Kapitel 5

Integralrechnung

Neben der Differentialrechnung ist die Integralrechnung die zweite tragende Säule der Analysis, deren Fundament natürlich nach wie vor Konvergenz und Grenzwertbegriff sind.

5.1 Das Integral (Grundlagen)

5.1.1 Standardintegrale

Eine Integraltabelle der elementaren Funktionen ergibt sich unmittelbar als Umkehrung der Ableitungstabelle. Dabei erhält man die folgenden wichtigen Beziehungen:

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
x^α ; $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\sinh x$	$\cosh x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\cosh x$	$\sinh x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\begin{cases} \arctan x + C \\ -\operatorname{arccot} x + C \end{cases}$

Eine wichtige Rolle bei der Integration von Wurzelausdrücken spielen auch die Areafunktionen (bei denen es nötig sein kann, den Wertebreich zu beachten):

$$\boxed{\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) && = \operatorname{Arsinh} x + C \\
\int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2}\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C && = \begin{cases} \operatorname{Artanh} x + C & \text{für } x \in (-1,1) \\ \operatorname{Arcoth} x + C & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases} \\
\int \tfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C && = \begin{cases} \operatorname{Arcosh} x + C & \text{für } x \in (1,+\infty) \\ -\operatorname{Arcosh}(-x) + C & \text{für } x \in (-\infty,-1) \end{cases}
\end{aligned}}$$

Weitere Integrale, die des öfteren auftreten und die man sich zwar nicht zu merken braucht, aber doch entsprechend griffbereit haben sollte, sind beispielsweise (in den entsprechenden Gültigkeitsintervallen):

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$-\coth x + C$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\tanh x$	$\ln\cosh x + C$	$\coth x$	$\ln\lvert\sinh x\rvert + C$

Aus der Kettenregel des Differenzierens folgt sofort eine äußerst praktische Integrationsbeziehung: Ist nämlich $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist $\frac{1}{a}F(ax+b)$ eine Stammfunktin von $f(ax+b)$, also kurz:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \longrightarrow \quad \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

5.2 Integrationstechniken

Differenzieren ist ein Handwerk, Integrieren eine Kunst

(sprichwörtlich)

Nach dem vorigen Abschnitt, der eher die Grundlagen der Integralrechnung behandelt hat, geht es nun darum, wie man zu einer vorgegebenen Funktion f tatsächlich eine Stammfunktion ermittelt. Doch während die Ableitung nach einer Handvoll einfacher Regeln gebildet wird, gibt es für das Integrieren kein Patentrezept. Erfahrung und Intuition spielen eine entscheidende Rolle, und es kann immer passieren, daß man auf ein Integral stößt, das sich überhaupt nicht mittels elementarer Funktionen ausdrücken läßt. Trotzdem gibt es einige Techniken, die oft sehr hilfreich sind und mit denen sich viele Integrale, auf die man in der alltäglichen Rechnung (oder bei Prüfungen) stößt, bewältigen lassen. Auf jeden Fall beherzigen sollte man eine Merkregel für unbestimmte Integrale: **Integrationskonstante nicht vergessen!**

Elementare Umformungen

Schon mittels der grundlegenden Rechenregeln für Integrale kann man sich das Leben oft wesentlich leichter machen:

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))\;dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx} \quad \text{– auch} \quad \int \frac{f(x)+g(x)}{h(x)}\,dx = \int \frac{f(x)}{h(x)}\,dx + \int \frac{g(x)}{h(x)}\,dx$$

$$\boxed{\int c\,f(x)\,dx = c\cdot\int f(x)\,dx} \quad \text{– auch} \quad \int f(x)\,dx = \frac{1}{a}\cdot\int a\,f(x)\,dx$$

Auch wenn es die Sache auf den ersten Blick komplizierter macht, kann das Erweitern des Integranden manchmal durchaus eine Hilfe sein:

Bsp: $I = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\cdot\int \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx$. Nun ist aber $\left(\sqrt{x+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$,
also ergibt sich für das Integral unmittelbar $I = 2\cdot\sqrt{x+1}+C$.

Oft nützlich sind auch manche trigonometrischen Identitäten, besonders solche, mit denen ein Produkt (schwer zu integrieren) in eine Summe oder Differenz (leicht zu integrieren) umgewandelt werden kann. Manchmal kann es auch hilfreich sein, sich an die Definitionsgleichungen bestimmter Funktionen zu erinnern.

Bsp: $I = \int \sin x\;\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{4}+C.$

Bsp: $I = \int e^x\;\cosh x\,dx = \int e^x \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(e^{2x}+1\right)\,dx = \frac{e^{2x}}{4}+\frac{x}{2}+C.$

Logarithmische Integration

Als Umkehrung der Ableitungsregel $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ folgt: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|+C.$

Möglicherweise muß dafür der Integrand durch elementare Umformungen zuvor erst auf eine entsprechende Form gebracht werden.

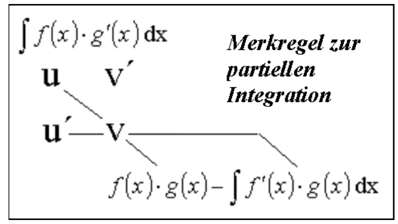
Bsp: $I = \int \frac{x+2}{x^2+4x+9}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+9}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+9|+C.$

5.2.1 Partielle Integration

Aus jeder Ableitungsregel folgt umgekehrt eine Integrationsregel. Im Fall der Produktregel das die partielle Integration (auch Produktintegration genannt):

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx$$

Auf den ersten Blick wirkt dieses Konzept nicht unbedingt überzeugend, denn erstens muss man sich auch weiter mit einem Integral herumschlagen, und zweitens muss man zu einem Faktor des Integranden (nämlich v') bereits eine Stammfunktion kennen. Gerade wenn man es mit Produkten von elementaren Funktionen zu tun hat, ist aber der zweite Punkt meist überhaupt kein Problem.



In vielen Fällen führt die partielle Integration dann tatsächlich zu einfacheren Integralen.Natürlich sollte man einen Blick dafür haben, welchen Teil des Integranden man besser als u, welchen als v' wählt.

