jointly Perronian state* for the family $(a_i)_{i\in I}$, cf. [**37**].
A family of states S on A is said to be *faithful*, if for any nonzero $x \in A$ there is a state $\varphi \in S$ such that $\varphi(x^*x) > 0$. In particular, denoting by π_φ the GNS representation associated to φ, this implies that the representation $\pi_S = \bigoplus_{\varphi\in S}$ is faithful.

Remark II.2.2. Equivalently, we could consider families (a_i) in A together with a C^*-algebra B and a faithful completely positive map $\Phi : A \to B$ such that

$$\Phi(a_{i_1}^*a_{j_1}a_{i_2}^*a_{j_2}\cdots a_{i_m}^*a_{j_m}) \in B_+$$

for any choice of indices $i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_m, j_m \in I$. Indeed, given such a map Φ, the family of states $\{\psi\circ\Phi :\ \psi \in S(B)\}$ is faithful for A; conversely, given a faithful set of states S, the map

$$\begin{aligned}\Phi : A &\to \ell_\infty(S)\\ a &\mapsto \big(\varphi(a)\big)_{\varphi\in S}\end{aligned}$$

is faithful and completely positive [**58**, Corollary 3.5].

For instance, the family $\big(\omega_{\xi\otimes\bar{\xi}}\big)_{\xi\in B_{\mathcal{H}}}$ is faithful for the algebra generated by the elements $a\otimes\bar{a}$ in $A\otimes\bar{A}$.

Theorem II.2.3. *Let A be a unital C^*-algebra with a faithful set of states S. Suppose that $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ have nonnegative alternating mixed moments with respect to all $\varphi \in S$. Then for any Hilbert space $\mathcal{H}$ and any sequence of operators $b_1, b_2, \dots, b_n$ in the unit ball of $B(\mathcal{H})$ we have*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\Big\|_{\min} \le \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i\Big\|.$$

Equivalently, denoting by $U_1, U_2, \dots, U_n$ the images under the universal representation of the free group generators $g_1, g_2, \dots, g_n$, we can restate the claim as

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes U_i\Big\|_{\min} = \sup_{u_1,u_2,\dots,u_n \text{unitary}} \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes u_i\Big\|_{\min} = \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i\Big\|.$$

This implies in particular the following intermediate inequality between (II.1.5) and [**45**, Theorem 1]:

Corollary II.2.4. *Let A and S be as in Theorem II.2.3 and assume that the alternating mixed moments of the unitaries $u_1, u_2, \dots, u_n \in A$ with respect to S are nonnegative. Then we have for any sequence $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ of nonnegative real numbers*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \lambda(g_i)\Big\| \le \Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, u_i \otimes \overline{u_i}\Big\|_{\min} \le \Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, u_i\Big\|.$$

In the same spirit we will prove the following extension of the remark after Theorem 1 in [**45**].

Theorem II.2.5. *Let A and B be unital C^*-algebras and S a faithful set of states for A. Let further $a_1, a_2, \dots, a_n$ be some elements of A with nonnegative alternating mixed moments with respect to S and $u_1, u_2, \dots, u_n$ be some unitaries in B whose alternating mixed moments with respect to some state ψ on B are nonnegative. Then*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes u_i\Big\| \ge \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \lambda(g_i)\Big\|.$$

For the proofs of Theorem II.2.3 and II.2.5 we use the following method to calculate norms.

Proposition II.2.6. *Let A and B be unital C^*-algebras. Let $\Phi : A \to B$ be a faithful unital completely positive contraction. Then we can calculate norms in A as follows: For any $x \in A$ we have*

$$\|x\| = \sup_{1\le p<\infty} \big\|\Phi\big((x^*x)^p\big)\big\|^{\frac{1}{2p}} = \lim_{p\to\infty} \big\|\Phi\big((x^*x)^p\big)\big\|^{\frac{1}{2p}}.$$

As an immediate consequence we get

Corollary II.2.7. *Let A, A', B, B' be C^*-algebras and $\Phi : A \to A'$, $\Psi : B \to B'$ faithful completely positive contractions. Suppose that for $a \in A$ and $b \in B$ we have for all nonnegative integers p*

$$\big\|\Phi\big((a^*a)^p\big)\big\| \geq \big\|\Psi\big((b^*b)^p\big)\big\|$$

then $\|a\| \geq \|b\|$.

Proof of Proposition II.2.6. It suffices to show the claim for $x \in A$ positive self-adjoint. The spectrum $\sigma(x)$ of such an operator is contained in $\mathbf{R}^+$ and we define probability measures indexed by the unit ball of $\mathcal{H}$ and supported on $\sigma(x)$ as follows. The C^*-algebra generated by x and I in A is commutative and isomorphic to $C(\sigma(x))$. We can assume that B is acting on some Hilbert space $\mathcal{H}$. The states on A induced by the unit vectors in $\mathcal{H}$:

$$\omega_\xi(a) = \langle \Phi(a)\xi, \xi\rangle,$$

when restricted to $C^*(x, I)$, can be represented as probability measures on $C(\sigma(x))$, i.e. there is a measure μ_ξ whose support is contained in $\sigma(x)$ such that

$$\int_{\sigma(x)} f\, d\mu_\xi = \langle \Phi(f(x))\xi, \xi\rangle$$

for any function $f \in C(\sigma(x))$ and we claim that

$$\overline{\bigcup_{\xi\in\mathcal{H}} \operatorname{supp} \mu_\xi} = \sigma(x). \tag{II.2.1}$$

Suppose $t \in \sigma(x) \setminus \overline{\bigcup \operatorname{supp} \mu_\xi}$. Since the left hand side of (II.2.1) is closed, there is some $\varepsilon > 0$ such that $S_\varepsilon = [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \cap \sigma(x)$ is still disjoint from it. Let f be a nonzero continuous positive function supported on S_ε. By functional calculus $f(x)$ is a nonzero positive element of A and by definition of μ_ξ we have

$$\langle \Phi(f(x))\xi, \xi\rangle = 0 \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}$$

in contradiction to the faithfulness of Φ.
Fix $\varepsilon > 0$. We show that $\sup_p \|\Phi(x^p)\|^{1/p} > (1 - \varepsilon)\,(\|x\| - \varepsilon)$. To this end choose some $\xi \in \mathcal{H}$ such that $\operatorname{supp} \mu_\xi \cap [\|x\| - \varepsilon, \|x\|]$ is nonempty. Such a ξ exists by (II.2.1). Next choose some integer p such that $\mu_\xi([\|x\| - \varepsilon, \|x\|])^{\frac{1}{p}} \geq 1 - \varepsilon$. It follows that

$$\begin{aligned}\|\Phi(x^p)\|^{\frac{1}{p}} \geq \langle \Phi(x^p)\xi, \xi\rangle^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\sigma(x)} t^p\, d\mu_\xi(t)\right)^{\frac{1}{p}} &\geq \\ \geq \big(\|x\| - \varepsilon\big)\mu_\xi\big(\big[\|x\| - \varepsilon, \|x\|\big]\big)^{\frac{1}{p}} &\geq \big(\|x\| - \varepsilon\big)\big(1 - \varepsilon\big).\end{aligned}$$

□

Lemma II.2.8. *Let A, B, C be C^*-algebras and let $\Phi : A \to B$ be a faithful completely positive map. Then $\Phi \otimes I_C : A \otimes_{\min} C \to B \otimes_{\min} C$ is faithful and completely positive. More generally, if in addition $\Psi : C \to D$ is a faithful completely positive map into a C^*-algebra D, then the tensor product $\Phi \otimes \Psi : A \otimes_{\min} C \to B \otimes_{\min} D$ is still faithful.*

Proof. We only have to show faithfulness. Let $x \in A \otimes_{\min} C$ be nonzero. We have to show that $\Phi \otimes I_C(x^*x) \neq 0$. By [**24**, Proposition 10] there are states $\varphi \in S(A)$ and $\psi \in S(C)$ such that $\varphi \otimes \psi(x^*x) \neq 0$. In particular, $I_A \otimes \psi(x^*x) \neq 0$ and since the latter is still a positive operator, it follows that

$$(I_B \otimes \psi) \circ (\Phi \otimes I_C)(x^*x) = \Phi \circ (I_A \otimes \psi)(x^*x) \neq 0$$

and hence $\Phi \otimes I_C(x^*x) \neq 0$. The other part of the lemma is obvious by composing the faithful maps $\Phi \otimes I_C$ and $I_B \otimes \Psi$. □

PROOF OF THEOREM II.2.3: The map

$$\begin{aligned}\Phi_S : A &\to \ell_\infty(S)\\ x &\mapsto (\varphi(x))_{\varphi\in S}\end{aligned}$$

is completely positive and faithful (see remark II.2.2 and by lemma II.2.8 the same is true for $\Phi_S\otimes I_B$, where we write B for $B(\mathcal{H})$, so that we can apply Proposition II.2.6 to compute the norms of the operators $x=\sum_i a_i\otimes b_i$ and $y=\sum_i a_i$. First we observe that

$$\big\|(\Phi_S\otimes I_B)\big((x^*x)^p\big)\big\| = \sup_{\varphi\in S}\big\|(\varphi\otimes I_B)\big((x^*x)^p\big)\big\|$$

and the latter can be estimated as follows

$$\begin{aligned}\big\|\varphi\otimes I_B\big((x^*x)^p\big)\big\| &= \Bigg\|\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_p\\ j_1,j_2,\dots,j_p}}\varphi(a_{i_1}^*a_{j_1}a_{i_2}^*a_{j_2}\cdots a_{i_p}^*a_{j_p})\,b_{i_1}^*b_{j_1}b_{i_2}^*b_{j_2}\cdots b_{i_p}^*b_{j_p}\Bigg\|\\ &\le \sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_p\\ j_1,j_2,\dots,j_p}}\varphi(a_{i_1}^*a_{j_1}a_{i_2}^*a_{j_2}\cdots a_{i_p}^*a_{j_p})\\ &= \varphi\left(\left(\Big(\sum_i a_i\Big)^*\Big(\sum_j a_j\Big)\right)^p\right)\\ &\le \Big\|\sum_i a_i\Big\|^{2p}\end{aligned}\tag{II.2.2}$$

where we used the assumption that the alternating mixed moments of the a_i's are nonnegative and that the norm of the b_i's is bounded by 1. Since this holds for all positive integers p and for all $\varphi\in S$, we are done. □

PROOF OF THEOREM II.2.5. Let Φ_S be as in the proof of theorem II.2.3 $x=\sum a_i\otimes u_i$ and $y=\sum a_i\otimes\lambda(g_i)$. Then for any positive integer p we have

$$\begin{aligned}\big\|\Phi_S\otimes I_B\big((x^*x)^p\big)\big\| &\ge \big\|\Phi_S\otimes\psi\big((x^*x)^p\big)\big\| = \sup_{\varphi\in S}\big|\varphi\otimes\psi\big((x^*x)^p\big)\big| =\\ &= \sup_{\varphi\in S}\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_p\\ j_1,j_2,\dots,j_p}}\varphi(a_{i_1}^*a_{j_1}a_{i_2}^*a_{j_2}\cdots a_{i_p}^*a_{j_p})\,\psi(u_{i_1}^*u_{j_1}u_{i_2}^*u_{j_2}\cdots u_{i_p}^*u_{j_p})\\ &\ge \sup_{\varphi\in S}\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_p\\ j_1,j_2,\dots,j_p}}\varphi(a_{i_1}^*a_{j_1}a_{i_2}^*a_{j_2}\cdots a_{i_p}^*a_{j_p})\,\tau\big(\lambda(g_{i_1}^{-1}g_{j_1}g_{i_2}^{-1}g_{j_2}\cdots g_{i_p}^{-1}g_{j_p})\big)\\ &= \big\|\Phi_S\otimes\tau\big((y^*y)^p\big)\big\|\end{aligned}$$

and we can apply corollary II.2.7. □

Actually the second part of theorem II.2.3 can be derived from the following more general result.

