# Thèse de Doctorat de Mathématiques de l'Université Paris 6 Equipe d'Analyse

**M. Franz LEHNER**

# $M_n$-espaces, sommes d'unitaires et analyse harmonique sur le groupe libre.

soutenue le 22 septembre 1997 devant le jury composé de :

**Mme Claire ANANTHARAMAN-DELAROCHE**
**M. Christian LE MERDY**
**M. Bernard MAUREY**
**M. Gilles PISIER**

Cette thèse a été réalisée sous la direction de Monsieur Gilles PISIER. Je le remercie pour son attention et ses conseils qui rendaient ce travail possible. Il m'a proposé une multitude de problèmes intéressants tout en me laissant travailler très librement.
Je suis très reconnaissant à Madame Claire ANANTHARAMAN-DELAROCHE ainsi qu'à Messieurs Bernard MAUREY et Christian LE MERDY pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de participer au jury.
Je remercie la Gruppe Funktionalanalysis de l'université de Linz, le programme ERASMUS et en particulier Jim COOPER, qui m'a ouvert la possibilité de faire des études à Paris et m'a supporté pendant tout mon travail.
Les étudiants et les membres de l'équipe d'analyse, qui rendaient si joyeuse l'atmosphère dans le couloir 46-0, méritent toute ma gratitude.
Je ne dois pas oublier de remercier l'équipe de Milner Hall à Texas A&M University, où j'ai passé trois séjours et où le premier résultat de cette thèse a été découvert.
Sur le plan mathématique le contre-exemple construit dans le deuxième chapitre doit beaucoup à Philippe BIANE. Je le remercie pour plusieurs discussions très stimulantes.
Sur le plan administratif Asma HARCHARRAS m'a beaucoup aidé en accélerant le chemin bureaucratique de cette thèse. Je la remercie pour les heures qu'elle y a consacré.
Je remercie enfin Olga pour sa patience et son support, et mes parents, qui ont rendu possible mes études et m'ont accordé toute leur confiance.

# Table des matières



[1] voir la note p. xii.

# Résumé

Cette thèse est composée de deux parties. La première partie est consacrée à la théorie des $M_n$-espaces et des espaces d'opérateurs abstraites que l'on peut y associer. La deuxième partie traite quelques propriétés du groupe libre liées à une inégalité récemment démontrée dans [**45**].

**$M_n$-espaces.** La théorie des espaces d'opérateurs a été fondée récemment par les équipes Effros-Ruan et Blecher-Paulsen à partir de la caractérisation abstraite des sous-espaces de $B(H)$ comme espaces matriciellement normés avec la propriété $L^\infty$, donnée dans la thèse de Z.-J. Ruan. Cette caractérisation a notamment permis de définir une notion de dualité et de développer une théorie des espaces normés «non-commutatifs» analogue à la théorie des espaces de Banach.
Rappelons donc que pour un espace vectoriel $X$ on note $M_n(X)$ l'espace des matrices $x = [x_{ij}]_{i,j=1}^n$ avec coefficients $x_{ij} \in X$. D'après Effros-Ruan on appelle *norme matricielle* sur l'espace $X$ la donnée d'une suite de normes $\{\| \ \|_n\}$ sur $M_n(X)$ qui vérifient les propriétés de compatibilité suivantes.

(R0) On a pour tout $k, n \in \mathbf{N}$ et toute matrice $x \in M_k(X)$ l'identité

$$\left\| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_n = \|x\|_k$$

(R1) Pour des matrices scalaires $\alpha = [\alpha_{ij}] \in \boldsymbol{M}_n$, $\beta = [\beta_{ij}] \in \boldsymbol{M}_n$ et pour une matrice $x = [x_{ij}] \in M_n(X)$ on a

$$\left\| \left[ \sum_{k,l=1}^n \alpha_{ik} x_{kl} \beta_{lj} \right]_{i,j=1}^n \right\|_n \leq \|\alpha\| \, \|x\|_n \, \|\beta\|$$