Bsp: $$I = \int x^2\, e^x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right| = x^2\, e^x - 2 \int x\, e^x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right| =$$
$$= x^2\, e^x - 2 \left(x\, e^x - \int e^x\, dx \right) = x^2\, e^x - 2x\, e^x + 2e^x + C$$

Die Konvention, die Faktoren der partiellen Integration zwischen senkrechte Striche zu schreiben, ist nicht verbindlich, sie dient aber wesentlich der Übersicht. Unter Umständen kann es durchaus nötig sein, den Integranden erst auf Produktform zu bringen, um die partielle Integration überhaupt anwenden zu können. Das zeigt sich etwa im Paradebeispiel für diese Art der partielle Integration. Auf den ersten Blick scheint es sich hier um eine Verkomplizierung zu handeln, aber, wie so oft, trügt auch hier der Schein:

Bsp: $$I = \int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x}\, x\, dx =$$
$$= \ln x \cdot x - \int dx = \ln x \cdot x - x + C$$

Auch bei bestimmten Integralen lässt sich die partielle Integration natürlich anwenden, man braucht nur jeweils die Grenzen richtig einzusetzen:

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx$$

Noch eine Besonderheit gibt es bei der partiellen Integration zu beachten: In manchen Fällen kann es passieren, dass die partielle Integration nie zu einer integralfreien Form führt – und dass sich das gesuchte Integral dennoch mit dieser Methode berechnen lässt. Dies ist der Fall, wenn man nach (vielleicht mehrfacher) partieller Integration wieder das Ausgangsintegral erhält. Nun hat man nämlich einfach eine algebraische Gleichung für das gesuchte Integral erholten, die man nur noch lösen muss.

Bsp: Zu berechnen ist das Integral $I = \int \sin x\, \cos\, dx$. Partielle Integration liefert

$$I = \int \sin x\, \cos x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right| = \sin^2 x - \int \sin x\, \cos\, dx = \sin^2 x - I$$

und damit erhält man $2I = \sin^2 x$, also $\displaystyle\int \sin x\, \cos\, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$.

5.2.2 Übungsaufgaben – partielle Integration

Man berechne das Integral $I = \int x \sin x \, dx$.

$$I = \int x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int \frac{x}{\cosh^2 x} \, dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int x \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \left| \begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{1}{\cosh^2 x} & v = \tanh x \end{array} \right| = x \cdot \tanh x - \int \tanh x \, dx = \\ &= x \cdot \tanh x - \int \frac{\sinh x}{\cosh x} \, dx = x \cdot \tanh x - \ln \cosh x + C \end{aligned}$$

Notwendig ist dabei nur die Kennnis des (Fast-)Standardintegrals $\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \tanh x + C$ und die Anwendung der logarithmischen Integration. (Die Betragsstriche sind hier unnötig, da der Cosinus hyperbolicus ohnehin nie negativ werden kann.)

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int \frac{\ln(x^2)}{x^2} \, dx$.

$$I = \int \ln(x^2) \frac{1}{x^2} \, dx = \left| \begin{array}{cc} u = \ln(x^2) & u' = \frac{2x}{x^2} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{\ln(x^2)}{x} + \int \frac{2}{x^2} \, dx = -\frac{\ln(x^2)}{x} - \frac{2}{x} + C$$

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} x \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \left| \begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{1}{\sin^2 x} & v = -\cot x \end{array} \right| = -x \cot x \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot x \, dx = \\ &= \left[-x \cot x + \ln|\sin x| \right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6} + \ln 2 \end{aligned}$$

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int_0^1 r^2 \sqrt{1-r} \, dr$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r} \, dr = \left| \begin{array}{cc} u = r^2 & u' = 2r \\ v' = (1-r)^{1/2} & v = -\frac{2}{3}(1-r)^{3/2} \end{array} \right| = \\ &= \underbrace{-\frac{2r^2}{3}(1-r)^{3/2} \Big|_0^1}_{=0} + \frac{4}{3} \int_0^1 r \, (1-r)^{3/2} \, dr = \left| \begin{array}{cc} u = r & u' = 1 \\ v' = (1-r)^{3/2} & v = -\frac{2}{5}(1-r)^{5/2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{4}{3} \left\{ \underbrace{-\frac{2r}{5}(1-r)^{5/2} \Big|_0^1}_{=0} + \frac{2}{5} \int_0^1 (1-r)^{5/2} \, dr \right\} = -\frac{4}{3} \, \frac{2}{5} \, \frac{2}{7} \, (1-r)^{7/2} \Big|_0^1 = \frac{16}{105} \end{aligned}$$

5.2.3 Substitution (Variablentransformation)

Die partielle Integration ist bei vielen Integralen hilfreich, das schlagkräftigste Verfahren zum Auffinden einer Stammfunktion ist aber die Substitution (Variablentransformation), die sich als Umkehrung der Kettenregel ergibt.

Beispiel: Man berechne das Integral $\int \cos x \, e^{\sin x} \, dx$.

Das Integral sieht vielleicht schlimm aus, aber keine Panik. Einfacher wäre die Rechnung sicher, wenn man es nicht mit dem Ausdruck $e^{\sin x}$ zu tun hätte, sondern nur mit e^u. Nun kann man sich aber abhelfen, indem man einfach eine neue Variable einführt: $u = \sin x$. Damit erhält das Integral die Form $\int \cos x \, e^u \, dx$. Noch ist damit nicht viel gewonnen, schließlich muß weiter über x integriert werden, nicht über u. Nun sagt aber die Kettenregel für Differentiale: $dx = \frac{dx}{du} du$, wenn $x = x(u)$ ist. Eine weitere Regel sagt $\frac{dx}{du} = 1/\frac{du}{dx}$. Also berechnet man einmal $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, damit ergibt sich

$$dx = \frac{dx}{du} \, du = \left(\frac{du}{dx} \right)^{-1} du = \frac{du}{\cos x}.$$

Diesen Ausdruck kann man für dx einsetzen und so das Integral auf eine wirklich angenehme Form bringen: $\displaystyle\int \cos x \, e^{sinx} \frac{du}{\cos x} = \int e^u \, du = e^u + C$. Jetzt kann man die ursprüngliche Variable wieder einführen, die Lösung des Integrals lautet also $e^{\sin x} + C$. Im allgemeinen werden natürlich nicht alle x im Integranden wegfallen, in solchen Fällen muß man die Umkehrfunktion $x = x(u)$ einsetzen. In diesem Beispiel wäre $x = \arcsin u$.

