1 Grenzwerte und part. Ableitungen

Man untersuche die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2e^y+y^2\cos x}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit und ermittle die partiellen Ableitungen im Ursprung.

Außer in $(0,0)$ ist f mit Sicherheit stetig. Nun führen wir Polarkoordinaten ein und erhalten:

$$\begin{aligned} G &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2e^y + y^2\cos x}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\varphi e^{r\sin\varphi} + r^2\sin^2\varphi\cos(r\cos\varphi)}{r^2} = \\ &= \lim_{r\to 0}\left(\cos^2\varphi \underbrace{e^{r\sin\varphi}}_{\to 1} + \sin^2\varphi \underbrace{\cos(r\cos\varphi)}_{\to 1}\right) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 = f(0,0) \end{aligned}$$

Die Funktion ist also überall stetig. Für die partiellen Ableitungen im Ursprung erhält man

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h^2e^0+0}{h^2+0} - 1\right) = \lim_{h\to 0}\frac{h^2-h^2}{h^3} = 0 \\ f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{0+h^2\cos 0}{0+h^2} - 1\right) = \lim_{h\to 0}\frac{h^2-h^2}{h^3} = 0 \end{aligned}$$

Man untersuche die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6+y^5}{x^4+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit. Weiters berechne man die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ und die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(0,0)$ mit $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Ist die Funktion im Ursprung differenzierbar?

An allen Punkten außer $(x,y) = (0,0)$ ist f natürlich als Zusammensetzung stetiger und differenzierbarer Funktion ebenfalls stetig und differenzierbar. Zu untersuchen bleibt der Punkt $(0,0)$, hier erhalten wir:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+y^5}{x^4+y^4} = \lim_{r\to 0}\frac{r^6\cos^6\varphi + r^5\sin^5\varphi}{r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi} = \lim_{r\to 0} r\cdot\left\{\frac{r\cos^6\varphi + \sin^5\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}\right\} = 0$$

Der Grenzwert wird Null, da der Klammerausdruck wegen $\cos^4\varphi + \sin^4\varphi \geq \frac{1}{2}$ immer endlich bleibt. (Das erhält man aus $\frac{d}{d\varphi}(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) = -4\cos^3\varphi\sin\varphi + 4\sin^3\varphi\cos\varphi = 4\sin\varphi\cos\varphi(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)$. Diese Ableitung wird in nur Null, wenn $\varphi = k\pi$, $\varphi = \frac{2k+1}{2}\pi$ oder $|\sin\varphi| = |\cos\varphi| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, was den Funktionswerten 1, 1 und $\frac{1}{2}$ entspricht. Es gilt also immer $\frac{1}{2} \leq \cos^4\varphi + \sin^4\varphi \leq 1$.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h^6+0}{h^4+0} - 0\right) = \lim_{h\to 0} h = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{0+h^5}{0+h^4} - 0\right) = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\frac{\frac{1}{8}h^6 + \frac{\sqrt{2}}{8}h^5}{\frac{1}{4}h^4 + \frac{1}{4}h^4} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{8}h + \frac{\sqrt{2}}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Da hier nicht $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(0,0) = (\text{grad } f)(0,0)\cdot\vec{a}$ gilt, kann f in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein.

Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktionen

$$f(x,y) = x^2 e^y + e^{xy} \qquad g(x,y) = \sin^2(xy) \qquad h(x,y) = e^{\cos x + y^3}$$

Man erhält (aufgrund der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit ist $f_{xy} = f_{yx}$ und analog $g_{xy} = g_{yx}$, $h_{xy} = h_{yx}$):