Theorem II.2.9. *Let A be a unital C^*-algebra with a faithful set of states S. Suppose that the operators $a_1,a_2,\dots,a_n\in A$ have nonnegative alternating mixed moments with respect to all $\varphi\in S$. Suppose further that $u_1,u_2,\dots,u_n$ are unitaries such that $\|\sum_{i=1}^n u_i\|=n$. Then*

$$\Big\|\sum_{i=1}^n a_i\otimes u_i\Big\|_{\min} = \Big\|\sum_{i=1}^n a_i\Big\|.$$

We need the following folklore fact.

Lemma II.2.10. *If $u_1, u_2, \dots, u_n$ are unitaries in a C^*-algebra A for which there exist positive real numbers $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ satisfying*

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, u_i \Big\| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

then there exists a state φ of A such that for every $m \in \mathbf{N}$

$$\varphi(u_{i_1}^* u_{j_1} u_{i_2}^* u_{j_2} \cdots u_{i_m}^* u_{j_m}) = 1 \qquad \forall i_k, j_k = 1, 2, \dots, n.$$

Proof. By a compactness argument, there is a state on A such that $\varphi(\sum \beta_i \beta_j \, u_i^* u_j) = \| \sum \beta_i \beta_j \, u_i^* u_j \| = \sum \beta_i \beta_j$ It follows that $\varphi(u_i^* u_j) = 1$ for all $i, j = 1, 2, \dots, n$ and by induction on m we have $\varphi(u_{i_1}^* u_{j_1} u_{i_2}^* u_{j_2} \cdots u_{i_m}^* u_{j_m}) = 1$ for any choice of indices i_k, j_k. Indeed,

$$\begin{aligned} &\big| \varphi(u_{i_1}^* u_{j_1} u_{i_2}^* u_{j_2} \cdots u_{i_m}^* u_{j_m} - u_i^* u_j u_{i_1}^* u_{j_1} u_{i_2}^* u_{j_2} \cdots u_{i_m}^* u_{j_m}) \big| \le \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \le \varphi((I - u_i^* u_j)^* (I - u_i^* u_j))^{1/2} = 0. \end{aligned}$$

Now in the case where $u_i = \lambda_G(t_i)$ this implies that the trivial representation of the group generated by $t_i^{-1} t_j$ extends to a representation of the reduced group C^*-algebra, which implies that it is amenable. □

Proof of theorem II.2.9. Replacing b_i by u_i, we can use the same notation as in the proof of theorem II.2.3. Then we apply the preceding lemma and instead of the inequality in (II.2.2) there is equality:

$$\begin{aligned} \big\| \varphi \otimes I_B\big((x^* x)^p\big) \big\| &= \Big\| \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_p \\ j_1, j_2, \dots, j_p}} \varphi(a_{i_1}^* a_{j_1} a_{i_2}^* a_{j_2} \cdots a_{i_p}^* a_{j_p}) \, u_{i_1}^* u_{j_1} u_{i_2}^* u_{j_2} \cdots u_{i_p}^* u_{j_p} \Big\| \\ &= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_p \\ j_1, j_2, \dots, j_p}} \varphi(a_{i_1}^* a_{j_1} a_{i_2}^* a_{j_2} \cdots a_{i_p}^* a_{j_p}) \\ &= \varphi\left(\left(\Big(\sum_i a_i\Big)^* \Big(\sum_j a_j\Big) \right)^p \right) \end{aligned}$$

□

II.3. A Characterization of the Leinert Property

Notation II.3.1. Throughout in this section G will denote a discrete group with unit element e and $C_\lambda^*(G)$ the sub-C^*-algebra of $B(\ell_2(G))$ generated by its left regular representation λ_G. This algebra is equipped with the trace state $\tau_G(X) = \langle X \delta_e, \delta_e \rangle$. A subset $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ of G is called *free* if it generates a copy of $\mathbf{F}_n$, the free group on n generators. We shall denote the canonical generators of the free group by $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. When considering the free group we shall omit the subscript in $\lambda_{\mathbf{F}_n}$. We shall almost exclusively deal with finitely generated groups and repeatedly use the fact that given a generating set $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ for the group G there is a (unique) quotient mapping $q : \mathbf{F}_n \to G$ with $q(g_i) = h_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

The following proposition collects some results from [**30**, Lemma 3.1 and Theorem 3]:

Proposition II.3.2. *Let $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ be a generating set of the group G and denote by $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ positive real numbers. Then*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\lambda_G(h_i) + \lambda_G(h_i)^* \right) \right\|_{C^*_\lambda(G)} \geq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\lambda(g_i) + \lambda(g_i)^* \right) \right\|_{C^*_\lambda(\mathbf{F}_n)}$$

Moreover in the case of equal coefficients,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (\lambda_G(h_i) + \lambda_G(h_i)^*) \right\|_{C^*_\lambda(G)} = \left\| \sum_{i=1}^{n} (\lambda(g_i) + \lambda(g_i)^*) \right\|_{C^*_\lambda(\mathbf{F}_n)} = 2\sqrt{2n-1}$$

if and only if $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ is a free set.

This result has a graph-theoretical interpretation, where the operator in consideration corresponds to the combinatorial Laplacian on the Cayley graph of the group G, see [**39**] in particular for a generalization of the second statement. However it remained unclear whether the free group can be characterized by the norms of non-selfadjoint operators, and this question will be the subject of this section.
The set $\{g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1}, \dots, g_n, g_n^{-1}\}$ is only a special case of a *Leinert set*, a concept which appeared first in [**31**].

Definition II.3.3 ([**1**, Definition III B and Theorem III D])**.**
A subset $A = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ of a discrete group G with unit element e is called *Leinert set* if it satisfies one of the following equivalent conditions:

- Every sequence $t_{i_1}, t_{j_1}, t_{i_2}, t_{j_2}, \dots, t_{i_m}, t_{j_m}$ with i_k, $j_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ such that $i_1 \neq j_1 \neq i_2 \neq j_2 \neq \cdots \neq i_m \neq j_m$ satisfies
$$t_{i_1}^{-1} t_{j_1} t_{i_2}^{-1} t_{j_2} \cdots t_{i_m}^{-1} t_{j_m} \neq e$$
- The set A can be written as $y(B \cup \{e\})$, where B is a free subset of G and $y \in G$.

The next proposition extends Kesten's formula for the norm (See also [**7**] for a weaker version). Simplified proofs can be found in [**44**] and [**60**]. For recent examples of Leinert sets in one-relator groups see [**10**].

Proposition II.3.4 ([**1**, Theorem IV J])**.** *Let $n \geq 2$ and $\{t_1, \dots, t_n\}$ be a Leinert set in a discrete group G. Then*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_G(t_i) \right\|_{C^*_\lambda(G)} = 2\sqrt{n-1}$$

The following lemma and its corollary will play a key rôle in the generalization of Kesten's result.

Lemma II.3.5 ([**16**, Lemma 8])**.** *Let μ be a probability measure on $\mathbf{R}$ with compact support and suppose*

$$-m = \min \operatorname{supp} \mu < \max \operatorname{supp} \mu = M$$
$$\mu_n = \int_{\mathbf{R}} t^n \, d\mu(t) \geq 0 \ \text{ for all } n \in \mathbf{N}$$

Then

$$\limsup_{n \to \infty} (\mu_n)^{1/n} = M = \max(m, M)$$

Corollary II.3.6 ([**30**, Lemma 3.2])**.** *For every subset $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ of G and every sequence of positive real numbers $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ we have*

$$\left\| \alpha_0 I + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\lambda_G(t_i) + \lambda_G(t_i)^*\right) \right\| \quad = \quad \alpha_0 + \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\lambda_G(t_i) + \lambda_G(t_i)^*\right) \right\|$$

and a similar result holds for general unitaries:

$$\left\| \alpha_0 I + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(U_i \otimes \overline{U_i} + U_i^* \otimes \overline{U_i^*}\right) \right\| \quad = \quad \alpha_0 + \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(U_i \otimes \overline{U_i} + U_i^* \otimes \overline{U_i^*}\right) \right\|$$

Proof. This follows from lemma II.3.5 applied to the probability measure μ on the spectrum of the self-adjoint operator

$$T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\lambda(t_i) + \lambda(t_i)^*\right)$$

which is determined by the moments

$$\mu_n = \tau_G(T^n).$$

For the case of general unitaries $\hat{U}_i = U_i \otimes \overline{U_i}$ we refer to [**50**, Example 5.6] where the following formula is proved: For any finite sequence of operators $x_1, x_2, \dots, x_n$ on some Hilbert space H we have

$$\left\| \sum x_i \otimes \overline{x_i} \right\|_{\min} = \sup_{y,z \in (S_2^+)_1} \sum \operatorname{tr}(x_i y x_i^* z) \tag{II.3.1}$$

where $(S_2^+)_1$ is the intersection of the unit ball of the Hilbert-Schmidt class operators on H with the cone of positive operators. In our case the operator is self-adjoint and we can restrict (II.3.1) to the symmetric part:

$$\begin{aligned}\left\| \alpha_0\, I + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,(\hat{U}_i + \hat{U}_i^*) \right\|_{\min} &= \sup_{y \in (S_2^+)_1} \operatorname{tr}\left(\alpha_0\, y^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i y \hat{U}_i^* y \right) \\ &= \alpha_0 + \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,(\hat{U}_i + \hat{U}_i^*) \right\|_{\min}\end{aligned}$$

□

Now we are ready to prove the main result.

Theorem II.3.7. *Let G be a discrete group, $n \geq 3$ an integer and let $t_1, t_2, \dots, t_n$ be some elements in G. Then for any sequence $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ of strictly positive numbers we have*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,\lambda_G(t_i) \right\|_{C^*_\lambda(G)} \quad = \quad \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,\lambda(g_i) \right\|_{C^*_\lambda(\mathbf{F}_n)}$$

if and only if $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ is a Leinert set. In particular, this is equivalent to the identity

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_G(t_i) \right\|_{C^*_\lambda(G)} \quad = \quad 2\sqrt{n-1}.$$

PROOF. We only have to show the "only if" part and we shall use the method introduced in [**30**, Theorem 3] (see also [**7**], where similar methods are used. We are grateful to A. Valette for bringing this article to our attention). Let us compare the norms of the operators

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \lambda_G(t_i) \qquad \text{and} \qquad T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \lambda(g_i).$$