Die strenge Begründung dieser Vorgehensweise liegt wie erwähnt in der Umkehrung der Kettenregel:

$$\int f(x) \, dx = \int f(x(u)) \, \frac{dx}{du} \, du = \int g(u) \, du$$

und sie ist nur dann sicher einsetzbar, wenn im relevanten Bereich überall $u' \neq 0$. Tatsächlich ist die Substitution ein äußerst nützliches Handwerkszeug, um Integrale zu berechnen oder sie zumindest in eine Form zu bringen, in der sie numerisch gut handzuhaben sind. Die kochrezeptartige Vorgehensweise ist dabei:

- Den Ausdruck im Integranden suchen, der so aussieht, als würde er bei der Integration den meisten Ärger machen, und ihn durch eine neue Variable (etwa $u = u(x)$) ersetzen.
- Entweder $\frac{dx}{du}$ oder $\frac{du}{dx}$ bilden, daraus (formal wie aus einer algebraischen Gleichung) das Differential dx bestimmen und in das Integral einsetzen. Eventuell die Integrationsgrenzen umrechnen.
- Alle noch verbliebenen x durch die Umkehrfunktion $x = x(u)$ ersetzen.
- Das neue (hoffentlich einfachere) Integral lösen (unter Umständen auch durch noch eine Substitution) oder im schlimmsten Fall einen ganz anderen Weg suchen.

Mehr als bei jeder anderen Integrationstechnik ist bei der Substitution Erfahrung der Schlüsselfaktor zur effizienten Anwendung. Gerade am Anfang ist es oft nicht leicht zu erkennen, welchen Ausdruck man am besten substituieren soll – hier hilft wohl nur das Rechnen von möglichst vielen und unterschiedlichen Beispielen. Wie bei der partiellen Integration ist übrigens auch bei der Substitution eine praktische Kurzschreibweise mit senkrechten Strichen verbreitet.

Substitution mit Grenzen

Auch bestimmte Integrale kann man mittels Substitution lösen, allerdings muß man dabei folgendes beachten: Substituiert man im Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ die Integrationsvariable, muss man auch die Grenzen entsprechend transformieren. Die neuen Grenzen sind $c = u(a)$ und $d = u(b)$. Man erhält also das Integral $\int_c^d g(u)\,du$. Eine andere Möglichkeit ist, nach dem Lösen des Integrals, aber noch vor dem Einsetzen der Grenzen die ursprünglichen Variable mitsamt ursprünglichen Grenzen wieder einzuführen.

Beispiel: Wir bestimmen das Integral $I = \int_1^e \frac{dx}{x\,(1+\ln x)}$:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \frac{dx}{x\,(1+\ln x)} = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & 1 \to 0; \quad e \to 1 \\ x = e^u & dx = \frac{dx}{du}\,du = e^u\,du \end{array} \right| = \\ &= \int_0^1 \frac{e^u\,du}{e^u\,(1+u)} = \int_0^1 \frac{du}{1+u} = \ln|1+u|\Big|_0^1 = \ln 2 \end{aligned}$$

Alternativ hätte man natürlich auch die Grenzen nicht berechnen brauchen, dafür dann aber rücksubstituieren müssen:

$$I = \int_B \frac{du}{1+u} = \ln|1+u|\Big|_B = \ln|1+\ln x|\Big|_1^e = \ln 2$$

Dabei bezeichnet B den nicht näher bestimmte Integrationsbereich in der neuen Variablen u.
Beispiel: Nun ermitteln wir das Integral $I = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x & 0 \to 1; \quad 1 \to e \\ x = \ln u & dx = \frac{dx}{du}\,du = \frac{1}{u}\,du \end{array} \right| = \int_1^e \frac{u}{(1+u)^2}\,\frac{du}{u} = \\ &= \int_1^e (1+u)^{-2}\,du = -(1+u)^{-1}\Big|_1^e = -\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e} \end{aligned}$$

Die Substitution $x \to u(x)$ kann allerdings dann ihre Tücken haben, wenn u keine injektive Funktion von x ist. In diesem Fall gibt es einerseits keine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion $x(u)$, andererseits gibt es (im Falle des bestimmten Integrals) bei den Integrationsgrenzen Probleme. Hier ist es meist am besten, die Integration auf mehrere Intervalle aufzuteilen, in denen u dann jeweils injektiv ist. (Das ist sicher der Fall, wenn dort $u' \neq 0$ ist.)

Beispiel: Im Integral $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\,dv$ substituieren wir $e = v^2$. Das ergibt $v = \pm\sqrt{e}$ und für das Differential $\frac{de}{dv} = 2v$, also $dv = \frac{de}{2v} = \frac{de}{\pm 2\sqrt{e}}$. Nun betrachten wir die v-Intervalle $(-\infty, 0)$ und $(0, +\infty)$ getrennt, im ersten Fall kommt das negative Vorzeichen der Wurzel zum Tragen, im zweiten das positive [1]:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\,dv = \int_{-\infty}^{0} f(v)\,dv + \int_0^{+\infty} f(v)\,dv = -\int_{+\infty}^{0} f(-\sqrt{e})\,\frac{de}{2\sqrt{e}} + \int_0^{+\infty} f(\sqrt{e})\,\frac{de}{2\sqrt{e}} = \\ &= \int_0^{+\infty} f(-\sqrt{e})\,\frac{de}{2\sqrt{e}} + \int_0^{+\infty} f(\sqrt{e})\,\frac{de}{2\sqrt{e}} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{f(\sqrt{e}) + f(-\sqrt{e})}{\sqrt{e}}\,de \end{aligned}$$

---

[1] Dieses Beispiel entspricht formal dem in der Physik nicht seltenen Fall, dass von einer Geschwindigkeits- auf eine Energievariable umgerechnet wird, daher auch die Bezeichnungen v und e.

5.2.4 *Übungsaufgaben – Substitution*

Man bestimme das Integral $I = \displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$.