$$\begin{array}{lll}
f_x = 2xe^y + ye^{xy} & f_{xx} = 2e^y + y^2 e^{xy} & f_{xy} = 2xe^y + e^{xy} + xye^{xy} \\
f_y = x^2 e^y + xe^{xy} & f_{yy} = x^2 e^y + x^2 e^{xy} & f_{yx} = 2xe^y + e^{xy} + xye^{xy} \\
g_x = 2y\sin(xy)\cos(xy) & g_{xx} = 2y^2(\cos^2(xy) - \sin^2(xy)) & \\
 & g_{xy} = 2xy(\cos^2(xy) - \sin^2(xy)) + 2\sin(xy)\cos(xy) & \\
g_y = 2x\sin(xy)\cos(xy) & g_{yy} = 2x^2(\cos^2(xy) - \sin^2(xy)) & \\
 & g_{yx} = 2xy(\cos^2(xy) - \sin^2(xy)) + 2\sin(xy)\cos(xy) & \\
h_x = -\sin x\, e^{\cos x + y^2} & h_{xx} = (\sin^2 x - \cos x)e^{\cos x + y^2} & h_{xy} = -2y\sin x\, e^{\cos x + y^2} \\
h_y = 2y\, e^{\cos x + y^2} & h_{yy} = (4y^2 + 2)e^{\cos x + y^2} & h_{yx} = -2y\sin x\, e^{\cos x + y^2}
\end{array}$$

Man untersuche die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{\cos(x^2+y^2)-1} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

Mit Polarkoordinaten erhält man

$$\begin{aligned}
G &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{\cos(x^2+y^2)-1} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos\varphi\sin^3\varphi}{\cos(r^2)-1} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos\varphi\sin^3\varphi}{1 - \frac{r^4}{2} \pm \ldots - 1} = \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{-2r^4\cos\varphi\sin^3\varphi}{r^4 \pm \ldots} = -2\cos\varphi\sin^3\varphi
\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck hängt vom Winkel φ ab (siehe z.B. für $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Der Grenzwert existiert also nicht, die Funktion ist im Ursprung unstetig.

Man berechne für die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{x^3+xy-y^2}{x^2+y} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

die partiellen Ableitungen f_x *und* f_y *an der Stelle* $(0,0)$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(1 + \frac{h^3 + h\cdot 0 - 0^2}{h^2+0} - 1\right) = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(1 + \frac{0^3 + 0\cdot h - h^2}{0^2+h} - 1\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2}{h^2} = -1
\end{aligned}$$

Man untersuche die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x^2+y^2)} & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

in den Punkten $(0,0)$ *und* $(0,1)$ *auf Stetigkeit.*

In $(0,0)$ ist f stetig, da für $r \to 0$ immer $e^{-r^2} \to 1$ geht. In $(0,0)$ ist f hingegen unstetig, wie man z.B. bei Annäherung parallel zur x-Achse sieht:

$$(-1,0) - \lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \lim_{x\to 0^+} e^{-(x^2+1)} = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 1 = f(0,1)$$

2 Jacobi-Matrizen; implizite Fkt

Man berechne die Jacobi-Matrizen $\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)}$ *und* $\frac{\partial(g_1,g_2,g_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3,x_4)}$ *der Abbildungen*

$$f_1(x,y,z) = e^{xy} + \cos^2 z \qquad g_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sqrt{x_1^2+x_2^2+1} - x_4$$
$$f_2(x,y,z) = xyz - e^{-z} \qquad g_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = \cos(x_1x_3^2) + e^{x_4}$$
$$f_3(x,y,z) = \sinh(xz) + y^2 \qquad g_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2x_3 + \ln(1+x_4^2)$$

$$\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} & -2\cos z\sin z \\ yz & xz & xy+e^{-z} \\ z\cosh(xz) & 2y & x\cosh(xz) \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial(g_1,g_2,g_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3,x_4)} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}} & \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}} & 0 & -1 \\ -x_3^2\sin(x_1x_3^2) & 0 & -2x_1x_3\sin(x_1x_3^2) & e^{x_4} \\ 0 & x_3 & x_2 & \frac{2x_4}{1+x_4^2} \end{pmatrix}$$

Man untersuche, ob sich die Funktion

$$f(x,y,z) = e^x - y^2z + x\ln(1+z) - 1 = 0$$

am Punkt $P(0,1,0)$ *lokal eindeutig nach* z *auflösen läßt.*

$f \in C^1$ ist erfüllt, und es gilt $f(0,1,0) = 0$. Nun erhält man

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_P = \left[-y^2 + \frac{x}{1+z}\right]_P = -1 \neq 0,$$

die Auflösung ist also möglich.