La norme matricielle est dite $L^\infty$ si pour $x \in M_m(X)$ et $x' \in M_n(X)$ elle vérifie en plus

$$\text{(R2)} \qquad \left\| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x' \end{bmatrix} \right\|_{m+n} = \max \{ \|x\|_m, \|x'\|_n \}$$

Les morphismes dans cette catégorie sont les applications complètement bornées (en abrégé c.b.). Le théorème de Ruan dit que si un espace matriciellement normé vérifie la condition (R2), alors il existe un plongement $X \to B(H)$ complètement isométrique. Pour cette raison on appelle (R1) et (R2) les *axiomes de Ruan.* Il y a donc deux façons de présenter un espace d'opérateurs $X$ : Soit la donnée d'un plongement explicite $J : X \to B(H)$, soit la donnée d'une norme matricielle sur $X$ vérifiant les axiomes de Ruan. En particulier, tout espace de Banach autant que sous-espace des fonctions continues sur la boule unité de son dual peut être muni d'une structure d'espace d'opérateurs «naturelle». À l'exception de quelques exemples, cette structure n'est pas la seule possible. En effet, Vern Paulsen [**40**] a observé que sur un espace de Banach $X$ il y a toujours une structure d'espace d'opérateurs minimale et une structure maximale de sorte que toute autre structure d'espace d'opérateurs sur $X$ est incluse entre ces deux structures et il a introduit le paramètre $\alpha(X) = \|id : MIN(X) \to MAX(X)\|_{cb}$ pour mesurer la «distance» entre $MIN$ et $MAX$.
Le but de la première partie de cette thèse est d'étudier les espaces $n$-normés, c'est-à-dire la catégorie des espaces vectoriels $X$ donnés avec une norme $\| \ \|_n$ sur $M_n(X)$ pour un nombre *$n$ fixé.* D'une part, on va établir un critère analogue aux axiomes de Ruan caractérisant les espaces $n$-normés qui admettent une réalisation $n$-isométrique comme sous-espace de $B(H)$. D'autre part, un espace $n$-normé qui vérifie ce critère peut alors

être considéré comme classe d'équivalence d'espaces d'opérateurs et on peut définir des structures minimales et maximales analogues aux structures $MIN$ et $MAX$ de Paulsen.

Voici un résumé de la première partie.
Dans la section I.1 on donne la théorie de base des espaces $n$-normés. Les morphismes de cette catégorie sont les applications $n$-bornés. Comme dans la catégorie des espaces d'opérateurs on peut munir l'espace dual d'un espace $n$-normé avec une $n$-norme en posant $M_n(X^*) = B_n(X, \boldsymbol{M}_n)$. Un résultat de Roger Smith **[56]** implique que cette définition est compatible avec la définition du dual d'un espace d'opérateurs, c'est-à-dire que pour un espace d'opérateurs $X$, la norme sur $M_n(X^*)$ ne dépend que de la norme $\| \ \|_n$ sur $M_n(X)$. Pour caractériser les espace $n$-normés d'opérateurs, que l'on appellera désormais *$M_n$-espaces*, la condition (R2) doit être remplacée par la condition suivante :

$$\text{(R)} \qquad \Big\| \sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i \Big\|_{M_n(X)} \leq \Big\| \sum \alpha_i \alpha_i^* \Big\|_{\boldsymbol{M}_n}^{1/2} \max \|x_i\|_{M_n(X)} \Big\| \sum \beta_i^* \beta_i \Big\|_{\boldsymbol{M}_n}^{1/2}$$

pour toutes suites finies $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n$ et $x_i \in M_n(X)$. On a en effet le théorème suivant.