Nachdem der Logarithmus als Argument des Cosinus am störendsten aussieht, substituieren wir:

$$I = \int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\,du \end{array} \right| = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(\ln x) + C$$

Man bestimme das Integral $I = \displaystyle\int \cos\left(e^{\sin x}\right)\,e^{\sin x}\,\cos x\,dx$

Partielle Integration wird hier kaum weiterhelfen, also versuchen wir eine Substitution:

$$\begin{aligned} I &= \int \cos\left(e^{\sin x}\right)\,e^{\sin x}\,\cos x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \sin x \\ du = \cos x\,dx \end{array} \right| = \\ &= \int \cos\left(e^{u}\right)\,e^{u}\,du = \left| v = e^u, \quad du = \frac{dv}{e^u} \right| = \\ &= \int \cos v\,dv = \sin v + C = \sin\left(e^u\right) + C = \sin\left(e^{\sin x}\right) + C \end{aligned}$$

Natürlich hätte man (mit dem entsprechenden prophetischen Blick, der sich nach dem Rechnen einiger Beispiele fast automatisch einstellt) auch sofort $v = e^{\sin x}$ substituieren können.

Man bestimme das Integral $I = \displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\,dx$

Die naheliegendste Substitution ist natürlich $u = e^x$:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\,dx = \left| \begin{array}{c} u = e^x \\ du = e^x\,dx \end{array} \right| = \int \frac{u}{u + \frac{1}{u}}\,\frac{du}{u} = \\ &= \int \frac{u}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1} == \frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right| + C \end{aligned}$$

Man bestimme das Integral $I = \displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

Hier substituieren wir für den Logarithmus:

$$I = \int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\,du \end{array} \right| = \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C$$

Man bestimme das Integral $I = \displaystyle\int e^x\,\cosh(e^x)\,e^{(e^x)}\,dx$

Hier substituiert man $u = e^x$:

$$\begin{aligned} I &= \int e^x\,\cosh(e^x)\,e^{(e^x)}\,dx = \left| \begin{array}{c} u = e^x \\ du = e^x\,dx \end{array} \right| = \int \cosh(u)\,e^u\,du = \frac{1}{2}\int \left(e^u + e^{-u}\right)\,e^u\,du = \\ &= \frac{1}{2}\int \left(e^{2u}+1\right)\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2u} + u\right] + C = \frac{1}{4}\left[e^{2e^x} + 2e^x\right] + C \end{aligned}$$

5.3 Integration rationaler Fkt.

5.3.1 Polynomdivision

Oft hat man es mit Integralen von rationalen Funktionen zu tun, also mit Integralen der Form $\int \frac{A(x)}{Q(x)}\, dx$, wobei A und Q Polynome in x sind. Wenn der Grad des Zählers $A(x)$ nicht bereits kleiner ist als der des Zählers $Q(x)$, ist der erste Schritt eine *Polynomdivision*. So wie man Polynome addieren, subtrahieren und multiplizieren kann, so kann man sie auch dividieren:

Bsp: $$\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)\,(x-1)}{x+1} = x-1$$

Im allgemeinen wird ein Polynom natürlich nicht ohne Rest durch ein anderes teilbar sein. Ganz allgemein: Ist $\operatorname{Grad} A \geq \operatorname{Grad} Q$, so gilt $\frac{A(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei B und P wiederum Polynome in x sind und $\operatorname{Grad} P < \operatorname{Grad} Q$ ist.

Natürlich ist die Anwendbarkeit der Polynomdivision nicht auf die Integration rationaler Funktionen beschränkt; auch in anderen Bereichen kann sie unter Umständen durchaus nützlich sein. Die konkrete Vorgangsweise läßt sich vielleicht am besten anhand eines Beispiels erklären:

Beispiel: *Man führe die Division* $(x^4+3x^3+2x^2-x+1)/(x^2-x+1)$ *aus.*
Die höchste Potenz von $Q(x) := x^2-x+1$ ist x^2, sie geht in die höchste Potenz von $A(x) := x^4+3x^3+2x^2-x+1$ (nämlich x^4) genau x^2-mal. Also schreibt man rechts vom Gleichheitszeichen x^2 hin und subtrahiert das x^2-fache von $Q(x)$ von $A(x)$.

$$\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 & +3x^3 & +2x^2 & -x & +1) & / \quad (x^2-x+1) = x^2 \\
-x^4 & +x^2 & -x^2 & & & \\
\hline
 & 4x^3 & +x^2 & -x & +1 &
\end{array}$$

Das übrig gebliebene erhaltene Polynom $\tilde{A}(x) = A(x) - x^2\,Q(x) = 4x^3+x^2-x+1$ hat einen um Eins kleineren Grad als A selbst. Da aber immer noch $\operatorname{Grad}\tilde{A} \geq \operatorname{Grad} Q$ ist, kann und muss man wieder dividieren: x^2 geht in $4x^3$ genau $4x$-mal:

$$\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 & +3x^3 & +2x^2 & -x & +1) & / \quad (x^2-x+1) = x^2+4x \\
-x^4 & +x^2 & -x^2 & & & \\
\cline{1-5}
 & 4x^3 & +x^2 & -x & +1 & \\
 & -4x^3 & +4x^2 & -4x & & \\
\cline{2-5}
 & & 5x^2 & -5x & +1 &
\end{array}$$

Einmal kann man noch dividieren und erhält:

$$\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 & +3x^3 & +2x^2 & -x & +1) & / \quad (x^2-x+1) = x^2+4x+5 \\
-x^4 & +x^2 & -x^2 & & & \\
\cline{1-5}
 & 4x^3 & +x^2 & -x & +1 & \\
 & -4x^3 & +4x^2 & -4x & & \\
\cline{2-5}
 & & 5x^2 & -5x & +1 & \\
 & & -5x^2 & +5x & -5 & \\
\cline{3-5}
 & & & & -4 &
\end{array}$$

Insgesamt weiß man also $\dfrac{x^4+3x^3+2x^2-x+1}{x^2-x+1} = x^2+4x+5-\dfrac{4}{x^2-x+1}$.

5.3.2 Partialbruchzerlegung

Die Partialbruchzerlegung ist für sich keine Integrationstechnik, sondern „nur“ eine Möglichkeit, rationale Funktionen in eine Form zu bringen, in der sie wesentlich leichter zu integrieren sind – meist reicht dann ein Blick in eine Tabelle der Standardintegrale. Natürlich ist Integration nicht der einzige Anwendungsbereich der Partialbruchzerlegung – sie kommt immer dann ins Spiel, wenn man rationale Funktionen in eine Form bringen will, in der sie leichter zu handhaben sind.