Gegeben ist das Funktionensystem

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x^2 - 2y - e^{z-1} = 0 \\ f_2(x,y,z) &= xy - z + 1 = 0 \end{aligned}$$

Man zeige, dass es in einer Umgebung von $P(1,0,1)$ *zwei Funktionen* $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ *gibt, so dass* $f_i(\varphi_1(z),\varphi_2(z),z) \equiv 0$ *ist. Weiters bestimme man* $\varphi_1'(1)$ *und* $\varphi_2'(1)$.

Es gilt $f_i \in C^1$ und $f_1(1,0,1) = f_2(1,0,1) = 0$. Nun ist

$$\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\right|_P = \left|\begin{matrix} 2x & -2 \\ y & x \end{matrix}\right|_P = 2 \neq 0,$$

eine eindeutige Auflösung $x = \varphi_1(z)$ und $y = \varphi_2(z)$ also möglich. Für die Ableitungen erhält man

$$F_1(z) := \varphi_1(z)^2 - 2\varphi_2(z) - e^{z-1} \equiv 0 \qquad \tfrac{dF_1}{dz} := 2\varphi_1(z)\varphi_1'(z) - 2\varphi_2'(z) - e^{z-1} \equiv 0$$
$$F_2(z) := \varphi_1(z)\varphi_2(z) - z + 1 \equiv 0 \qquad \tfrac{dF_2}{dz} := \varphi_1'(z)\varphi_2(z) + \varphi_1(z)\varphi_2'(z) - 1 \equiv 0$$

Daraus ergibt sich nun mit $\varphi_1(1) = 1$ und $\varphi_2(1) = 0$

$$2\varphi_1'(1) - 2\varphi_2'(1) - 1 = 0 \qquad \varphi_2'(1) - 1 = 0$$

und daraus $\varphi_2'(1) = 1$ und $\varphi_1'(1) = \frac{3}{2}$.

Man überprüfe, ob sich das Funktionensystem

$$f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - z - 22 = 0 \qquad f_2(x,y,z) = x + y^2 + z^3 = 0$$

in einer Umgebung von $P(4,2,-2)$ eindeutig nach x und y auflösen läßt. Ferner bestimme man zwei Funktionen $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$, so dass in $U(P)$ gilt: $f_j(\varphi_1(z), \varphi_2(z), z) \equiv 0$, $j = 1, 2$.

Es ist $f_i \in C^1$, $f_1(4,2,-2) = f_2(4,2,-2) = 0$, und für die Jacobi-Determinante erhält man

$$\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 2y \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

Das Funktionensystem ist also in P tatsächlich lokal auflösbar. Aus $f_1(x,y,z) = 0$ erhält man $x^2 = 22 + z - y^2$, aus $f_2(x,y,z) = 0$ weiter $y^2 = -z^3 - x$, und setzt man das ein, ergibt sich $x^2 - x - z^3 - z - 22 = 0$. Als Lösung der quadratischen Gleichung erhält man

$$x = \varphi_1(z) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + z^3 + z + 22}$$

(nur der positive Zweig der Wurzel kommt in Betracht, da für $z = -2$ ja $x = 4 > 0$ sein soll) und damit weiter

$$y = \varphi_2(z) = \sqrt{-z^3 - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + z^3 + z + 22}}.$$

Man begründe, warum sich das Gleichungssystem

$$f_1(x,y,z) = 2\cos(xyz) + yz - 2x = 0 \qquad f_2(x,y,z) = (xyz)^2 + z - 1 = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P = (x_0, y_0, z_0) = (1,0,1)$ lokal nach y und z auflösen läßt und berechne $y'(x)$, $z'(1)$, $y''(1)$ sowie $z''(1)$.