**Théorème 1.** *Soit $(X, \| \ \|_n)$ un espace $n$-normé. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

*(i) Il existe un plongement $n$-isométrique $X \to B(H)$.*

*(ii) Il existe un plongement $n$-isométrique $X \to M_n(C(K)) = C(K; \boldsymbol{M}_n)$.*

*(iii) $(X, \| \ \|_n)$ vérifie la condition (R).*

*(iv) L'inclusion naturelle $X \to X^{**}$ est une $n$-isométrie.*

Par exemple, le dual d'un espace $n$-normé est toujours un $M_n$-espace.
Dans la section I.2 on rappelle les constructions de base d'espaces d'opérateurs qui peuvent être adaptées aux $M_n$-espaces, comme quotients, sommes directes, interpolation complexe, ultraproduits, conjugaison et transposition.
Dans la section I.3 les structures minimales et maximales d'espaces d'opérateurs sur un $M_n$-espace $(X, \| \ \|_n)$ sont introduites de manière analogue aux structures $MIN$ et $MAX$ de Paulsen. Ces structures seront notées $MIN(X, \| \ \|_n)$ et $MAX(X, \| \ \|_n)$ respectivement et pour $x \in M_p(X)$ on a les formules suivantes :

$$\|x\|_{M_p(MIN(X, \| \ \|_n))} = \sup \left\{ \big\| [\langle f_{ij}, x_{kl} \rangle] \big\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \,\Big|\, [f_{ij}] \in M_n(X^*), \big\| [f_{ij}] \big\|_n^* \leq 1 \right\}$$

$$\|x\|_{M_p(MAX(X, \| \ \|_n))} = \inf \Big\{ \Big\| \sum \alpha_i \alpha_i^* \Big\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} \Big\| \sum \beta_i^* \beta_i \Big\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} \,\Big|\, x = \sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i, \\ \alpha_i \in \boldsymbol{M}_{p,n},\ \beta_i \in \boldsymbol{M}_{n,p},\ x_i \in M_n(X), \|x\|_n \leq 1 \Big\}.$$

On peut donc caractériser les espaces $MIN(X, \| \ \|_n)$ comme les sous-espaces d'opérateurs de $C(K; \boldsymbol{M}_n)$. La structure $MAX$ peut être définie également comme la structure duale de $MIN$. On a en effet

$$MAX(X, \| \ \|_n)^* = MIN(X^*, \| \ \|_n^*)$$
$$MIN(X, \| \ \|_n)^* = MAX(X^*, \| \ \|_n^*)$$

complètement isométriquement. Ceci est une conséquence du fait que la structure $MIN$ est *injective* dans le sens qu'un plongement $n$-isométrique d'un $M_n$-espace $(X, \| \ \|_n)$ dans un autre $M_n$-espace $(Y, \| \ \|_n)$ induit un plongement complètement isométrique de $MIN(X, \| \ \|_n)$ dans $MIN(Y, \| \ \|_n)$. En particulier, on a l'identité complètement isométrique $MIN(X^{**}, \| \ \|_n^{**}) = MIN(X, \| \ \|_n)^{**}$. On peut aussi caractériser les structures $MIN$ et $MAX$ comme les structures universelles pour les propriétés d'extension suivantes.

Pour tout espace d'opérateurs $Y$ et tout application $n$-bornée $u : Y \to (X, \| \|_n)$ on a que $u : Y \to MIN(X, \| \|_n)$ est complètement bornée avec $\|u\|_{cb} \leq \|u\|_n$.

Pour tout espace d'opérateurs $Y$ et tout application $n$-bornée $u : (X, \| \|_n) \to Y$ on a que $u : MAX(X, \| \|_n) \to Y$ est complètement bornée avec $\|u\|_{cb} \leq \|u\|_n$.

Après la caractérisation des sous-espaces de $C(K; \boldsymbol{M}_n)$ de la section précédente on donne dans la section I.4 une caractérisation des quotients des sous-algèbres de $C(K; \boldsymbol{M}_n)$ analogue au lemme de Craw.