Ausgangspunkt ist, dass sich jedes Polynom mit Hilfe seiner Nullstellen x_k darstellen läßt:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)}$$

oder ausführlicher

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Bei den Nullstellen x_k handelt es sich im reellen Fall meist auch um reelle Größen, es können aber auch Paare von konjugiert komplexen Zahlen darunter sein; mehrfache Nullstellen müssen auch entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden. Nun zerlegt man den Nenner $Q(x)$ einer rationalen Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$, bei der $\operatorname{Grad} P < \operatorname{Grad} Q$ ist[2], mit Hilfe seiner Nullstellen in ein Produkt wie oben.

Bsp: $Q(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x - 3)(x + 1)$,

denn das Polynom hat die beiden Nullstellen $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$.

Nun kürzt man (wenn nötig) sowohl $P(x)$ als auch $Q(x)$ durch die Konstante a_n (im obigen Beispiel war $a_n = 2$) und erhält

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$$

Nun kann man ansetzen:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \ldots + \frac{K}{x - x_n}}$$

Die Koeffizienten A, B, … sind vorläufig noch unbestimmt. Eine Möglichkeit, sie zu ermitteln ist der Koeffizientenvergleich: Dazu multipliziert man die Gleichung auf beiden Seiten mit $Q(x)$ und erhält eine bruchfreie Form. Da es sich bei dieser Gleichung um eine Identität handelt, muss sie für alle x eine wahre Aussage ergeben. Das bedeutet, auf linker und rechter Seite muss bei der gleichen Potenz von x auch die gleiche Zahl stehen. So erhält man n Gleichungen für n Unbekannte.

Bsp: Wir zerlegen $R(x) := \frac{x}{x^2 - 2x - 3}$ in Partialbrüche:

$$\frac{x}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 1} \qquad x = A(x + 1) + B(x - 3)$$

$$x = Ax + A + Bx - 3B \qquad x = (A + B)x + A - 3B$$

$$A + B = 1 \qquad A - 3B = 0 \qquad A = \tfrac{3}{4}, B = \tfrac{1}{4}$$

$$\frac{x}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{4} \frac{1}{x - 3} + \frac{1}{4} \frac{1}{x + 1}$$

[2] Das erreicht man gegebenenfalls mit einer Polynomdivision.

Eine andere Möglichkeit ist, in die bruchfreie Gleichung beliebige Werte für x einzusetzen. Da die Gleichung ja eine Identität für alle x ist, muss sie auch für die eingesetzten Werte gelten. Damit kann man leicht so viele Gleichungen erhalten wie es Koeffizienten gibt, und aus diesem System alle Unbekannten bestimmen. Natürlich wird es zielführend sein, Werte einzusetzen, bei denen sich möglichst einfache Gleichungen ergeben, etwa Beispiel die Nullstellen von Q selbst (Polstellenmethode):

Bsp: Wir betrachten wieder $R(x) := \frac{x}{x^2-2x-3}$:

$$\frac{x}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} \qquad x = A\,(x+1) + B\,(x-3)$$

Einsetzen von $x = -1$ $\qquad -1 = -4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

Einsetzen von $x = 3$ $\qquad 3 = 4A \Rightarrow A = \frac{3}{4}$

$$\frac{x}{x^2+2x-3} = \frac{3}{4}\,\frac{1}{x-3} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+1}$$

Schließlich und endlich lassen sich diese Methode auch kombinieren und so entsprechend leitungsfähiger machen.

Mehrfache Nullstellen

Es kann vorkommen, dass mehrere Nullstellen des Nennerpolynoms zusammenfallen. So hat etwa $Q(x) = x^3 - x^2$ die Nullstellen $x = 0$ und $x = 1$. Die Null zählt aber hier doppelt (sie hat die Vielfachheit Zwei), denn schließlich muss man ja schreiben $Q(x) = x^2\,(x-1)$. In solchen Fällen muss man für die Nullstelle x_j mit der Vielfachheit k_j mehrere Terme ansetzen:

$$\frac{A}{x-x_j} + \frac{B}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{K}{(x-x_j)^{k_j}}$$

Für die Koeffizientenbestimmung kann man diesen Ansatz auch einfach mit $(x-x_j)^\ell$ multiplizieren, und $(\ell-1)$-mal nach x ableiten (mit $\ell = 1, \ldots, k_j$).

Komplexe Nullstellen

Auch ein Polynom mit rein reellen Koeffizienten kann komplex konjugierte Nullstellen haben. So hat zum Beispiel $Q(x) = x^2 + 1$ die beiden einzigen Nullstellen $x_1 = +i$ und $x_2 = \bar{x}_1 = -i$. Das Ansetzen der Partialbruchzerlegung funktioniert auch mit komplexen Nullstellen reibungslos, es gibt aber noch eine andere Methode:
Dazu setzt man statt $\dfrac{A}{x-x_j} + \dfrac{B}{x-\bar{x}_j}$ sofort $\dfrac{Cx+D}{x^2+p_jx+q_j}$ an, wobei $x^2 + p_jx + q_j = (x-x_j)\cdot(x-\bar{x}_j)$ ist. Die Techniken zur Koeffizientenbestimmung funktionieren hier analog und man erhält eine eindeutige reelle Partialbruchzerlegung. Zu dieser würde man auch gelangen, wenn man die komplex konjugierten Nullstellen nach der komplexen Partialbruchzerlegung wieder zu reellen Termen zusammenfasst.

Bsp: $Q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ läßt sich schreiben als $Q(x) = (x+2)\,(x^2+1)$.

$$\frac{P(x)}{x^3+2x^2+x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{x+i} \text{ oder } \frac{P(x)}{x^3+2x^2+x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Hat ein Term $x^2 + p_jx + q_j$ eine höhere Vielfachheit, so müssen auch hier bei der Partialbruchzerlegung höhere Potenzen berücksichtigt werden.