We can assume that G is generated by the subset $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$. Suppose that the set $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ does not have the Leinert property. This means that there is an integer m and a sequence of indices $i_1 \neq j_1 \neq i_2 \neq j_2 \neq \cdots \neq i_m \neq j_m$, with $i_k, j_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ and such that

$$t_{i_1}^{-1} t_{j_1} t_{i_2}^{-1} t_{j_2} \cdots t_{i_m}^{-1} t_{j_m} = e.$$

Let $g_1, g_2, \dots, g_n$ be the generators of the free group $\mathbf{F}_n$ and let $q : \mathbf{F}_n \to G$ be the quotient mapping associated to the generating set $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$. Taking the same indices as above, set

$$w := g_{i_1}^{-1} g_{j_1} g_{i_2}^{-1} g_{j_2} \cdots g_{i_m}^{-1} g_{j_m}.$$

Since $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ *is* a Leinert set, the word w does not reduce to the identity in $\mathbf{F}_n$ but it is in the kernel of q. We can assume without loss of generality that w is cyclically reduced, i.e. $j_m \neq i_1$. For if this is not the case, we can consider the word

$$g_{i_m}^{-1} g_{i_1} w \, g_{i_1}^{-1} g_{i_m} = g_{i_m}^{-1} g_{j_1} g_{i_2}^{-1} g_{j_2} \cdots g_{i_{m-1}}^{-1} g_{j_{m-1}}$$

which is cyclically reduced and still in the kernel of q. Note that it cannot be reduced to the empty word in this way, since the conjugacy class of the latter in $\mathbf{F}_n$ is trivial.
So we can assume for the sake of clarity that $i_1 = 1$ and $j_m = 2$. Now consider the elements

$$w' = g_1^{-1} g_3 \, w \, g_3^{-1} g_1$$
$$w'' = g_2^{-1} g_3 \, w \, g_3^{-1} g_2$$

which are both in the kernel of q and have infinite order, because w has, being cyclically reduced. Moreover, they form a free set, since there are no possible cancellations in non-trivial reduced words built out of them. Thus we can apply lemma II.2.10 to the operator

$$T_1 = \alpha_{w'} \left(\lambda(w') + \lambda(w')^*\right) + \alpha_{w''} \left(\lambda(w'') + \lambda(w'')\right)^*$$

and we get

$$\|T_1\| < 2(\alpha_{w'} + \alpha_{w''}) \tag{II.3.2}$$

because the group generated by $\{w'^{-1}w'', w'^2, w''^2\}$ is not amenable.
To compare the norms of T and $\tilde{T}$ we use the identity

$$\|X\|^2 = \|X^*X\| = \|(X^*X)^p\|^{1/p},$$

which is a consequence of Gel'fand's theorem. Thus it suffices to show that for some p

$$\|(T^*T)^p\| < \|(\tilde{T}^*\tilde{T})^p\|$$

We consider $p = m + 2$ so that $2p = |w'| = |w''|$. Denote by $W_p^{alt}(n)$ the set of all alternating words of length $2p$ in n generators:

$$W_p^{alt}(n) = \{g_{i_1}^{-1} g_{j_1} g_{i_2}^{-1} g_{j_2} \cdots g_{i_p}^{-1} g_{j_p} : i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_p, j_p \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

Using the notation of (II.1.4) we can write

$$\begin{aligned}(T^*T)^{m+2} &= \sum_{v\in W^{alt}_{m+2}(n)} \alpha_v \lambda(v)\\ &= T_0 + T_1\end{aligned}$$

where

$$T_0 = \sum_{v\in W^{alt}_{m+2}(n)\setminus\{w',w'^{-1},w'',w''^{-1}\}} \alpha_v \lambda(v)$$

and T_1 is the same as above. Obviously, setting

$$\tilde{T}_0 = \sum_{v\in W^{alt}_{m+2}(n)\setminus\{w',w'^{-1},w'',w''^{-1}\}} \alpha_v \lambda_G(q(v))$$

we have

$$(\tilde{T}^*\tilde{T})^{m+2} = \tilde{T}_0 + 2(\alpha_{w'} + \alpha_{w''})I$$

Observe that T_0 (and hence $\tilde{T}_0$) is selfadjoint with positive coefficients so that we can apply (II.1.2) and Corollary II.3.6 and we get

$$\begin{aligned}\|(T^*T)^{m+2}\| \le \|T_0\| + \|T_1\| < \|\tilde{T}_0\| + 2(\alpha_{w'} + \alpha_{w''}) =&\\ = \|\tilde{T}_0 + 2(\alpha_{w'} + \alpha_{w''})I\| = \|(\tilde{T}^*\tilde{T})^{m+2}\|.&\end{aligned}$$

□

Remark II.3.8. Actually in the case of equal coefficients the above proof gives the following quantitative estimate (cf. [**30**, (4.15)] and [**39**, Theorem 3.2]): With the notation as in the proof, let m denote the minimal length of a nontrivial word in the kernel of the quotient mapping q. Then

$$\|\tilde{T}\| \ge \|T\| + \frac{2(n-1) - 2\sqrt{2n-3}}{(2m+4)\, n^{2m+3}}.$$

Indeed, when there are n free generators, we can build a free set $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$ in $\mathbf{F}_n$ by setting $w_i = g_i^{-1} g_n\, w\, g_n^{-1} g_i$ for $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Then

$$\left\|\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda(w_i) + \lambda(w_i)^*)\right\| = 2\sqrt{2n-3}$$

and by modifying T_0 and T_1 (resp. $\tilde{T}_0$ and $\tilde{T}_1$ appropriately, we have the inequality

$$\|\tilde{T}\|^{2(m+2)} \ge \|T\|^{2(m+2)} + 2(n-1) - 2\sqrt{2n-3}.$$

Now a simple convexity argument and the fact that $\|\tilde{T}\| \le n$ yields the claim.

The following corollary gives a characterization of the free group in terms of the norms operators in the reduced C^*-algebra. Note that the free group cannot be characterized by the spectrum of the sum of the generators, as shown in [**17**, sect.4].

Corollary II.3.9. *Let G be a discrete group and $S = \{t_0 = e, t_1, \dots, t_n\}$ be a generating subset with $n \ge 2$. Then*

$$2\sqrt{n} \le \left\|\sum_{i=0}^{n} \lambda_G(t_i)\right\|$$

with equality if and only if G is the free group on n generators.

A similar proof yields the following result about unitaries which do not necessarily arise from a regular representation of a discrete group, as for example in [**33**].

Theorem II.3.10. *Let $U_1, \dots, U_n$ be unitary operators acting on some Hilbert space H and suppose*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} U_i \otimes \overline{U_i}\right\|_{\min} = 2\sqrt{n-1}$$

Then for all products of the form $V = U_{i_1}^{-1}U_{j_1}U_{i_2}^{-1}U_{j_2}\cdots U_{i_m}^{-1}U_{j_m}$ with $i_1 \neq j_1 \neq i_2 \neq j_2 \neq \dots \neq i_m \neq j_m$ we have

$$\|V \otimes \overline{V} - I\| \geq 1$$

Proof. To simplify notation we use the unitary representation

$$\hat{\pi} = \pi \otimes \overline{\pi} : \mathbf{F}_n \to B(H \otimes_2 \overline{H})$$

which we already introduced in proposition II.1.4 and which maps the generators g_i to the corresponding unitaries $\hat{U}_i = U_i \otimes \overline{U_i}$. Now let

$$v_0 = g_{i_1}^{-1}g_{j_1}g_{i_2}^{-1}g_{j_2}\cdots g_{i_m}^{-1}g_{j_m}$$

be a word as in the claim and set $\hat{V} = \hat{\pi}(v_0) = V \otimes \overline{V}$. We can assume v_0 to be cyclically reduced, because $\|\hat{V} - I\| = \|W\hat{V}W^{-1} - I\|$ for any unitary W and in the case v_0 is not cyclically reduced, we can take a cyclically reduced one in its conjugacy class. We can of course assume that $i_1 = 1$ and $j_m = 2$. Now for the cyclically reduced word v_0 the set

$$F_k = \{(g_1^{-1}g_3)^r \, v_0 \, (g_1^{-1}g_3)^{-r} : r = 1, 2, \dots, k\}$$

is a free set and we can do the same estimate as in the above proof. Setting $T = \sum_{i=1}^{n} \lambda(g_i)$ as above and $\hat{T} = \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i$ we can identify F_k with some subset of the set of unreduced words $W_{m+2k}^{alt}(n)$, e.g. the set $\{(g_1^{-1}g_3)^r v_0 (g_1^{-1}g_3)^{-r}(g_1^{-1}g_1)^{k-r} : r = 1, 2, \dots, k\}$, and we get

$$\begin{aligned}
\|(T^*T)^{m+2k}\| &= \left\|\sum_{v \in W_{m+2k}^{alt}(n)} \lambda(v)\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{v \in W_{m+2k}^{alt}(n)\setminus(F_k \cup F_k^{-1})} \lambda(v)\right\| + \left\|\sum_{v \in F_k} \lambda(v) + \lambda(v)^*\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{v \in W_{m+2k}^{alt}(n)\setminus(F_k \cup F_k^{-1})} \hat{\pi}(v)\right\| + 2\sqrt{2k-1}.
\end{aligned}$$

The last inequality follows from (II.1.2) and proposition II.3.4. We can now apply Corollary II.3.6 to the first term on the right hand side and we obtain

$$\begin{aligned}
\|(T^*T)^{m+2k}\| &\leq \left\|\sum_{v \in W_{m+2k}^{alt}(n)\setminus(F_k \cup F_k^{-1})} \hat{\pi}(v) + \sum_{v \in F_k} 2I\right\| + 2\sqrt{2k-1} - 2k \\
&\leq \left\|\sum_{v \in W_{m+2k}^{alt}(n)} \hat{\pi}(v)\right\| + \left\|\sum_{v \in F_k} 2I - \hat{\pi}(v) - \hat{\pi}(v)^*\right\| + 2\sqrt{2k-1} - 2k \\
&\leq \|(\hat{T}^*\hat{T})^{m+2k}\| + 2k\,\|\hat{\pi}(v_0) - I\| + 2\sqrt{2k-1} - 2k
\end{aligned}$$

This together with the assumption $\|T\| = \|\hat{T}\|$ yields

$$\|\hat{V} - I\| \geq 1 - \frac{\sqrt{2k-1}}{k}$$

and since this holds for all k, the proof is complete. $\square$

Remark II.3.11. There is a connection to the paper of V. Flory, "Estimating norms in C^*-algebras of discrete groups", Math. Ann. **224** (1976) 41–52. Using our results, Theorem 8 in the latter paper can be sharpened for finite sets as follows. Let G be a discrete group and $E \subset G$ a finite subset. Theorem 8 can be sharpened for finite subsets as follows. Define for $K \subset G$ the *Leptin constant* $\omega(K) = \inf\{\frac{\#(KU)}{\#(U)} : \emptyset \neq U \subset G \quad \text{finite}\}$. Then the following are equivalent.

1. E has the Leinert property.
2. For every $y \in E$ the set $\{y^{-1}x : x \in E \text{ and } x \neq y\}$ is a free subset of G.
3. $\omega(E) = \#(E) - 1$.

II.4. A Counterexample.

In this section we exhibit an example showing that there actually can occur strict inequality in Corollary II.2.4 and that Conjectures II.0.23 and II.0.24 are false.

Theorem II.4.1. *For every positive integer r there are unitaries $u_1, u_2, \dots, u_r$ such that*

$$\left\|\sum_{i=1}^{r}\left(u_i \otimes \overline{u_i} + u_i^* \otimes \overline{u_i^*}\right)\right\| = 2\sqrt{2r-1}$$

and

$$\left\|\sum_{i=1}^{r}(u_i + u_i^*)\right\| > 2\sqrt{2r-1}$$

Remark II.4.2. Note that this is a nontrivial example of equality in Haagerup's Cauchy-Schwarz inequality for operators (cf. [**25**, Lemma 2.4]), which reads

$$\left\|\sum_i a_i \otimes \overline{b_i}\right\| \leq \left\|\sum_i a_i \otimes \overline{a_i}\right\|^{1/2} \left\|\sum_i b_i \otimes \overline{b_i}\right\|^{1/2}.$$

Indeed, taking $a_i = u_i$ from theorem II.4.1 and $b_i = \lambda(g_i)$ there is equality.