**Proposition 2.** *Une algèbre de Banach $X$ est isomorphe à un quotient d'une sous-algèbre de $C(K; \boldsymbol{M}_n)$ si et seulement si il existe une constante $C$ telle que pour tout entier $m$ et tout polynôme non-commutatif à $m$ variables $P$ on a pour $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ avec $\|x_i\| \leq C$ l'inégalité*

$$\|P(x_1, x_2, \dots, x_m)\|_X \leq \sup \left\{ \|P(u_1, u_2, \dots, u_m)\|_{\boldsymbol{M}_n} \mid u_i \in \boldsymbol{M}_n \text{ unitaires} \right\}$$

Dans la section I.5 on développe une théorie des produits tensoriels raisonnables analogues aux cross-normes raisonnables sur les produits tensoriels des espaces de Banach. Pour munir le produit tensoriel de deux $M_n$-espaces $X$ et $Y$ d'une norme «naturelle», c'est-à-dire d'une norme qui se comporte bien par rapport aux $n$-normes données sur les espaces de base, il convient d'employer le produit tensoriel de Haagerup. Pour des matrices $x \in M_n(X)$ et $y \in M_n(Y)$ on note $x \odot y \in M_n(X \otimes Y)$ la matrice $\left[\sum_k x_{ik} \otimes y_{kj}\right]_{i,j}$ et on dit qu'une norme $\alpha$ sur $M_n(X \otimes Y)$ est *raisonnable* si elle vérifie la condition (R) et si on a en plus $\alpha(x \odot y) \leq \|x\|_n \, \|y\|_n$ pour $x \in M_n(X)$ et $y \in M_n(Y)$. Ensuite on montre que parmi ces normes il y a une norme raisonnable minimale injective $\| \|_{\vee,n}$ et une norme raisonnable maximale projective $\| \|_{\wedge,n}$ qui ont des propriétés analogues aux propriétés des normes tensorielles injectives et projectives classiques, avec lesquelles elles coïncident si $n = 1$.
Pour $u = [u_{kl}] \in M_n(X \otimes Y)$ ces normes sont données par les formules

$$\|u\|_{\vee,n} = \sup \left\{ \left\| [\langle (f \odot g)_{ij}, u_{kl} \rangle]_{ik,jl} \right\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \mid \|f\|_{M_n(X^*)} \leq 1,\ \|g\|_{M_n(Y^*)} \leq 1 \right\}$$

$$\|u\|_{\wedge,n} = \inf \left\{ \left\| \sum \alpha_i \alpha_i^* \right\|^{1/2} \left\| \sum \beta_i^* \beta_i \right\|^{1/2} \max \|x_i\|_n \max \|y_i\|_n \;\middle|\; u = \sum \alpha_i \cdot x_i \odot y_i \cdot \beta_i,\ \alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n, x_i \in \boldsymbol{M}_n(X), y_i \in \boldsymbol{M}_n(Y) \right\}$$

qui convergent vers les deux formules équivalentes du produit tensoriel de Haagerup.
La section I.6 contient des outils pour étudier la théorie locale des $M_n$-espaces et leurs structures d'espaces d'opérateurs. Rappelons qu'un espace d'opérateurs $X$ est dit *homogène* si $CB(X, X) = B(X, X)$ isométriquement. On observe que pour un espace d'opérateurs homogène $(X, \{\| \|_n\})$ les espaces $MIN(X, \| \|_n)$ et $MAX(X, \| \|_n)$ le sont aussi et qu'ils sont donc accessibles aux calculs assez explicites, comme on verra dans la section I.7. Puis on montre des versions plus générales des résultats de Zhang **[61]** qui permettront notamment d'étudier les $M_n$-espaces hilbertiens. On établie également un lien avec la constante $d_{S\mathcal{K}}$ qui a été introduite dans **[48]**, et que l'on peut interpréter de la manière suivante :