Es sind $f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$, außerdem ist $f_1(1,0,1) = f_2(1,0,1) = 0$. Für Jacobi-Determinante erhält man

$$\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)}\right|_P = \begin{vmatrix} f_{1,y} & f_{1,z} \\ f_{2,y} & f_{2,z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\sin(xyz)xz + z & -2\sin(xyz)xy + y \\ 2(xyz)\cdot xz & 2(xyz)\cdot xy + 1 \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Daher gibt es zwei Funktionen $y(x)$ und $z(x)$, für die gilt: $y(1) = 0$, $z(1) = 1$ sowie $f_1(x, y(x), z(x)) \equiv 0$ und $f_2(x, y(x), z(x)) \equiv 0$ in einer Umgebung von P. Mit diesem Ergebnis werden nun zwei Funktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ definiert und nach x abgeleitet, dabei sind nun natürlich auch $y = y(x)$ und $z = z(x)$ Funktionen von x, was bei entsprechenden Ausdrücken mit Ketten- bzw. Produktregel berücksichtigt werden muss:

$$\begin{aligned}
&F_1(x) := f_1(x, y(x), z(x)) = 2\cos(x\,y(x)\,z(x)) + y(x)\,z(x) - 2x \equiv 0 \\
&F_1'(x) = -2\sin(x\,y(x)\,z(x)) \cdot \{y(x)\,z(x) + x \cdot [y'(x)\,z(x) + y(x)\,z'(x)]\} + [y'(x)\,z(x) + y(x)\,z'(x)] - 2 \equiv 0 \\
&F_1''(x) = -\cos(\ldots) \cdot \{\ldots\}^2 - 2\sin(\ldots) \cdot \{\ldots\}' + y''(x)\,z(x) + 2y'(x)\,z'(x) + y(x)\,z''(x) \equiv 0 \\
&F_2(x) := f_2(x, y(x), z(x)) = (x\,y(x)\,z(x))^2 + z(x) - 1 \equiv 0 \\
&F_2'(x) = 2(x\,y(x)\,z(x)) \cdot \{\ldots\} + z'(x) \equiv 0 \\
&F_2''(x) = 2 \cdot \{\ldots\}^2 + 2(x\,y(x)\,z(x))\{\ldots\}' + z''(x) \equiv 0
\end{aligned}$$

Nun setzen wir $x = 1$ ein und beachten $y(1) = 0$ und $z(1) = 1$: Aus $F_1'(1) = y'(1) - 2 = 0$ erhält man $y'(1) = 2$, weiters ist $F_2'(1) = z'(1) = 0$. Analog sind wegen $F_1''(1) = -2 \cdot 2^2 + y''(1) = 0$ und $F_2''(1) = 2 \cdot 2^2 + z''(1) = 0$ die zweiten Ableitungen $y''(1) = 8$ und $z''(1) = -8$.

*) *Gegeben sind die Abbildungen* $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *und* $g:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*:*

$$\begin{array}{lll} f_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 & f_2 = x_1 x_2 & f_3 = x_1^2 - x_3^2 \\ g_1 = (y_1 - y_2)^2 + y_3^2 & g_2 = (y_1 + y_2)^2 & g_3 = y_1 y_2 - y_3 \end{array}$$

Man überprüfe, ob die Abbildung $h = g \circ f = g(f)$*;* $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *in einer geeigneten Umgebung von* $h(X_0)$ *mit* $X_0 = (1,1,1)$ *umkehrbar ist.*

Es ist $Y_0 = f(X_0) = (0,1,0)$. Die Jacobi-Determinanten von f und g in X_0 und Y_0 ergeben:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & -2x_3 \end{pmatrix}_{(1,1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 2(y_1 - y_2) & -2(y_1 - y_2) & 2y_3 \\ 2(y_1 + y_2) & 2(y_1 + y_2) & 0 \\ y_2 & y_1 & -1 \end{pmatrix}_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nun gilt nach der Kettenregel:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(X_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(Y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

und die Determinante ergibt $|\frac{\partial h}{\partial x}(X_0)| = -6 \cdot (12 + 2) - 2 \cdot (-8 - 2) = -64 \neq 0$, die Abbildung ist also umkehrbar. (Hier gilt auch $|\frac{\partial h}{\partial x}(X_0)| = |\frac{\partial g}{\partial y}(Y_0)| \cdot |\frac{\partial f}{\partial x}(X_0)| = 8 \cdot (-8) = -64$.)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x, yz) := e^{\cos^2(xy^3 z)} - \sqrt{e}$$