Proof. We shall consider the unitary representations of the free group on r generators associated to the Haagerup functions $x \mapsto t^{|x|}$ as realized in [**52**]. We need the series of unitary representations π_t presented there which is indexed by $t \in]0,1[$ and which is defined on the canonical basis of $\ell_2(\mathbf{F}_r)$ as follows. Every $x \in \mathbf{F}_r$ different from the neutral element e can be represented as a reduced word in the generators $g_1, g_2, \dots, g_r$ and their inverses. Denote by $\bar{x}$ the word obtained by removing the last letter, so that $|\bar{x}| = |x| - 1$ and define the operator P on $\ell_2(\mathbf{F}_r)$ by $P\delta_x = \delta_{\bar{x}}$ and $P\delta_e = 0$. Then the Pytlik-Szwarc representations act as follows on $\ell_2(\mathbf{F}_r)$. First we consider the unit vector δ_e, where we define

$$\pi_t(x)\delta_e = t^{|x|}\,\delta_e + \sum_{k=0}^{|x|-1} t^k \sqrt{1-t^2}\, P^k \delta_x \tag{II.4.1}$$

This implicitly defines $\pi_t(x)$ on the other basis vectors $\delta_y = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\big(\pi_t(y)\delta_e - t\,\pi_t(\bar{y})\delta_e\big)$ for $y \neq e$, namely

$$\pi_t(x)\delta_y = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\big(\pi_t(xy)\delta_e - t\,\pi_t(x\bar{y})\delta_e\big).$$

In particular, δ_e is a cyclic vector and the matrix coefficients

$$\begin{aligned}\langle \pi_t(x)\delta_y, \delta_z\rangle &= \frac{1}{1-t^2}\left\langle \big(\pi(z^{-1}) - t\pi(\bar{z}^{-1})\big)\big(\pi(xy) - t\pi(x\bar{y})\big)\delta_e, \delta_e\right\rangle \\ &= \frac{t^{|z^{-1}xy|} - t^{1+|\bar{z}^{-1}xy|} - t^{1+|z^{-1}x\bar{y}|} + t^{2+|\bar{z}^{-1}x\bar{y}|}}{1-t^2}\end{aligned}$$

are all of the order $\psi_t(x) = t^{|x|}$. We can calculate the ℓ_p-norm of the latter as follows. It is easy to see that the number of words of length n in $\mathbf{F}_r$ is $2r\,(2r-1)^{n-1}$ for $n \geq 1$, so that

$$\|\psi_t\|_p^p = \sum_{x\in\mathbf{F}_r} t^{p|x|} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2r\,(2r-1)^{n-1} t^{np} = 1 + \frac{2r}{2r-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(t^p\,(2r-1)\right)^n, \tag{II.4.2}$$

which is finite if and only if $t < (2r-1)^{-1/p}$. Now the proof of [**13**, Theorem 1] shows that any unitary representation π of a discrete group G whose matrix coefficients with respect to a cyclic subset of vectors are in $\ell_{2+\varepsilon}(G)$ for arbitrary positive ε is weakly contained in the left regular representation λ. This means that for any function f of finite support the inequality

$$\|\pi(f)\| \leq \|\lambda(f)\| \tag{II.4.3}$$

holds. Formula (II.4.2) shows that for $t \leq \frac{1}{\sqrt{2r-1}}$ the representation π_t is weakly contained in the left regular representation of the $\mathbf{F}_r$. However, this is not true for $t > \frac{1}{\sqrt{2r-1}}$. In [**57**, Theorem 5] it is shown that the spectrum of the operator $\pi_t(\chi_1) = \sum\big(\pi_t(g_i) + \pi_t(g_i^{-1})\big)$ is the set $\left[-2\sqrt{2r-1}, 2\sqrt{2r-1}\right] \cup \left\{(2r-1)t + \frac{1}{t}\right\}$, which for $t > \frac{1}{\sqrt{2r-1}}$ is different from $\operatorname{spec}\big(\lambda(\chi_1)\big) = \left[-2\sqrt{2r-1}, 2\sqrt{2r-1}\right]$. For completeness we shall give an elementary proof of the inequality

$$\|\pi_t(\chi_1)\| \geq (2r-1)t + \frac{1}{t}$$

using the method of [**44**]. We shall exhibit a family of vectors $(\xi_{t,\alpha})_{\alpha<\alpha_0} \subseteq \ell_2(\mathbf{F}_r)$ such that

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{\|\pi_t(\chi_1)\xi_{t,\alpha}\|}{\|\xi_{t,\alpha}\|} = (2r-1)t + \frac{1}{t}$$

for $t > \frac{1}{\sqrt{2r-1}}$. Denote by χ_n the characteristic function of the words of length n on $\mathbf{F}_r$. We define

$$\xi_{t,\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n \pi_t(\chi_n)\delta_e$$

or equivalently, using formula (II.4.1),

$$\begin{aligned}\xi_{t,\alpha}(e) &= \frac{2r}{(2r-1)(1-(2r-1)\alpha t)} \\ \xi_{t,\alpha}(x) &= \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-(2r-1)\alpha t}\,\alpha^{|x|} \qquad \text{for} \quad x \neq e.\end{aligned}$$

In particular, setting $\alpha_0 = \min\left\{\frac{1}{\sqrt{2r-1}}, \frac{1}{(2r-1)t}\right\}$, we have

$$\begin{aligned}\|\xi_{t,\alpha}\|_2 &< \infty \qquad \text{for} \quad \alpha < \alpha_0 \\ \lim_{\alpha\to\alpha_0}\|\xi_{t,\alpha}\|_2 &= \infty,\end{aligned} \tag{II.4.4}$$

and the relations

$$\begin{aligned}\pi_t(\chi_1)\,\pi_t(\chi_1) &= \pi_t(\chi_2) + 2r\,I\\ \pi_t(\chi_1)\,\pi_t(\chi_n) &= \pi_t(\chi_{n+1}) + (2r-1)\,\pi_t(\chi_{n-1})\end{aligned}$$

imply

$$\pi_t(\chi_1)\,\xi_{t,\alpha} = \left((2r-1)\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\,\xi_{t,\alpha} + \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\,\delta_e,$$

i.e. $\xi_{t,\alpha}$ is almost an eigenvector. Hence by (II.4.4)

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \frac{\|\pi_t(\chi_1)\,\xi_{t,\alpha}\|_2}{\|\xi_{t,\alpha}\|_2} = (2r-1)\alpha_0 + \frac{1}{\alpha_0}.$$

Now observe that the function $\alpha \mapsto (2r-1)\alpha + \frac{1}{\alpha}$ defined on the positive real axis attains its unique minimum at $\frac{1}{\sqrt{2r-1}}$, taking the value $2\sqrt{2r-1}$ there, and that for $t > \frac{1}{\sqrt{2r-1}}$ the radius of convergence of $\xi_{t,\alpha}$ becomes $\alpha_0 = \frac{1}{(2r-1)t}$, and thus

$$\|\pi_t(\chi_1)\| \geq \frac{1}{t} + (2r-1)\,t > 2\sqrt{2r-1}.$$

This will actually yield our counterexample. Consider the representation $\pi_t \otimes \overline{\pi_t}$. The elementary matrix coefficients

$$\left\langle \left(\pi_t(x) \otimes \overline{\pi_t(x)}\right)\,\delta_y \otimes \overline{\delta_{y'}}, \delta_z \otimes \overline{\delta_{z'}}\right\rangle$$

are of the order $t^{2|x|}$ and hence $\pi_t \otimes \overline{\pi_t}$ is weakly contained in λ for $t \leq \frac{1}{\sqrt[4]{2r-1}}$. Thus taking $t = \frac{1}{\sqrt[4]{2r-1}}$ we get

$$\|\pi_t(\chi_1)\| = \sqrt{2r-1}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2r-1}} + \sqrt[4]{2r-1}\right) > 2\sqrt{2r-1} = \|(\pi_t \otimes \overline{\pi_t})\,(\chi_1)\|\,.$$

□

II.5. Unitaries with nonnegative alternating mixed moments

In this section we derive some estimates for norms of sums of operators with nonnegative mixed moments, in particular unitaries. The methods are combinatorial. There is still hope to prove the following conjecture.

Conjecture II.5.1. Let $u_1, u_2, \ldots, u_n$ be some unitaries with nonnegative alternating mixed moments with respect to a faithful set of states and such that

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} u_i\right\| = 2\sqrt{n-1}$$

then the linear space spanned by $u_1, u_2, \ldots, u_n$ is (completely) isometric to the space spanned by $\lambda(g_1), \lambda(g_2), \ldots, \lambda(g_n)$.

We begin with an elementary Perron-Frobenius type proposition.

Proposition II.5.2. *Let A be a C^*-algebra with a faithful set of states S and let a and b be elements of A.*

1. *If a and b have nonnegative alternating mixed moments with respect to S, then $\|a+b\| \geq \|a\|$.*
2. *If a is self-adjoint and has nonnegative moments with respect to S, then $\|a\| \in \sigma(a)$.*

Proof. The first assertion follows from Corollary II.2.7 applied to the faithful completely positive map $\Phi_S : A \to l_\infty(S)$ which sends x to $(\varphi(x))_{x\in S}$. For the second assertion note that a slight modification of the argument of the proof of Proposition II.2.6 yields the following result. Denote for each $\varphi \in S$ the unique measure on $\sigma(a)$ satisfying

$$\varphi(f(a)) = \int_{\sigma(a)} f \, d\mu_\varphi$$

for every $f \in C(\sigma(a))$. Then by the faithfulness of the family S we have

$$\overline{\bigcup_{\varphi\in S} \operatorname{supp} \mu_\varphi} = \sigma(a)$$

and applying lemma II.3.5 to each μ_φ yields

$$\|a\| = \sup_{\varphi\in S} \max\{|\min \operatorname{supp} \mu_\varphi|, |\max \operatorname{supp} \mu_\varphi|\} = \sup_{\varphi\in S} \max \operatorname{supp} \mu_\varphi \in \sigma(a).$$

□

Taking a and b orthogonal projections shows that we cannot have strict inequality in general; however, if b in the last proposition is unitary, we can get a quantitative estimate.

Theorem II.5.3. *Let A be a C^*-algebra. Suppose that a, $u \in A$ have nonnegative alternating mixed moments with respect to a faithful set of states and that u is unitary. Then*

$$\|a + u\| \geq \frac{1}{2}\left(\|a\| + \sqrt{\|a\|^2 + 4}\right). \tag{II.5.1}$$

Remark II.5.4. Observe that the inequality $\|a + u\| \geq \sqrt{\|a\|^2 + 4}$ would imply with the assumptions of Conjecture II.5.1 (by induction) that $\|\sum_1^m u_i\| = 2\sqrt{m-1}$ for all $2 \leq m \leq n$; however, inequality (II.5.1) is asymptotically best possible as $a \to 0$.

We will need a combinatorial lemma.

Lemma II.5.5. *Let $\beta(p, k) =$ the number of possibilities to pick k disjoint pairs of consecutive numbers out of $\{1, 2, \dots, 2p\}$. Then $\beta(p, k) = \binom{2p-k}{k}$ for $1 \leq k \leq p$ and the generating function is given by the formula*

$$F(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{p} \beta(p, k)\, x^p\, y^k = \frac{xy(xy - x - 1)}{(x-1)(x^2y^2 - 2xy - x + 1)}.$$

Proof. There is a one to one correspondence between choices of k pairs out of a line $2p$ points and choices of k points out of a line of $2p - k$ points. Hence $\beta(p, k) = \binom{2p-k}{k}$. To get a recursion for these numbers we use the following notation.