$$d_{S\mathcal{K}}(X) = \inf_k d_{cb}(X, MIN(X, \| \|_k)).$$

Les valeurs connues de ce paramètre pour certaines espaces d'opérateurs donneront des estimations asymptotiques dans la section qui suit.
La section I.7 est consacrée aux calculs des distances de Banach-Mazur entre plusieurs espaces d'opérateurs «classiques» et les constantes de Paulsen généralisées de leurs structures minimales et maximales. En particulier on donne des estimations pour les espaces

d'opérateurs hilbertiens homogènes $MIN(\ell_2^n)$, $MAX(\ell_2^n)$, $R_n$, $C_n$, $R_n \cap C_n$, $R_n + C_n$ et $OH_n$. On obtient également une généralisation d'un résultat de M. Junge et G. Pisier qui montre que sur un $M_n$-espace $(X, \| \|_n)$ de dimension supérieure à $16\,n$ on ne peut pas avoir unicité de la structure d'espace d'opérateurs. L'exemple de $R_n$ et $C_n$ dont la structure d'espace d'opérateurs est déterminée par la $n$-structure montre que à constante près cette estimation est optimale.

**Sommes d'unitaires et analyse harmonique sur le groupe libre.** Dans la deuxième partie on fait une étude de l'inégalité suivante due à Gilles Pisier (cf. [**45**, Theorem 1] et [**29**] pour une application). Notons $g_i$ les générateurs du groupe libre et $\lambda(g_i)$ leurs images par la représentation régulière gauche. Alors on a pour toute suite finie d'opérateurs unitaires $u_i \in B(H)$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes \overline{u_i} \right\|_{\min} \geq \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda(g_i) \right\|_{\min} = 2\sqrt{n-1} \tag{1}$$

Ceci généralise une inégalité obtenue pour les représentations régulières des groupes discrets par H. Kesten [**30**]. On étudie le principe combinatoire sous-jacent et on donne des versions plus générales. Ensuite on essaie de caractériser les unitaires pour lesquelles on a égalité dans l'inégalité mentionné ci-dessus. On donne une caractérisation complète pour le cas où les $u_i$ viennent de la représentation régulière d'un groupe discret ainsi qu'un contre-exemple à une conjecture de Pisier qui montre que dans le cas général une caractérisation sera plus compliquée. Ce contre-exemple a été trouvé en collaboration avec Philippe Biane.
Voici un résumé.
Dans la section II.1 on donne quelques exemples qui sont accessibles aux calculs explicites et qui exhibent la propriété combinatoire qui distingue les générateurs de la $C^*$-algèbre réduite du groupe libre.
Dans la section II.2 on introduit la notion d'une *famille d'opérateurs avec moments alternés non-négatifs* qui est un analogue non-commutatif des coefficients scalaires non-négatifs. Soit $A$ une $C^*$-algèbre et soit $\varphi$ un état sur $A$. Alors on dit qu'une famille d'opérateurs $(a_i)_{i \in I}$ a des moments alternés mixtes non-négatifs si pour tout entier $m$ et tout choix d'indices $i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_m, j_m \in I$ on a

$$\varphi(a_{i_1}^* a_{j_1} a_{i_2}^* a_{j_2} \cdots a_{i_m}^* a_{j_m}) \geq 0.$$

Cette propriété est particulièrement intéressante si elle est satisfaite pour une *famille fidèle d'états*. On dit qu'une famille d'états $S$ sur $A$ est *fidèle* si l'application complètement positive $\Phi_S : A \to \ell_\infty(S)$, $a \to (\varphi(a))_{\varphi \in S}$ est fidèle. Leur intérêt vient du lemme suivant.