Die Terme, die man nach gelungener Partialbruchzerlegung erhalten hat, haben alle die Gestalt

$$\int \frac{A}{(x-r)^m}\,dx \qquad \text{oder} \qquad \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\,dx$$

mit $m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ und $p^2 < 4q$. Dabei handelt es sich ausschließlich um Integrale, für die entweder ein Blick in die Stammfunktionentabelle genügt oder die sich mit mäßig schwierigen Umformungen auf Standardform bringen lassen. Der Vollständigkeit und Bequemlichkeit halber werden an dieser Stelle trotzdem die benötigten Integrale direkt angegeben:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-r)^m} &= \begin{cases} \ln|x-r| & \text{für } m=1 \\ -\dfrac{1}{(m-1)\,(x-r)^{m-1}} & \text{für } m\geq 2 \end{cases} \\
\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} &= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} \\
\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} &= \frac{2x+p}{(m-1)\,(4q-p^2)\,(x^2+px+q)^{m-1}} \\
&\quad + \frac{2\,(2m-3)}{(m-1)\,(4q-p^2)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}} \qquad \text{für } m \geq 2 \\
\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx &= \frac{B}{2} \ln\left(x^2+px+q\right) + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} \\
\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\,dx &= -\frac{B}{2\,(m-1)\,(x^2+px+q)^{m-1}} \\
&\quad + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}} \qquad \text{für } m \geq 2
\end{aligned}$$

Beispiel: *Wir bestimmen das Integral* $I =$

5.3.3 Übungsaufgaben – Integration rationaler Funktionen

Man bestimme das Integral $I = \int_1^2 \frac{x-27}{x^3-2x^2-3x}\,dx.$

Nullsetzen des Nenners liefert: $x^3-2x^2-3x = x\,(x^2-2x-3) = 0$: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1+3}$

Partialbruchzerlegung: $\frac{x-27}{x^3-2x^2-3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1}$

$$x-27 = A\,(x-3)\,(x+1) + B\,x\,(x+1) + C\,x\,(x-3)$$

Polstellenmethode:

Polstellenmethode:	$x=0$:	$-27=-3A$	$A=9$
	$x=3$:	$-24=-12B$	$B=-2$
	$x=-1$:	$-28=4C$	$C=-7$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\frac{9}{x} - \frac{2}{x-3} - \frac{7}{x+1}\right) dx = \left[9\,\ln|x| - 2\,\ln|x-3| - 7\,\ln|x+1|\right]_1^2 = \\ &= 9\,(\ln 2 - \ln 1) - 2\,(\ln 1 - \ln 2) - 7\,(\ln 3 - \ln 2) = 18\,\ln 2 - 7\,\ln 3 \end{aligned}$$

Man bestimme das Integral $I = \int_0^1 \frac{x^2-6x-7}{(x-2)^2\cdot(x^2+1)}\,dx.$

Die Polynomdivision entfällt wegen Grad Zähler $= 2 < 4 =$ Grad Nenner.

Partialbruchzerlegung: $\frac{x^2-6x-7}{(x-2)^2\cdot(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \quad \Big|\cdot$ Nenner
$x^2-6x-7 = A\,(x-2)\,(x^2+1) + B\,(x^2+1) + (Cx+D)\,(x-2)^2$, nach Potenzen sortieren:
$x^2-6x-7 = (A+C)\,x^3 + (-2A+B-4C+D)\,x^2 + (A+4C-4D)\,x + (-2A+B+4D)$
Man erhält also das Gleichungssystem $A+C=0$, $-2A+B-4C+D=1$, $A+4C-4D=-6$, $-2A+B+4D=-7$ mit der Lösung: $A=2$, $B=-3$, $C=-2$, $D=0$:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{2x}{x^2+1}\right) dx = \left[2\,\ln|x-2| + \frac{3}{x-2} - \ln(x^2+1)\right]_0^1 = -\frac{3}{2} - 3\,\ln 2$$

Man bestimme das Integral $I = \int \frac{4x-2}{x^2+3x+3}\,dx.$

Da der Nenner keine reellen Nullstellen hat, lässt sich der Integrand nicht mehr mittels (reeller) Partialbruchzerlegung vereinfachen. Statt dessen versuchen wir, den Zähler als Ableitung des Nenners darzustellen, um logarithmisch integrieren zu können:

$$\begin{aligned} I &= 2\int \frac{2x-1}{x^2+3x+3}\,dx = \int \frac{2x+3-4}{x^2+3x+3}\,dx = 2\cdot\left\{\int \frac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx - \int \frac{4}{x^2+3x+3}\,dx\right\} = \\ &= 2\cdot\ln|x^2+3x+3| - 8\cdot\int \frac{1}{x^2+3x+\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}\,dx = 2\cdot\ln(x^2+3x+3) - 8\cdot\int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx \end{aligned}$$

Die Substitution $u = x+\frac{3}{2}$, $du = dx$ führt schließlich auf

$$\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\cdot\int \frac{du}{\frac{4u^2}{3}+1} = \left|\begin{array}{c} v = \frac{2u}{\sqrt{3}} \\ du = \frac{\sqrt{3}}{2}dv \end{array}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\int \frac{dv}{v^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan v = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{3}}$$

5.3.4 Rationalisierbare Integrale

Die Integration rationaler Funktionen (in einer Variablen x) hat den großen Vorteil, nahezu „automatisch“ zu gehen. Es gibt also eine einfache, algorithmisierte Vorgehensweise, bei der man im Grunde nichts falsch machen kann. (Dass Blackouts oder Rechenfehler immer passieren können, steht natürlich auf einem anderen Blatt.)

Von daher wäre es günstig, Methoden zur Verfügung zu haben, um möglichst viele Integrale auf eine Form bringen zu können, die mit dieser Standardmethoden lösbar ist. Das wird insbesondere dann gut funktionieren, wenn man es mit gebrochenen Funktionen zu tun hat, in denen nicht nur die Integrationsvariable x, sondern zusätzlich noch Wurzelausdrücke wie $\sqrt{ax+b}$ oder $\sqrt{ax^2+bx+c}$ vorkommen.

Ein anderer Fall liegt vor, wenn man zwar eine rationale Funktion vorliegen hat, aber nicht direkt in x, sondern z.B. in e^x, $\sinh x$ und $\cosh x$ oder $\sin x$ und $\cos x$. Für solche Integrale werden im folgenden einige hilfreiche Standardsubstitutionen angegeben, mit denen man oft zu Integralen über eine rationale Funktion in der neuen Variablen u gelangt. R bezeichnet dabei eine beliebige rationale Funktion in den Argumenten.

- $\displaystyle\int R\left(x,\, \sqrt{ax+b}\right)\, dx$

  Die hier durchaus naheliegende Substitution $u = \sqrt{ax+b}$ ergibt $x = \frac{u^2}{a} - \frac{b}{a}$ und $du = \frac{2u}{a}\, du$. Man erhält also tatsächlich eine rationale Funktion in u, die (evtl. nach Polynomdivision) mittels Partialbruchzerlegung integriert werden kann.