Man begründe, warum sich $f(x,y,z) = 0$ *in einer Umgebung von* $P = (x_0, y_0, z_0) = (\pi, 1, \frac{1}{4})$ *lokal nach* z *auflösen läßt, und berechne dort die partiellen Ableitungen* $z_x(x_0, y_0)$ *und* $z_y(x_0, y_0)$*.*

Als Zusammensetzung unendlich oft differenzierbarer Funktionen ist sicher $f \in C^1$, und es gilt

$$f(\pi, 1, \frac{1}{4}) = e^{\cos^2 \frac{\pi}{4}} - \sqrt{e} = e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \sqrt{e} = 0$$

Für die Ableitung nach z erhält man

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_P = -2xy^3 \cos(xy^3 z) \sin(xy^3 z) \cdot e^{\cos^2(xy^3 z)}\Big|_P = -2\pi \frac{1}{64} \cos\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{4} e^{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \neq 0$$

Die Funktion ist also lokal eindeutig nach z auflösbar. Nun zu den partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} F(x,y) &:= f(x, y, z(x,y)) = e^{\cos^2(xy^3 z(x,y))} - \sqrt{e} \equiv 0 \\ F_x(x,y) &= -2\cos(xy^3 z(x,y)) \sin(xy^3 z(x,y)) e^{\cos^2(xy^3 z(x,y))} \cdot (zy^3 + xy^3 z_x(x,y)) \equiv 0 \\ F_y(x,y) &= -2\cos(xy^3 z(x,y)) \sin(xy^3 z(x,y)) e^{\cos^2(xy^3 z(x,y))} \cdot (3xy^2 z + xy^3 z_y(x,y)) \equiv 0 \end{aligned}$$

Einsetzen von $x = \pi$, $y = 1$ ergibt mit $z(\pi, 1) = \frac{1}{4}$:

$$\underbrace{-2e^{1/2} \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{\neq 0} \cdot (\tfrac{1}{4} + \pi z_x(\pi,1)) = 0 \qquad \underbrace{-2e^{1/2} \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{\neq 0} \cdot (\tfrac{3\pi}{4} + \pi z_y(\pi,1)) = 0$$

weiter also $z_x(\pi, 1) = -\frac{1}{4\pi}$ und $z_y(\pi, 1) = -\frac{3}{4}$.

3 Extremwertaufgaben

Man finde alle kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = (y^2 - x^2) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

und überprüfe, ob es sich um lokale Maxima, lokale Minima oder Sattelpunkte handelt.

Für die ersten partiellen Ableitungen erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \cdot (x^2 - y^2 - 2) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y \cdot (2 + x^2 - y^2) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Nullsetzen liefert im ersten Fall $x = 0$ oder $x^2 - y^2 - 2 = 0$, im zweiten $y = 0$ oder $x^2 - y^2 + 2 = 0$, Ein kritischer Punkt ist damit auf jeden Fall $P_1(0, 0)$. Die Bedingungen $x = 0$ und $2 - y^2 = 0$ führen auf $P_2(0, \sqrt{2})$, $P_3(0, -\sqrt{2})$. Für $y = 0$ und $x^2 - 2 = 0$ erhält man $P_4(\sqrt{2}, 0)$, $P_5(-\sqrt{2}, 0)$. Die beiden Bedingungen $x^2 - y^2 - 2 = 0$ und $x^2 - y^2 + 2 = 0$ sind nicht gleichzeitig erfüllbar, man hat also bereits alle kritischen Punkte gefunden.
Überprüfen der zweiten Ableitungen liefert