**Lemme 3.** *Soient $A$ et $B$ des $C^*$-algèbres et soit $\Phi : A \to B$ une application complètement positive fidèle. Alors on peut calculer la norme d'un élément $a \in A$ à l'aide de $\Phi$ comme suit.*

$$\|a\|_A = \lim_{p \to \infty} \left\| \Phi\big((a^* a)^p\big) \right\|^{\frac{1}{2p}}$$

Si $\Phi$ vient d'une famille fidèle d'états cette formule devient particulièrement simple et permet d'établir des versions des inégalités de Kesten et de Pisier mentionnées ci-dessus à valeurs vectorielles.

**Proposition 4.** *Soient $A$, $S$ comme ci-dessus.*

(i) *Soient $u_i \in A$ des unitaires avec moments alternés mixtes non-négatifs par rapport à la famille $S$, alors on a pour toute suite de nombres $\alpha_i$ non-négatifs*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \lambda(g_i)\Big\| \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, u_i \otimes \overline{u_i}\Big\|_{\min} \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, u_i\Big\|.$$

(ii) *Soit $(a_i) \subseteq A$ une famille à moments alternés mixtes non-négatifs et soient $v_i$ des unitaires d'une $C^*$-algèbre $B$ dont les moments alternés mixtes par rapport à un certain état $\psi$ sur $B$ sont non-négatifs. Alors on a*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes v_i\Big\| \geq \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \lambda(g_i)\Big\|.$$

(iii) *Soient $a_i$ comme dans* (ii) *et soient $w_i$ des unitaires dans $B(H)$ tels que $\|\sum_{i=1}^{n} w_i\| = n$. Alors on a*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes w_i\Big\|_{\min} = \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i\Big\|.$$

Dans la section II.3 on caractérise partiellement les unitaires pour lesquelles on a égalité dans (1).

**Théorème 5.** *Soit $G$ un groupe discret et soit $\{ t_1, t_2, \ldots, t_n \}$ un sous-ensemble de $G$ de cardinalité $n \geq 3$ tel que pour une certaine suite de nombres strictement positifs $\alpha_i$ on a*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \lambda_G(t_i)\Big\|_{C^*_\lambda(G)} = \Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \lambda(g_i)\Big\|_{C^*_\lambda(\mathbf{F}_n)}$$

*où $\lambda_G$ est la représentation régulière gauche de $G$. Alors l'ensemble $\{ t_1, t_2, \ldots, t_n \}$ a la* propriété de Leinert, *c'est-à-dire il existe des éléments $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1} \in G$ tels que $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ engendrent une copie du groupe libre $\mathbf{F}_{n-1}$ dans $G$ et tels que $\{ t_1, t_2, \ldots, t_n \} = \{ s_0, s_0 s_1, s_0 s_2, \ldots, s_0 s_{n-1} \}$.*

Ceci généralise un résultat de Kesten qui a montré le même énoncé pour les ensembles symétriques, cf. [**30**]. Le lien avec l'inégalité (1) est donné par le principe de Fell qui entraîne que les représentations $g \mapsto \lambda(g) \otimes I$ et $g \mapsto \lambda(g) \otimes \overline{\lambda(g)}$ sont unitairement équivalentes. Dans la section II.4 on exhibe des unitaires $u_i$ qui vérifient d'une part

$$\Big\|\sum_{i=1}^{r} \big(u_i \otimes \overline{u_i} + u_i^* \otimes \overline{u_i^*}\big)\Big\| = 2\sqrt{2r-1}$$

et d'autre part

$$\Big\|\sum_{i=1}^{r} (u_i + u_i^*)\Big\| > 2\sqrt{2r-1}.$$

Ceci résout une conjecture de G. Pisier énoncé dans [**45**]. Néanmoins, la conjecture suivante reste ouverte.

**Conjecture 6.** Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des unitaires dans une $C^*$-algèbre $A$ ayant des moments alternés mixtes non-négatifs par rapport à une famille fidèle d'états et tels que

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} u_i\Big\| = 2\sqrt{n-1}$$

alors l'espace d'opérateurs engendré par $u_i$ est (complètement) isométrique à celui engendré par $\lambda(g_i)$.