$\beta^0(p, k) = \#$ choices such that the first point is part of a pair.
$\beta^1(p, k) = \#$ choices such that the first point is free.

Then after prepending two more points we obtain the following recursion:

$$\beta^0(p + 1, k) = \beta(p, k - 1)$$
$$\beta^1(p + 1, k) = \beta(p, k) + \beta^1(p, k - 1).$$

Setting

$$F^i(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{p} \beta^i(p, k)\, x^p\, y^k$$

for $i = 1, 2$ we have $F(x, y) = F^0(x, y) + F^1(x, y)$ and the claim follows after solving the equations

$$F^0(x, y) = xy \left(\frac{1}{1-x} + F(x, y) \right)$$
$$F^1(x, y) = x \left(\frac{xy}{1-x} + F(x, y) + y\, F^1(x, y) \right).$$

□

Proof of Theorem II.5.3. We use Proposition II.2.6 to calculate the norm. To this end for each state φ in the faithful family we estimate

$$m_p = \varphi\left(\left((a+u)^*(a+u)\right)^p\right)$$

in terms of the moments

$$\alpha_p = \varphi\big((a^*a)^p\big)$$

as follows. Set $a_1 = a$ and $a_2 = u$, then

$$m_p = \sum_{i_1, j_1, \ldots, i_p, j_p \in \{1,2\}} \varphi(a_{i_1}^* a_{j_1} \cdots a_{i_p}^* a_{j_p})$$

Now we collect all the terms where no u remains after cancelling out uu^* and u^*u wherever possible. There are exactly $\beta(p, p-k)$ terms such that $(a^*a)^k$ remains. By the positiveness of the remaining moments we get

$$m_p \geq \alpha_p + \sum_{k=1}^{p} \beta(p, k)\, \alpha_{p-k}.$$

We define the moment generating functions

$$G_a(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p\, z^{2p} \qquad G_{a+u}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} m_p\, z^{2p}$$

and

$$\tilde{G}_{a+u}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\alpha_p + \sum_{k=1}^{p} \beta(p, k)\, \alpha_{p-k} \right) z^{2p}.$$

The radius of convergence of G_{a+u} is $\frac{1}{\|a+u\|}$, and by Pringsheim's theorem [**34**, Theorem 17.13] it is smaller than $\tilde{r}$, the radius of convergence of $\tilde{G}_{a+u}$, which we shall estimate from above in terms of $\|a\|$. This will yield a lower bound for $\|a+u\|$. Now we have

$$\tilde{G}_{a+u}(z) = G_a(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=k+1}^{\infty} \beta(p, p-k)\, \alpha_k\, z^{2p}.$$

The sum $\sum_{k=1}^{\infty} \beta(p, p-k)\, z^{2p}$ can actually be calculated. Putting

$$F_q(\zeta, z) = \frac{1}{\zeta^q} F(\zeta\, z^2, \tfrac{1}{\zeta}) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{p} \beta(p, k)\, \zeta^{p-k-q}\, z^{2p}$$

and applying Cauchy's integral formula we have

$$\frac{1}{2\pi i} \oint F_q(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\substack{k \\ p-k-q=0}} \beta(p, k)\, z^{2p} = \sum_{p=1}^{\infty} \beta(p, p-q)\, z^{2p};$$

on the other hand,

$$\begin{aligned}F_k(\zeta, z) &= \frac{1}{\zeta^k}\frac{z^2(z^2 - z^2\zeta - 1)}{(z^2\zeta - 1)(z^4 - 2z^2 - z^2\zeta + 1)}\\ &= \frac{1}{\zeta^k}\left(\frac{1 - z^2}{(1 - z^2)^2 - z^2\zeta} - \frac{1}{1 - z^2\zeta}\right)\\ &= \frac{1}{\zeta^k}\left(\frac{1}{1 - z^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z^2}{(1 - z^2)^2}\,\zeta\right)^m - \sum_{m=0}^{\infty}(z^2\zeta)^m\right)\end{aligned}$$

and hence

$$\frac{1}{2\pi i}\oint F_k(\zeta, z)\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{1 - z^2}\left(\frac{z^2}{(1 - z^2)^2}\,\zeta\right)^k - z^{2k} = z^{2k}\left(\frac{1}{(1 - z^2)^{2k+1} - 1} - 1\right).$$

Now the radius of convergence of second summand in

$$\tilde{G}_{a+u}(z) = G_a(z) + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\, z^{2k}\left(\frac{1}{(1 - z^2)^{2k+1}} - 1\right)$$

is determined by

$$\limsup_{k\to\infty}\left(\alpha_k\,|z|^{2k}\left(\frac{1}{(1 - z^2)^{2k+1}} - 1\right)\right)^{1/2k} \leq 1$$

i.e.

$$\|a\|\,|z| \leq 1 - |z|^2$$

and hence

$$\tilde{r} \leq \min\left\{\frac{1}{\|a\|}, \frac{\sqrt{\|a\|^2 + 4} - \|a\|}{2}\right\};$$

this implies

$$\|a + u\| \geq \max\left\{\|a\|, \frac{1}{2}\left(\|a\| + \sqrt{\|a\|^2 + 4}\right)\right\}.$$

□

Remark II.5.6. Assuming that the states in consideration are tracial does not improve the estimate; indeed, the combinatorics in this case are given by the numbers $\tilde{\beta}(p, k)$ of possibilities to choose k pairs out of a circle of $2p$ points. Similar to Lemma II.5.5 one can see that $\tilde{\beta}(p, k) = \binom{2p-k}{k} + \binom{2p-k-1}{k-1} \leq 2\binom{2p-k}{k}$ and asymptotically this is of the same order.

If a is the sum of unitaries there are far more cancellations and we can get a better estimate. In order to do this we will do an analysis of radial functions associated to the operator $\sum\lambda(g_i)$ which is quite similar to the theory of radial functions on free groups (cf. [**11**], [**12**] and [**51**]). Instead of calculating the norm of $T = \sum u_i$ directly, we shall consider the operator $T^*T - nI = \sum_{i\neq j} u_i^* u_j$. This leads to the following definition.

Definition II.5.7. On the free group $\mathbf{F}_n$ we set for $k > 0$

$$\tilde{E}_k^{(n)} = \left\{g_{i_1}^{-1}g_{j_1}g_{i_2}^{-1}g_{j_2}\cdots g_{i_k}^{-1}g_{j_k} : i_1 \neq j_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_k \neq j_k\right\}$$

and $\tilde{E}_0^{(n)} = \{e\}$; we denote by

$$\tilde{\chi}_k^{(n)} = \chi_{\tilde{E}_k^{(n)}}$$

its characteristic function.

The next proposition is the analogue of [**11**, Theorem 1].

Proposition II.5.8. *The functions $\tilde{\chi}_k^{(n)}$ satisfy the following convolution identities.*

$$\tilde{\chi}_0^{(n)} * \tilde{\chi}_k^{(n)} = \tilde{\chi}_k^{(n)} \tag{II.5.2a}$$

$$\tilde{\chi}_1^{(n)} * \tilde{\chi}_1^{(n)} = \tilde{\chi}_2^{(n)} + (n-2)\tilde{\chi}_1^{(n)} + n(n-1)\tilde{\chi}_0^{(n)} \tag{II.5.2b}$$

$$\tilde{\chi}_1^{(n)} * \tilde{\chi}_k^{(n)} = \tilde{\chi}_{k+1}^{(n)} + (n-2)\tilde{\chi}_k^{(n)} + (n-1)^2\tilde{\chi}_{k-1}^{(n)} \quad \textit{for } k \geq 2 \tag{II.5.2c}$$

Proof. Since (II.5.2a) is trivial we begin by showing (II.5.2b). We expand the product and split it as follows:

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}_1^{(n)} * \tilde{\chi}_1^{(n)} &= \sum_{i_1 \neq j_1} \sum_{i_2 \neq j_2} g_{i_1}^{-1} g_{j_1} g_{i_2}^{-1} g_{j_2} \\
&= \sum_{i_1 \neq j_1 \neq i_2 \neq j_2} g_{i_1}^{-1} g_{j_1} g_{i_2}^{-1} g_{j_2} + \sum_{i_1 \neq j_1 \neq j_2} g_{i_1}^{-1} g_{j_2}
\end{aligned}$$

(the sums run over all indices appearing under the $\sum$ sign which satisfy the indicated relations; sums of group elements are performed in the group algebra $\mathbf{C}G$). In the second sum, for fixed i_1, j_2, $g_{i_1}^{-1} g_{j_2}$ appears once for every $j_1 \notin \{i_1, j_2\}$, that is $(n-2)$ times if $i_1 \neq j_2$ and $(n-1)$ times if $i_1 = j_2$. In the latter case there is one more cancellation and we get $n(n-1)\tilde{\chi}_0^{(n)}$ and hence (II.5.2b).
We can treat (II.5.2c) similarly; namely,

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}_1^{(n)} * \tilde{\chi}_k^{(n)} &= \sum_{i \neq j} \sum_{\substack{i_1 \neq j_1 \neq \dots \\ \dots \neq i_k \neq j_k}} g_i^{-1} g_j g_{i_1}^{-1} g_{j_1} g_{i_2}^{-1} g_{j_2} \cdots g_{i_k}^{-1} g_{j_k} \\
&= \sum_{\substack{i \neq j \neq i_1 \neq j_1 \neq \dots \\ \dots \neq i_k \neq j_k}} g_i^{-1} g_j g_{i_1}^{-1} g_{j_1} g_{i_2}^{-1} g_{j_2} \cdots g_{i_k}^{-1} g_{j_k} + \sum_{\substack{i \neq j \neq j_1 \neq \dots \\ \dots \neq i_k \neq j_k}} g_i^{-1} g_{j_1} g_{i_2}^{-1} g_{j_2} \cdots g_{i_k}^{-1} g_{j_k}.
\end{aligned}$$

In the last summand for $g_i^{-1} g_{j_1}$ appears $(n-2)$ times if $i \neq j_1$ and $(n-1)$ times if $i = j_j$. Contrary to the case $k = 2$, there is the additional condition $j_1 \neq i_2$, thus (II.5.2c) holds. □

Similar to [**11**] the following corollary is an immediate consequence of the relations (II.5.2a) – (II.5.2c).