- $\displaystyle\int R\left(x,\, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\, dx$

  Analog zu oben substituiert man hier $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

- $\displaystyle\int R\left(e^x\right)\, dx$

  Mit $u = e^x$ und $dx = \frac{du}{u}$ erhält man ebenfalls sofort eine rationale Funktion in u.

- $\displaystyle\int R\left(\sinh x,\, \cosh x\right)\, dx$

  Da sich die Hyperbelfunktionen immer in Exponentialfunktionen umschreiben lassen ($\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$), ist man wieder beim Fall $\int \tilde{R}(e^x)$. Gleiches gilt für Integrale, in denen $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ oder $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$ vorkommt.

- $\displaystyle\int R\left(\sin x,\, \cos x\right)\, dx$

  Unter Umständen gibt es hier eine elegante Substitution wie $v = \sin x$ oder $w = \cos x$, die zum Ziel führt – aber nur in Spezialfällen. Hingegen gibt es eine „Universalsubstitution“, die zwar das mathematische Äquivalent einer Brechstange ist, aber den großen Vorteil hat, immer zu funktionieren. Dazu substituiert man $u = \tan\frac{x}{2}$ und erhält:

  $$\sin x = \frac{2u}{u^2+1} \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{u^2+1} \qquad dx = \frac{2\, du}{u^2+1}$$

  Es ergibt sich also immer eine rationale Funktion in u. Auch rationale Funktionen in Tangens und Cotangens fallen wegen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ in diese Kategorie.

- $\displaystyle\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx$

  Hätte man es mit einfacheren Ausdrücke wie $\sqrt{1-x^2}$ oder $\sqrt{1+x^2}$ zu tun, könnte man mit Hilfe einer passenden Substitution $u = \sin x$ bzw. $u = \sinh x$ und der Identität $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ bzw. $\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1$ die Wurzel recht einfach loswerden. Das ist auch die Idee hinter der folgenden Vorgehensweise; um sie anwenden zu können, muss man allerdings zuerst quadratisch ergänzen:

  $$ax^2+bx+c = a\,(x+\alpha)^2-\beta \qquad \text{mit } \alpha = \frac{b}{2a} \text{ und } \beta = \frac{b^2}{4a}-c$$

  Nun entscheidet man anhand der Vorzeichen von β und a:

  $$\begin{array}{lll} \beta > 0,\quad a < 0 & x = -\alpha + \sqrt{-\frac{\beta}{a}}\,\sin u & \sqrt{a\,(x+\alpha)^2-\beta} \to \sqrt{1-\sin^2 u} = \pm\cos u \\ \beta < 0,\quad a > 0 & x = -\alpha + \sqrt{-\frac{\beta}{a}}\,\cosh u & \sqrt{a\,(x+\alpha)^2-\beta} \to \sqrt{\cosh^2 u+1} = \pm\sinh u \\ \beta > 0,\quad a > 0 & x = -\alpha + \sqrt{\frac{\beta}{a}}\,\sinh u & \sqrt{a\,(x+\alpha)^2-\beta} \to \sqrt{\sinh^2 u+1} = \pm\cosh u \end{array}$$

  Im Falle $\beta < 0$, $a < 0$ ist die Wurzel (im Reellen) überhaupt nicht definiert; wenn $\beta = 0$ ist, hat man einfach die Wurzel eines Quadrats stehen, kann also direkt zu $\pm\sqrt{a}(x+a)$ übergehen. Die Wahl des Doppelvorzeichens, das in allen Fällen auftritt, hängt vom betrachteten Integrationsintervall ab – man muss letztendlich für die Wurzel einen positiven Ausdruck erhalten. So hat man z.B. in $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ klarerweise $\sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u$ zu setzen, in $[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}]$ hingegen $\sqrt{1-\sin^2 u} = -\cos u$.

- $\displaystyle\int R\left(x,\ \sqrt{\alpha x+\beta},\ \sqrt{\gamma x+\delta}\right)\,dx$

  Substituiert man hier $u = \sqrt{\gamma x+\delta}$, so wird der andere Wurzelausdruck zu $\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}u^2 - \frac{\alpha\delta}{\gamma} + \beta}$, man hat diesen Fall also auf den vorhin behandelten zurückgeführt.

- $\displaystyle\int \frac{R(x^n)}{\sqrt[n]{ax^n+b}}\,dx$

  Hier hilft die Substitution $u = \sqrt[n]{a+\frac{b}{x^n}}$.

- $\displaystyle\int x^p\,(a+bx^q)^r\,dx$ mit $p,\ q,\ r \in \mathbb{Q}$

  Hier gibt es zumindest für einige Spezialfälle Standardsubstitutionen:

$r \in \mathbb{Z}$	$u = \sqrt[g]{x}$, wobei der g der Nenner von $\frac{p+1}{q}$ (nach Kürzen) ist
$\frac{p+1}{q} \in \mathbb{Z}$	$u = \sqrt[g]{a+bx^q}$, wobei der g der Nenner von r ist
$(r+\frac{p+1}{q}) \in \mathbb{Z}$	$u = \sqrt[g]{a+bx^{-q}}$, wobei der g der Nenner von r ist

5.3.5 *Übungsaufgaben – gemischte Integrationstechniken*

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int \frac{e^x \ \sinh x}{e^x + 1}\, dx.$

Hier hilft eine Aufspaltung des Sinus hyperbolicus anhand der Definitionsgleichung:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^x \ \sinh x}{e^x+1}\, dx = \int \frac{e^x \ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{e^x+1}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}\, dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{(e^x+1)\cdot(e^x-1)}{e^x+1}\, dx = \frac{1}{2}\int (e^x-1)\, dx = \frac{e^x - x}{2} + C \end{aligned}$$

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int \frac{x^2+2x+2}{x^3+3x^2+6x+12}\, dx.$

Umformen erlaubt sofort eine logarithmische Integration:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+6x+6}{x^3+3x^2+6x+12}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{[x^3+3x^2+6x+12]'}{x^3+3x^2+6x+12}\, dx = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+3x^2+6x+12\right|$$

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int x \cdot \ln(x^2)\, dx.$

Hier arbeitet man sinnvollerweise mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} I &= \int x\cdot\ln(x^2)\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(x^2) & u' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^2}{2}\ \ln(x^2) - \int \frac{2}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\, dx = \frac{x^2}{2}\ \ln(x^2) - \int x\, dx = \frac{x^2}{2}\ \ln(x^2) - \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos x}\, dx.$