Elle fait l'objet de la section II.5 et avec des méthodes combinatoires on obtient les résultats suivants.

**Proposition 7.** *Soit $A$ une $C^*$-algèbre.*

*(i) Soient $a, u \in A$ avec $u$ unitaire. Alors si les moments alternés mixtes de $a$ et $u$ par rapport à une famille fidèle d'états sont non-négatifs, on a*

$$\|a+u\| \geq \frac{1}{2}\left(\|a\| + \sqrt{\|a\|^2+4}\right).$$

*(ii) Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n \in A$ des unitaires à moments alternés mixtes par rapport à une famille fidèle d'états. Alors si pour $2 \leq m \leq n$ on note $T_m = \sum_1^m u_i$, $y_m = \|T_m\|^2 - 2(m-1)$, et*

$$w_m = y_m + \sqrt{y_m^2 - 4(m-1)^2} = \|T_m\|^2 - 2(m-1) + \|T_m\|\sqrt{\|T_m\|^2 - 4(m-1)}$$

*on a*

$$w_m \leq w_n.$$

*En particulier, si l'on a $\left\|\sum_1^n u_i\right\| = 2\sqrt{n-1}$ alors*

$$\left\|\sum_{i=1}^m u_i\right\| \leq 2\sqrt{m-1+\frac{(n-m)^2}{4(n-1)}}.$$

Pour la démonstration on développe une théorie des fonctions radiales non-symétriques analogue à la théorie des fonctions radiales sur le groupe libre, cf. [**11**], [**12**] et [**51**].
Enfin dans la section II.6 on donne une formule analogue à celle de C. Akemann et P. Ostrand pour estimer les normes des opérateurs libres à valeurs opérateurs.

**Proposition 8.** *(i) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des opérateurs dans l'adhérence des opérateurs invertibles sur un espace de Hilbert. Alors on a*

$$\left\|\sum_{i=1}^n \lambda(g_i)\otimes a_i\right\|_{\min} \leq \inf_{s>0}\left\|\sum_{i=1}^n \left(s^2 I + a_i a_i^*\right)^{1/2} - (n-2)sI\right\|^{1/2} \times$$
$$\times \left\|\sum_{i=1}^n \left(s^2 I + a_i^* a_i\right)^{1/2} - (n-2)sI\right\|^{1/2}$$

*(ii) Pour des opérateurs $a_i \in B(H)$ arbitraires on a*

$$\left\|\sum_{i=1}^n \lambda(g_i)\otimes a_i\right\|_{\min} \leq 2\sqrt{1-\frac{1}{n}}\left(\frac{\|\sum_{i=1}^n a_i a_i^*\| + \|\sum_{i=1}^n a_i^* a_i\|}{2}\right)^{1/2}$$
$$\leq 2\sqrt{1-\frac{1}{n}}\max\left\{\left\|\sum_{i=1}^n a_i a_i^*\right\|^{1/2}, \left\|\sum_{i=1}^n a_i^* a_i\right\|^{1/2}\right\}$$

Cette formule fournit la constante optimale dans une inégalité dans [**26**]. Sa démonstration suit la démonstration simplifiée de la formule de Akemann due à M.A. Picardello et T. Pytlik [**44**]. Celle-ci s'adapte aisément aux coefficients non-commutatifs inversibles. Pour montrer (ii) on fait appel à la théorie des espaces d'opérateurs. Malheureusement des exemples montrent que cette formule n'est qu'une estimation et il reste à trouver une formule exacte[2].

[2] Au moment de la réliure de cette thèse une formule est trouvée et fera l'objet d'un article en préparation.

Les sections II.3 *«A characterization of the Leinert property»* et II.6 *«Free operators with operator coefficients»* paraîtront sous les mêmes titres dans *Proceedings of the American Mathematical Society* et *Colloquium Mathematicum* respectivement.