Corollary II.5.9. *1. There are polynomials $P_k^{(n)}$ of degree k such that*

$$P_k^{(n)}\big(\tilde{\chi}_1^{(n)}\big) = \tilde{\chi}_k^{(n)}; \tag{II.5.3a}$$

they satisfy the relations

$$P_0^{(n)}(x) = 1 \qquad P_1^{(n)}(x) = x \qquad P_2^{(n)}(x) = x^2 - (n-2)x - n(n-1) \tag{II.5.3b}$$

$$P_{k+1}^{(n)}(x) = (x - n + 2)P_k^{(n)}(x) - (n-1)^2 P_{k-1}^{(n)}(x) \quad \textit{for } k \geq 2. \tag{II.5.3c}$$

2. Conversely there are coefficients $b_{k,p}^{(n)}$ such that

$$\Big(\tilde{\chi}_1^{(n)}\Big)^p = \sum_{k=0}^{p} b_{k,p}^{(n)} \tilde{\chi}_k^{(n)}; \tag{II.5.4a}$$

they satisfy the relations

$$b_{0,p+1}^{(n)} = n(n-1) b_{1,p}^{(n)} \tag{II.5.4b}$$

$$b_{k,p+1}^{(n)} = b_{k-1,p}^{(n)} + (n-2) b_{k,p}^{(n)} + (n-1)^2 b_{k+1,p}^{(n)} \tag{II.5.4c}$$

and their generating function is given by

$$\tilde{F}^{(n)}(x,z) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p} b_{k,p}^{(n)} x^k z^p = \frac{\left(\frac{(n-1)^2 z}{x} - (n-2)z + \frac{1}{n}\right)\tilde{F}_0^{(n)}(z) + 1 - \frac{1}{n}}{1 - \left(x + n - 2 + \frac{(n-1)^2}{x}\right) z} \tag{II.5.5}$$

where

$$\tilde{F}_0^{(n)}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} b_{0,p}^{(n)} z^p = \frac{2 - n + n\sqrt{\frac{1-(3n-4)z}{1+nz}}}{2(1 - n(n-1)z)}$$

Proof. The recursions (II.5.3b-c) and (II.5.4b-c) follow readily from (II.5.2). As for the generating function, note that $b_{0,p}^{(n)} = \tau\big(\lambda(\tilde{\chi}_1^{(n)})^p\big)$. The generating function of this sequence can be easily deduced from the computations of [**60**]. Denoting the moment generating function of an operator T in a finite von Neumann algebra with respect to a trace τ by $F_T(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\tau(T^k)z^k = \tau\big((I - zT)^{-1}\big)$, it is easy to deduce from [**60**, Theorem 2] that the moment generating function of $\sum_{i,j=1}^{n}\lambda(g_i^{-1}g_j) = nI + \tilde{\chi}_1^{(n)}$ is

$$F_{nI+\lambda(\tilde{\chi}_1^{(n)})} = \frac{2 - n + n\sqrt{1 + 4z - 4nz}}{2(1 - n^2 z)}. \tag{II.5.6}$$

Now considering the moment generating function of a translation of T by a multiple of the identity:

$$F_{T+\alpha I}(z) = \tau\Big(\big((1 - z\alpha)I - zT\big)^{-1}\Big) = \frac{1}{1 - z\alpha} F_T\left(\tfrac{z}{1-z\alpha}\right)$$

formula (II.5.5) is an immediate consequence of (II.5.6). $\square$

Actually it will be convenient to work with translations of the polynomials $P_k^{(n)}$ by a fixed difference.

Proposition II.5.10. *The polynomials $Q_k^{(n)}(x) = P_k^{(n)}(x + n - 2)$ fulfill the following properties.*

1. The recursion

$$Q_0^{(n)}(x) = 1 \qquad Q_1^{(n)}(x) = x + n - 2 \qquad Q_2^{(n)}(x) = x^2 + (n-2)x - n(n-1) \tag{II.5.7a}$$

$$Q_{k+1}^{(n)}(x) = xQ_k^{(n)}(x) - (n-1)^2 Q_{k-1}^{(n)}(x) \quad \textit{for } k \geq 2; \tag{II.5.7b}$$

2. the inequalities

$$Q_{k+1}^{(n)}(x) \geq (n-1)Q_k^{(n)}(x) \geq 0 \quad \textit{for} \quad x \geq 2(n-1) \tag{II.5.8a}$$

$$Q_{k+1}^{(n)\prime}(x) \geq (n-1)Q_k^{(n)\prime}(x) \quad \textit{for} \quad x \geq 2(n-1); \tag{II.5.8b}$$

3. there is a constant C depending only on n such that for $2(n-1) \leq x \leq n^2-2n+2$ we have

(II.5.9)
$$\begin{aligned} Q_k^{(n)}(x) = {} & \frac{n+2-\frac{x}{n-1}}{\sqrt{x^2-4(n-1)^2}}\left(\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4(n-1)^2}}{2}\right)^k - \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4(n-1)^2}}{2}\right)^k\right) \\ & + \frac{n}{n-1}\left(\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4(n-1)^2}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4(n-1)^2}}{2}\right)^{k+1}\right) \\ \geq {} & C\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4(n-1)^2}}{2}\right)^k . \end{aligned}$$

Proof. The recursions (II.5.7a) and (II.5.7b) are immediate consequences of (II.5.3b) and (II.5.3c). The inequalities (II.5.8a) and (II.5.8b) follow by induction. We only prove (II.5.8a), which for $k=0$ is obvious; we even have $Q_1^{(n)}(x) \geq n$ for x in the indicated range. The case $k=2$ now follows easily:

$$\begin{aligned} Q_2^{(n)}(x) &= xQ_1^{(n)}(x) - n(n-1) \\ &= (n-1)Q_1^{(n)}(x) + (x-(n-1))Q_1^{(n)}(x) - n(n-1) \\ &\geq (n-1)Q_1^{(n)}(x) + (n-1)(Q_1^{(n)}(x) - n) \\ &\geq (n-1)Q_1^{(n)}(x); \end{aligned}$$

similarly, for $k \geq 2$, using (II.5.7b), we get

$$\begin{aligned} Q_{k+1}^{(n)}(x) &= xQ_k^{(n)}(x) - (n-1)^2 Q_{k-1}^{(n)}(x) \\ &= 2(n-1)Q_k^{(n)}(x) + (n-1)^2 Q_{k-1}^{(n)}(x) \\ &\geq (n-1)Q_k^{(n)}(x) + (n-1)(Q_k^{(n)}(x) - (n-1)Q_{k-1}^{(n)}(x) \\ &\geq (n-1)Q_k^{(n)}(x) \end{aligned}$$

Similarly one can prove (II.5.8b). The general formula for the solution of the recurrence relation

(II.5.10)
$$a_{n+1} = \alpha a_n - \beta a_{n-1},$$

has the form (cf. [**11**, Proposition 2])

$$a_n = \lambda A_n + \mu A_{n+1}$$

where $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ and $A_n = a_+^n - a_-^n$ with

$$a_\pm = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

is the basic solution of (II.5.10) for $\alpha^2 - 4\beta \neq 0$. The formula (II.5.9) follows from this by determining λ and μ from $Q_1^{(n)}$ and $Q_2^{(n)}$. □

Now we are ready to prove a strengthened version of Theorem II.5.3 for sums of unitaries.

Theorem II.5.11. *Let $u_1, u_2, \ldots, u_n$ be unitaries in a C^*-algebra A with nonnegative alternating mixed moments with respect to a faithful set of states. For $2 \leq m \leq n$ we denote $T_m = \sum_1^m u_i$, $y_m = \|T_m\|^2 - 2(m-1)$, and*

$$w_m = y_m + \sqrt{y_m^2 - 4(m-1)^2} = \|T_m\|^2 - 2(m-1) + \|T_m\|\sqrt{\|T_m\|^2 - 4(m-1)}$$

Then

$$w_m \le w_n$$

Remark II.5.12. In particular, if $u_1, u_2, \dots, u_n$ are as above and $\left\|\sum_1^n u_i\right\| = 2\sqrt{n-1}$ then $\left\|\sum_1^m u_i\right\| \le 2\sqrt{m-1+\frac{(n-m)^2}{4(n-1)}}$.

Proof. We introduce some additional notation. Denote π the representation of the free group $\mathbf{F}_n$ which is uniquely determined by the requirement $\pi(g_i) = u_i$. Further for $1 \le m \le n$ denote $\alpha_m = \|T_m\|$, $x_m = \|\pi(\tilde{\chi}_1^{(m)})\| = \|T_m^* T_m - mI\| = \alpha_m^2 - m$ and $y_m = x_m - m + 2 = \alpha_m^2 - 2(m-1)$. Then the radius of convergence of the power series

$$\sum_{p=0}^{\infty} \pi(\tilde{\chi}_1^{(n)})^p \, z^p$$

with values in A is $\frac{1}{\|\pi(\tilde{\chi}_1^{(n)})\|}$. We will obtain a lower bound for this in terms of $\|\pi(\tilde{\chi}_1^{(n)})\|$. Indeed, for $t > 0$ we get

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{p=0}^{\infty} \pi(\tilde{\chi}_1^{(n)})^p \, t^p\right\| &= \left\|\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p} b_{kp}^{(n)} \, \pi(\tilde{\chi}_k^{(n)}) \, t^p\right\| && \text{by (II.5.4a)} \\
&\ge \left\|\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p} b_{kp}^{(n)} \, \pi(\tilde{\chi}_k^{(m)}) \, t^p\right\| && \text{by Proposition II.5.2 (1.)} \\
&= \left\|\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p} b_{kp}^{(n)} \, P_k^{(m)}(\pi(\tilde{\chi}_1^{(m)})) \, t^p\right\| && \text{by (II.5.3a)} \\
&\ge \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p} b_{kp}^{(n)} \, P_k^{(m)}(x_m) \, t^p && \text{by Proposition II.5.2 (2.)} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p} b_{kp}^{(n)} \, Q_k^{(m)}(y_m) \, t^p \\
&\ge C \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p} b_{kp}^{(n)} \left(\frac{w_m}{2}\right)^k t^p && \text{by (II.5.9)} \\
&= C\tilde{F}^{(n)}\left(\tfrac{w_m}{2}, t\right) && \text{by (II.5.5)}
\end{aligned}$$

Since the power series expansion of $\tilde{F}$ has only nonnegative coefficients, the rational function $\tilde{F}\left(\frac{w_m}{2}, .\right)$ cannot explode for $t < \frac{1}{\|\pi(\tilde{\chi}_1^{(n)})\|}$, i.e. the denominator in formula (II.5.5) must be nonnegative at $x = \frac{w_m}{2}$ and $z = \frac{1}{\|\pi(\tilde{\chi}_1^{(n)})\|}$. It follows that

$$\frac{w_m}{2} + \frac{2(n-1)^2}{w_m} \le y_n$$

and consequently

$$\frac{4(n-1)^2}{w_n} = y_n - \sqrt{y_n^2 - 4(n-1)^2} \le w_m \le y_n + \sqrt{y_n^2 - 4(n-1)^2} = w_n$$

$\square$

II.6. Free operators with operator coefficients[1]

Let $g_1, g_2, \dots, g_n$ be the generators of the free group $\mathbf{F}_n$. C. Akemann and P. Ostrand proved in [**1**] a formula for the norm of free operators, i.e. operators of the form $\sum \alpha_i \lambda(g_i)$. This formula improved estimates of M. Leinert [**31**] and M. Bożejko [**7**]. It was previously known in the case of equal coefficients [**30**] and simpler proofs were found in [**60**] and [**44**]. In this section we show how a part of the proof of [**44**] can be generalized to obtain estimates for the operator valued case, which improve the bounds in [**26**, Proposition 1.1] (see also [**9**] for related recent results).

Theorem II.6.1. *Let $n \geq 2$ and $g_1, \dots, g_n$ be the generators of the free group $\mathbf{F}_n$ and let further $a_1, a_2, \dots, a_n$ be some operators on a Hilbert space H which can be approximated by invertible operators, then*

$$\text{(II.6.1)} \quad \begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda(g_i) \otimes a_i \right\|_{\min} \leq \inf_{s>0} \left\| \sum_{i=1}^n \left(s^2 I + a_i a_i^* \right)^{1/2} - (n-2) s I \right\|^{1/2} \times \\ \times \left\| \sum_{i=1}^n \left(s^2 I + a_i^* a_i \right)^{1/2} - (n-2) s I \right\|^{1/2} \end{aligned}$$

Remark: If the Hilbert space H is finite dimensional, any operator can be approximated with invertible ones. In the infinite dimensional case this is not generally true, see [**27**, Problem 140]. However, we have

Corollary II.6.2. *For an arbitrary family of operators $a_1, a_2, \dots, a_n$ on a Hilbert space H we have*

$$\text{(II.6.2)} \quad \begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda(g_i) \otimes a_i \right\|_{\min} &\leq 2\sqrt{1 - \frac{1}{n}} \left(\frac{\|\sum_{i=1}^n a_i a_i^*\| + \|\sum_{i=1}^n a_i^* a_i\|}{2} \right)^{1/2} \\ &\leq 2\sqrt{1 - \frac{1}{n}} \max \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n a_i a_i^* \right\|^{1/2}, \left\| \sum_{i=1}^n a_i^* a_i \right\|^{1/2} \right\} \end{aligned}$$

The proof of (II.6.1) is an adaptation to the non-commutative situation of the first part of [**44**]. Denote by $HS(H)$ the space of Hilbert-Schmidt operators on the Hilbert space H and by tr the usual (unbounded) trace. We need the following version of the Cauchy-Schwarz inequality.