Hier ist es hilfreich, den Tangens aufzuspalten, danach führt eine Substitution weiter:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\tan x}{\cos x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x \\ dx = -\frac{du}{\sin x} \end{array} \right| = \\ &= -\int \frac{\sin x}{u^2}\cdot\frac{du}{\sin x} = -\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} + C = \frac{1}{\cos x} + C \end{aligned}$$

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int \cosh(e^x)\, e^{2x}\, dx.$

Substitution mit anschließender partieller Integration liefert:

$$\begin{aligned} I &= \int \cosh(e^x)\, e^{2x}\, dx = \int \cosh(e^x)\,(e^x)^2\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x & x = \ln u \\ dx = \frac{dx}{du}\, du = \frac{1}{u}\, du & \end{array} \right| = \\ &= \int \cosh u \cdot u^2\ \frac{du}{u} = \int u\cdot\cosh u\, du = \left| \begin{array}{ll} f = u & f' = 1 \\ g' = \cosh u & g = \sinh u \end{array} \right| = \\ &= u\cdot\sinh u - \int \sinh u\, du = u\cdot\sinh u - \cosh u + C = e^x\ \sinh(e^x) - \cosh(e^x) + C \end{aligned}$$

Man bestimme das Integral $I = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x - \sin^2 x}\, dx.$

Die naheliegende Substitution $u = \sin x$ führt zu einem Integral, das um nichts einfacher ist als das, von dem man ausgegangen ist, also wird man wohl besser einen anderen Weg einschlagen:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x}{\cos x - \sin^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x - 1 + \cos^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{c} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \end{array} \right| = \\ &= -\int \frac{du}{u^2 + u - 1} = -\int \frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}} = -\frac{4}{5} \int \frac{du}{(\frac{2}{\sqrt{5}}u + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 - 1} = \\ &= -\frac{4}{5}\frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{Arcoth}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}u + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C = -\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{Arcoth}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}u + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C \end{aligned}$$

Eine zuverlässige Alternative wäre natürlich die in 5.3.4 angegebene Standardsubstitution.

Man bestimme das Integral $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}}\, dx.$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}\, dx = \left| \begin{array}{cc} u = \sqrt{1+e^{2x}} & e^{2x} = u^2 - 1 \\ du = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\, dx = \frac{e^{2x}}{u}\, dx & dx = \frac{u}{e^{2x}}\, du \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{u}{u\, e^{2x}}\, du = \int \frac{1}{u^2 - 1}\, du = \operatorname{Arcoth} u + C = \operatorname{Arcoth} \sqrt{1 + e^{2x}} + C \end{aligned}$$

Man bestimme das Integral $I = \displaystyle\int \frac{\sin x}{1 + \cos x}\, dx.$

Mit der Standardsubstitution $u = \tan \frac{x}{2}$ erhält man:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x}{1 + \cos x}\, dx = \int \frac{\frac{2u}{1+u^2}}{1 + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2\, du}{1+u^2} = 4 \int \frac{\frac{u}{1+u^2}}{1 + u^2 + 1 - u^2}\, du = \\ &= \int \frac{2u}{u^2+1}\, du = \ln\left(u^2 + 1\right) + C = \ln\left(\tan^2 \frac{x}{2} + 1\right) + C \end{aligned}$$

In diesem Fall schneller und eleganter geht es mit

$$I = \int \frac{\sin x}{1 + \cos x}\, dx = -\int \frac{-\sin x}{1 + \cos x}\, dx = \ln|1 + \cos x| + C$$

5.4 Anwendungen und Numerik

5.5 Uneigentliche Integrale

5.5.1 Bogenlänge und Winkelfunktionen

Now,
I even I
Would celebrate
In rhymes unapt
The great immortal Syracusan
Rivaled nevermore
Who in his wondrous lore
Passed on before
Gave men his guidance
How to circles mensurate

Codierung der Dezimaldarstellung von π

5.5.2 Die Gammafunktion

5.5.3 Übungsbeispiele

Man überprüfe die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und gebe gegebenenfalls eine Abschätzung an:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$$

$$I_4 = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \qquad I_5 = \int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx \qquad I_6 = \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$$

$$I_7 = \int_0^\infty \frac{x^2\,e^{-x}}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$$

I_1 ist bekannterweise konvergent ($\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ für $\alpha < 1$ konvergiert). Nun kann man abschätzen:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2 \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+\sqrt{x}}\,dx \underset{\text{in }[0,1]}{\le} \int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx = I_2 \le 2$$

Analog ist I_4 konvergent, weil $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ für $\alpha > 1$ konvergiert Ebenso gelten die Abschätzungen:

$$I_5 = \int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1 \qquad I_6 = \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x^2+\sqrt{x}}\,dx \underset{\text{in }[1,\infty]}{\le} \int_1^\infty \frac{e^{-1}}{x^2+\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{e} I_5 \le \frac{1}{e}$$

Um I_7 abzuschätzen bestimmt man zuerst das Maximum des Zählers $f(x) := x^2 e^{-x}$ in $\mathbb{R}_0^+$:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2-x)\,x\,e^{-x} \overset{!}{=} 0 \iff x = 0 \ \lor\ x = 2$$

An $x = 0$ liegt ein Minimum, an $x = 2$ ein Maximum mit $f(2) = \frac{4}{e^2}$. Also ist

$$I_7 \le \int_0^\infty \frac{4/e^2}{x^2+\sqrt{x}}\,dx = \frac{4}{e^2}\cdot\left(\int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx\right) = \frac{4}{e^2}\cdot(I_2+I_5) \le \frac{12}{e^2}$$

Natürliche könnte man auch noch feinere Abschätzungen erhalten.

Man bestimme den Wert des uneigentlichen Integrals $I = \int_0^\infty \left(e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x}\right)dx.$

Integration liefert sofort:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{B\to\infty} \int_0^B \left(e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x}\right)dx = \lim_{B\to\infty} \left[\frac{-e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-3x}}{3} - \frac{e^{-4x}}{4}\right]_0^B = \\ &= \lim_{B\to\infty} \left[\frac{-e^{-2B}}{2} - \frac{e^{-3B}}{3} - \frac{e^{-4B}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] = \frac{13}{12} \end{aligned}$$

Inhaltsverzeichnis