Lemma II.6.3. *For any $x_1, x_2, \dots, x_n \in B(H)$ and $y_1, y_2, \dots, y_n \in HS(H)$ we have the inequality*

$$\text{(II.6.3)} \quad \left\| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right\|_{HS} \leq \left\| \sum_{i=1}^n x_i x_i^* \right\|^{1/2} \operatorname{tr} \left(\sum_{i=1}^n y_i^* y_i \right)^{1/2}$$

Proof. After writing the sum as

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

the claim follows from the operator ideal property of $HS(H^n)$. □

[1] voir la note p. xii.

Proof of Theorem. We consider first the case where all the operators a_i are invertible. The general case follows then by a topological argument.
Let $T = \sum_{i=1}^n \lambda(g_i) \otimes a_i$ act on the Hilbert space $\ell_2(\mathbf{F}_n; HS(H))$. For every word $y \in \mathbf{F}_n$, $i \in \{1, 2, \dots n\}$ and any positive real number s we define the following operator:

$$p_i(y,s) = a_i^{-1}\big((s^2 + a_i a_i^*)^{1/2} \mp s\big) = \big((s^2 + a_i^* a_i)^{1/2} \mp s\big)\, a_i^{-1}$$

with

"$-$" if there is no cancellation in the word $g_i^{-1}y$, i.e. the first letter of y is different from g_i.

"$+$" if the first letter of y *is* g_i and there is cancellation.

Here and in the following scalars appearing in operator expressions mean the corresponding multiple of the identity operator and the square root of a positive operator is always the unique positive square root. Then one can easily check that $p_i(y,s)$ is invertible and that its inverse is

$$\begin{aligned} p_i(y,s)^{-1} &= \big((s^2 + a_i a_i^*)^{1/2} \pm s\big)\, a_i^{*-1} \\ &= a_i^{*-1}\, \big((s^2 + a_i^* a_i)^{1/2} \pm s\big) \end{aligned}$$

(note the change of sign).
Now pick $h \in \ell_2(\mathbf{F}_n; HS(H))$ with finite support. In order to get the upper bound for $\|Th\|_2^2 = \sum_y \|Th(y)\|_{HS}^2$ we first give an estimate of

$$\|Th(y)\|_{HS}^2 = \left\| \sum_{i=1}^n a_i\, p_i(y,s)\, p_i(y,s)^{-1}\, h(g_i^{-1}y) \right\|_{HS}^2$$

for fixed y. Now the operator $a_i\, p_i(y,s)$ is positive and we can apply the above lemma by setting $x_i = (a_i\, p_i(y,s))^{1/2}$ its (positive) square root and denoting the rest by $y_i = (a_i\, p_i(y,s))^{1/2}\, p_i(y,s)^{-1}\, h(g_i^{-1}y)$:

$$\|Th(y)\|_{HS}^2 \le \left\| \sum_{i=1}^n a_i\, p_i(y,s) \right\| \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^n h(g_i^{-1}y)^*\, p_i(y,s)^{*-1}\, a_i\, h(g_i^{-1}y) \right)$$

Note that among the words $\{ g_1^{-1}y, g_2^{-1}y, \dots g_n^{-1}y \}$ there is at most one cancellation so that there is always the "$-$" sign in $p_i(y,s)$ except maybe one case and since all the summands $a_i\, p_i(y,s)$ are positive operators, we have the operator inequality

$$\sum_{i=1}^n a_i\, p_i(y,s) \le 2s + \sum_{i=1}^n \big((s^2 + a_i a_i^*)^{1/2} - s\big) =: c_0(s)$$

This upper bound does not depend on the word y and we can estimate the norm of Th as follows.

$$\begin{aligned} \|Th\|_2^2 &\le \|c_0(s)\| \sum_y \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^n p_i(g_i y, s)^{*-1}\, a_i\, h(y)\, h(y)^* \right) \\ &\le \|c_0(s)\| \sum_y \left\| \sum_{i=1}^n p_i(g_i y, s)^{*-1}\, a_i \right\| \|h(y)\|_{HS}^2 \end{aligned}$$

Now $p_i(g_i y, s)$ has always the "$+$" sign with at most one exception possible in the case when there is already cancellation in $g_i y$. Thus $p_i(g_i y, s)^{-1}$ has the "$-$" signs and with the formula for the inverse we get

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(g_i y, s)^{*-1} a_i \leq 2s + \sum_{i=1}^{n} \big((s^2 + a_i^* a_i)^{1/2} - s\big) =: c_1(s)$$

The bound $c_1(s)$ is again independent of y and finally we get the inequality we wanted: For all positive real numbers s

$$\|Th\|_2^2 \leq \|c_0(s)\| \, \|c_1(s)\|.$$

Let us now consider the case where the a_i's are not invertible but approximable by invertible operators. Consider the topological space $B(H)^n$ equipped with the product topology and define the functions

$$\begin{array}{rrcl} & B(H)^n & \to & \mathbf{R} \\ g: & x = (a_1, a_2, \dots, a_n) & \mapsto & \inf_{s \geq 0} \big(\|c_0(s)\| \, \|c_1(s)\|\big)^{1/2} \\ f: & x = (a_1, a_2, \dots, a_n) & \mapsto & \Big\|\sum_{i=1}^{n} \lambda(g_i) \otimes a_i\Big\|. \end{array}$$

g is upper semicontinuous, i.e. the set

$$\{\, x \in B(H)^n \mid g(x) < t \,\}$$

is open for any $t \in \mathbf{R}$. Since f is continuous, the set

$$\{\, x \in B(H)^n \mid g(x) - f(x) \geq 0 \,\}$$

is closed and hence contains the closure of all the n-tuples of invertible operators. □

Note that the infimum over all positive scalars s could be replaced by an infimum over all positive operators S which commute with the a_i's. However in view of the examples below this does not seem to improve the inequality very much.

Proof of Corollary. We will prove first the case where the a_i's are approximable by invertibles. In fact we will show that the bound (II.6.1) is sharper than (II.6.2) just as in the commutative case, cf. [**1**]. We recall the following facts from non-commutative analysis. A function f is called *operator-monotone* if for any positive selfadjoint operators a, b the implication

$$a \geq b \;\Rightarrow\; f(a) \geq f(b)$$

holds. It is *operator-concave*, if the operator inequality

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

holds for all positive operators a, b and any $0 < \lambda < 1$. By Löwner's theorem [**35**, p.464], the function $t \mapsto t^\alpha$ is operator-monotone for $0 \leq \alpha \leq 1$ (see also [**43**]). Ando showed in [**2**] (see also [**36**]) that any operator-monotone function is necessarily operator-concave. We can now apply this to the function $t \mapsto \sqrt{t}$ and any sequence of positive operators $x_i = a_i^* a_i$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{1/2} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/2}$$

and our bound becomes

$$
\begin{aligned}
(\|c_0(s)\|\,\|c_1(s)\|)^{1/2} &\leq \left((2-n)s + n\sqrt{s^2+\frac{1}{n}\left\|\sum_{i=1}^n a_i a_i^*\right\|}\right)^{1/2} \times \\
&\qquad\times \left((2-n)s + n\sqrt{s^2+\frac{1}{n}\left\|\sum_{i=1}^n a_i^* a_i\right\|}\right)^{1/2} \\
&\leq (2-n)s + \frac{n}{2}\left(\sqrt{s^2+\frac{1}{n}\left\|\sum_{i=1}^n a_i a_i^*\right\|}+\right. \\
&\qquad\left. + \sqrt{s^2+\frac{1}{n}\left\|\sum_{i=1}^n a_i^* a_i\right\|}\right) \\
&\leq (2-n)s + n\sqrt{s^2+\frac{1}{2n}\left(\left\|\sum_{i=1}^n a_i a_i^*\right\| + \left\|\sum_{i=1}^n a_i^* a_i\right\|\right)}.
\end{aligned}
$$

The infimum of the last expression over all $s \geq 0$ is the expression in the claim.
Let us now consider general operators $a_1, a_2, \dots, a_n$ which are not necessarily approximable by invertible ones. Denote by $P_f(H)$ the set of all finite dimensional projections on H. It is easy to see that the embedding

$$
\begin{aligned}
\Phi : B(H) \to &\bigoplus_{p\in P_f(H)} pB(H)p \\
a \mapsto &(pap)_{p\in P_f(H)}
\end{aligned}
$$

is a complete isometry, i.e. for any operators $b_1, b_2, \dots, b_n$ acting on some Hilbert space K we have

$$
\left\|\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\right\|_{\min} = \left\|\sum_{i=1}^n \Phi(a_i) \otimes b_i\right\|_{\min}
$$

Now $\Phi(a_i)$ lying in a direct sum of matrix algebras can be approximated by invertibles, so that inequality (II.6.2) holds when we replace a_i by $\Phi(a_i)$. Now we use the fact that the right hand side of (II.6.2) comes from an operator space structure. Indeed, denoting e_{ij} the canonical basis of $\boldsymbol{M}_n$, it is easy to see that

$$
\left\|\sum_{i=1}^n a_i \otimes e_{1i}\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n a_i a_i^*\right\|^{\frac12} \qquad \text{and} \qquad \left\|\sum_{i=1}^n a_i \otimes e_{i1}\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n a_i^* a_i\right\|^{\frac12};
$$

hence we have

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^n \lambda(g_i) \otimes a_i\right\|_{\min} &= \left\|\sum_{i=1}^n \lambda(g_i) \otimes \Phi(a_i)\right\|_{\min} \\
&\leq 2\sqrt{1-\frac{1}{n}}\left(\frac{\|\sum \Phi(a_i)\otimes e_{1i}\| + \|\sum \Phi(a_i)\otimes e_{i1}\|}{2}\right)^{\frac12} \\
&= 2\sqrt{1-\frac{1}{n}}\left(\frac{\|\sum a_i\otimes e_{1i}\| + \|\sum a_i\otimes e_{i1}\|}{2}\right)^{\frac12}
\end{aligned}
$$

and this proves the claim. We do not see how to generalize (II.6.1) to non-approximable operators with a similar trick, since the assignment $(a_i) \mapsto \left\|\sum |a_i|\right\|$ fails to be a norm and hence is not a complete invariant. $\square$

Examples. There is actually equality not only for scalar coefficients and it would be interesting to characterize such families of operators.

Example II.6.4. Commuting normal operators.

If the operators $a_1, a_2, \dots, a_n$ generate a commutative C^*-algebra, the scalar formula of Akemann-Ostrand is applicable as a simple consequence of Gel'fand's theorem.

Example II.6.5. For unitaries $u_1, u_2, \dots, u_n$ there is equality:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^n \lambda(g_i) \otimes \alpha_i u_i\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i \, \lambda(g_i)\right\| \\
&= \min_{s\geq 0} 2s + \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{s^2 + |\alpha_i|^2} - s\right) \\
&= \min_{s\geq 0} (\|c_0(s)\| \, \|c_1(s)\|)^{1/2}
\end{aligned}$$

The first identity is Fell's lemma **[23]** applied to the left regular representation and the unitary representation which is uniquely determined by $\pi(g_i) = u_i$.
The following example uses the following simple identity. For any projection p and positive real numbers σ, α

$$(\sigma I + (\sqrt{\sigma^2 + \alpha^2} - \sigma)p)^2 = \sigma^2 I + \alpha^2 p \tag{II.6.4}$$

Example II.6.6. For the basis of the row-space R_n and equal coefficients there is equality:

$$\left\|\sum_{i=1}^n \lambda(g_i) \otimes e_{1i}\right\| = \sqrt{n} = \min_{s\geq 0} (\|c_0(s)\| \, \|c_1(s)\|)^{1/2} \tag{II.6.5}$$

However if the coefficients are different there may be strict inequality, e.g.

$$\begin{aligned}
\|\lambda(g_1) \otimes e_{11} + \lambda(g_2) \otimes e_{12} + 2\lambda(g_3) \otimes e_{13}\| &= \sqrt{6} \\
&< \sqrt{8} = \min_{s\geq 0} (\|c_0(s)\| \, \|c_1(s)\|)^{1/2}
\end{aligned} \tag{II.6.6}$$

The bound for the general operator $\sum_{i=1}^n \lambda(g_i) \otimes \alpha_i e_{1i}$ is determined by the norms

$$\begin{aligned}
\|c_0(s)\| &= \left\|2s + \sum_{i=1}^n \left((s^2 + |\alpha_i|^2 e_{11})^{1/2} - s\right)\right\| \\
&= 2s + \sum_{i=1}^n (\sqrt{s^2 + |\alpha_i|^2} - s) \\
\|c_1(s)\| &= \left\|2s + \sum_{i=1}^n \left((s^2 + |\alpha_i|^2 e_{ii})^{1/2} - s\right)\right\| \\
&= \left\|2s + \sum_{i=1}^n \left((s^2 + |\alpha_i|^2)^{1/2} - s\right) e_{ii}\right\| \\
&= s + \sqrt{s^2 + \max_i |\alpha_i|^2}
\end{aligned}$$

We must find the minimum of the function

$$g : s \mapsto \|c_0(s)\| \, \|c_1(s)\|$$

If $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$ this is

$$g(s) = \left(s + \sqrt{s^2+1}\right)\left(2\,s + n\left(\sqrt{s^2+1} - s\right)\right)$$

with strictly positive derivative

$$g'(s) = \frac{2\,\left(s + \sqrt{s^2+1}\right)^2}{\sqrt{s^2+1}}$$

and thus the minimum is attained at $s = 0$, which yields (II.6.5). For (II.6.6) where $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ and $\alpha_3 = 2$ we consider

$$g(s) = \left(2\sqrt{s^2+1} + \sqrt{s^2+4} - s\right)\left(s + \sqrt{s^2+4}\right)$$

which has the derivative

$$g'(s) = \frac{\left(2\,s + 2\sqrt{s^2+4}\right)\left(s\sqrt{s^2+4} + s^2 + 1\right)}{\sqrt{s^2+1}\sqrt{s^2+4}}$$

This is again strictly positive and the infimum of g is $g(0) = 8$.

Example II.6.7. The Cuntz algebra.

In [**27**, Problem 140] it is shown that the unilateral shift S on ℓ_2 cannot be approximated by invertible operators. Consider the Cuntz algebra, which is generated by n "free" copies of the shift. A priori we cannot apply theorem II.6.1 to the sum

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda(g_i) \otimes \alpha_i S_i.$$

However since this norm is trivially equal to $\left(\sum |\alpha_i|^2\right)^{1/2}$, the inequality holds even in this case.

Bibliographie

[1] C. A. Akemann and P. A. Ostrand, *Computing norms in group C^*-algebras*, Amer. J. Math. **98** (1976), 1015–1047.

[2] T. Ando, *Topics on operator inequalities*, Tech. report, Hokkaido Univ., Sapporo, 1979, MR 58#2451.

[3] D. P. Blecher, *Commutativity in operator algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1990), 709–715.

[4] ______, *Tensor products of operator spaces II*, Can. J. Math. **44** (1992), 75–90.

[5] ______, *The standard dual of an operator space*, Pac. J. Math. **153** (1992), 15–30.

[6] D. P. Blecher and V. I. Paulsen, *Tensor products of operator spaces*, J. Funct. An. **99** (1991), 262–292.

[7] M. Bożejko, *On $\Lambda(p)$ sets with minimal constant in discrete noncommutative groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1975), 407–412.

[8] ______, *Positive-definite kernels, length functions on groups and a noncommutative von Neumann inequality*, Studia Math. **95** (1989), 107–118.

[9] A. Buchholz, *Norm of convolution by operator-valued functions on free groups*, Preprint.

[10] A. P. Cherix and A. Valette, *On spectra of simple random walks on one-relator groups*, Pac. J. Math. **175** (1996), 417–438, à paraître.

[11] J. M. Cohen, *Operator norms on free groups*, Boll. Un. Mat. It. **(6) 1** (1982), 1055–1065.

[12] J. M. Cohen and L. de Michele, *The radial Fourier-Stieltjes algebra of free groups*, Cont. Math. **10** (1982), 33–40.

[13] M. Cowling, U. Haagerup, and R. Howe, *Almost L^2 matrix coefficients*, J. reine angew. Math. **387** (1988), 97–110.

[14] A. M. Davie, *Quotient algebras of uniform algebras*, J. London Math. Soc (2) **7** (1973), 31–40.

[15] J. de Canniere and U. Haagerup, *Multipliers of the Fourier algebras of some simple Lie groups and their discrete subgroups*, Amer. J. Math. **107** (1985), 455–500.

[16] P. de la Harpe, A. G. Robertson, and A. Valette, *On the Spectrum of the Sum of Generators for a Finitely Generated Group I*, Isr. J. Math. **81** (1993), 65–96.

[17] ______, *On the spectrum of the sum of generators for a finitely generated group II*, Coll. Math. **65** (1993), 87–102.

[18] J. Diestel and J. J. Uhl, *Vector measures*, Math. Surveys, vol. 15, Amer. Math. Soc., R. I. Providence, 1977.

[19] E. G. Effros and Z.-J. Ruan, *Operator spaces*, Oxford University Press, to appear.

[20] ______, *A new approach to operator spaces*, Can. Math. Bull. **34** (1991), 329–337.

[21] ______, *Self-duality for the Haagerup tensor product and Hilbert space factorization*, J. Funct. An. **100** (1991), 257–284.

[22] ______, *On the abstract characterization of operator spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 579–584.

[23] M. Fell, *Weak containment and induced representations of groups*, Can. J. Math. **14** (1962), 237–268.

[24] A. Guichardet, *Tensor products of C^*-algebras, part I*, Aarhus Universitet Lect. Notes Ser., vol. 12, 1969.

[25] U. Haagerup, *Injectivity and decomposition of completely bounded maps*, Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory, Lecture Notes in Math., vol. 1132, Springer, 1984, pp. 170–222.

[26] U. Haagerup and G. Pisier, *Bounded linear operators between C^*-algebras*, Duke Math. J. **71** (1993), 889–925.

[27] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book, 2nd ed.*, Springer, 1982.

[28] M. Junge, *Factorization theory for spaces of operators*, Habilitationsschrift, Kiel, 1996.

[29] M. Junge and J. Pisier, *Bilinear forms on exact operator spaces and $B(H) \otimes B(H)$*, Geom. Funct. An. **5** (1995), 329–363.

[30] H. Kesten, *Symmetric random walks on groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **92** (1959), 336–354.

[31] M. Leinert, *Faltungsoperatoren auf gewissen diskreten Gruppen*, Studia Math. **52** (1974), 149–158.

[32] R. I. Loebl, *Contractive linear maps on C^*-algebras*, Michigan Math. J. **22** (1975), 361–366.

[33] A. Lubotzky, R. Phillips, and P. Sarnak, *Hecke operators and distributing points on the sphere II*, Commun. Pure and Applied Math. **40** (1987), 401–420.

[34] A. I. Markuševič, *Theory of functions of a complex variable*, vol. 1, Prentice Hall, 1965.

[35] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities : Theory of majorization and its applications*, Academic Press, N. Y., 1979.

[36] R. Mathias, *Concavity of monotone matrix functions of finite order*, Lin. Mult. Algebra **27** (1990), 129–138.

[37] M. Nakamura and Y. Watatani, *An extension of the Perron-Frobenius theorem*, Math. Jap. **35** (1990), 249–252.

[38] E. Nelson, *The distinguished boundary of the unit operator ball*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 994–995.

[39] W. Paschke, *Lower bound for the norm of a vertex-transitive graph*, Math. Zeitschr. **213** (1993), 225–239.

[40] V. I. Paulsen, *Representations of function algebras, abstract operator spaces, and Banach space geometry*, J. Funct. An. **109** (1992), 113–129.

[41] ———, *The maximal operator space of a normed space*, Proc. Edinb. Math. Soc. **39** (1996), 309–323.

[42] V. I. Paulsen and R. R. Smith, *Multilinear maps and tensor norms on operator systems*, J. Funct. An. **73** (1987), 258–276.

[43] G. K. Pedersen, *Some operator monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **36** (1972), 277–301.

[44] M. A. Picardello and T. Pytlik, *Norms of free operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 257–261.

[45] G. Pisier, *Quadratic forms in unitary operators*, Lin. Alg. App., à paraître.

[46] ———, *Factorization of linear operators and the geometry of Banach spaces*, CBMS (Regional conferences of the A.M.S.), vol. 60, 1986, Reprinted with corrections 1987.

[47] ———, *An introduction to the theory of operator spaces*, 1995, Preprint.

[48] ———, *Exact operator spaces*, Colloques sur les algèbres d'opérateurs (Orléans 1993), Astérisque, vol. 232, Soc. Math. France, 1995, pp. 159–186.

[49] ———, *Similarity problems and completely bounded maps*, Lecture Notes in Math., vol. 1618, Springer, 1995.

[50] ———, *The operator Hilbert space OH, complex interpolation and tensor norms*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 585, 1996.

[51] T. Pytlik, *Radial convolutors on free groups*, Studia Math. **78** (1984), 179–183.

[52] T. Pytlik and R. Szwarc, *An analytic family of uniformly bounded representations of free groups*, Acta Math. **157** (1986), 287–309.

[53] H. Raubenheimer and S. Rode, *Cones in Banach algebras*, Indag. Math. N. S. **7** (1996), 489–502.

[54] Z.-J. Ruan, *Subspaces of C^*-algebras*, J. Funct. An. **76** (1988), 217–230.

[55] Y. Shalom, letter.

[56] R. R. Smith, *Completely bounded maps between C^*-algebras*, J. London Math. Soc (2) **27** (1983), 157–166.

[57] R. Szwarc, *An analytic series of irreducible representations of the free group*, Ann. Inst. Fourier **38** (1988), 87–110.

[58] M. Takesaki, *Theory of operator algebras I*, Springer N. Y., 1979.

[59] J. Tomiyama, *On the transpose maps of matrix algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 635–638.

[60] W. Woess, *A short computation of the norms of free convolution operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986), 167–170.

[61] C. Zhang, *Completely bounded Banach-Mazur distance*, Proc. Edinb. Math. Soc. **40** (1997), 247–260.