$(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2)\big\|_{(0,0)} = (-2) \cdot 2 - 0 = -4 < 0$		P_1 Sattelpunkt
$(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2)\big\|_{(0,\sqrt{2})} = (-\frac{4}{e}) \cdot (-\frac{4}{e}) - 0 = \frac{16}{e^2} > 0$	$f_{xx} = -\frac{4}{e} < 0$	P_2 lok. Maximum
$(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2)\big\|_{(0,\sqrt{2})} = (-\frac{4}{e}) \cdot (-\frac{4}{e}) - 0 = \frac{16}{e^2} > 0$	$f_{xx} = -\frac{4}{e} < 0$	P_3 lok. Maximum
$(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2)\big\|_{(\sqrt{2},0)} = \frac{4}{e} \cdot \frac{4}{e} - 0 = \frac{16}{e^2} > 0$	$f_{xx} = \frac{4}{e} > 0$	P_4 lok. Minimum
$(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2)\big\|_{(-\sqrt{2},0)} = \frac{4}{e} \cdot \frac{4}{e} - 0 = \frac{16}{e^2} > 0$	$f_{xx} = \frac{4}{e} > 0$	P_5 lok. Minimum

Man bestimme und klassifiziere alle Extrema der Funktion

$$f(x,y) = (1 + 2x - y)^2 + (2 - x + y)^2 + (1 + x - y)^2.$$

Die ersten partiellen Ableitungen ergeben sich zu $f_x = 4(1+2x-y) - 2(2-x+y) + 2(1+x-y) = 12x - 8y + 2$ und $f_y = -2(1+2x-y) + 2(2-x+y) - 2(1+x-y) = -8x + 6y$. Nullsetzen liefert ein Gleichungssystem mit den Lösungen $x = -\frac{3}{2}$ und $y = -2$.
Mit $f_{xx} = 12$, $f_{xy} = -8$ und $f_{yy} = 6$ erhält man $\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 8 > 0$, es handelt sich also tatsächlich um ein Extremum, wegen $f_{xx} = 12 > 0$ um ein relatives Minimum, natürlich muss es auch das absolute Minimum der Funktion sein.

Man bestimme und klassifiziere alle Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) = -xy + z^2 - 3x + 5y$$

unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$.

Da in der Nebenbedingung die Variablen nur in erster Potenz vorkommen, bietet es sich hier an, nicht mit Langrange-Multiplikatoren zu arbeiten, sondern einfach die Nebenbedingung in die Zielfunktion einzusetzen. Mit $x = 1 - y - z$ erhält man die neue Zielfunktion

$$\tilde{f}(y,z) = y^2 + yz + z^2 + 7y + 3z - 3,$$

mit den partiellen Ableitungen $\tilde{f}_y = 2y + z + 7$ und $\tilde{f}_z = 2z + y + 3$. Nullsetzen und anschließendes Lösen des Gleichungssystems liefert $y = -\frac{11}{3}$, $z = \frac{1}{3}$, die Nebenbedingung ergibt weiter $x = \frac{13}{3}$.
Für die Funktion $\tilde{f}(y,z)$ kann man sofort die Hesse-Matrix überprüfen: Man erhält mit $\tilde{f}_{yy} = 2$, $\tilde{f}_{yz} = 1$ und $\tilde{f}_{zz} = 2$ sofort $\Delta = \tilde{f}_{yy}\tilde{f}_{zz} - \tilde{f}_{yz}^2 = 3 > 0$ für beliebige y und z, wegen $f_{yy} = 2 > 0$ ist also jeder kritische Punkt (es gibt ohnehin nur einen) ein relatives Minimum.
Tatsächlich ist der vorher gefundene Punkt $P(\frac{13}{3}, -\frac{11}{3}, \frac{1}{3})$ sogar ein absolutes Minimum: Es kommen nämlich sowohl y als auch z in $\tilde{f}$ in höchster Potenz quadratisch vor, die Funktion geht also in jede Richtung $\to +\infty$. Weiters ist die Funktion auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar und besitzt keine weiteren kritischen Punkte, P muss also ein absolutes Minimum sein.

Man bestimme alle Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{x}{2} - y^2 + z^2$$

unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 = 0.$

Wir definieren nun mit dem Lagrange-Multiplikator λ:

$$F(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) + \lambda g(x,yz) = \frac{x}{2} - y^2 + z^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 + 2z^2 - 1\right)$$

Die Ableitungen ergeben

$$\begin{array}{cllll}
\text{I} & F_x = \frac{1}{2} + 2\lambda x = 0 & & & \\
\text{II} & F_y = -2y + 2\lambda y = 2y(\lambda - 1) = 0 & \to & y = 0 \quad \vee & \lambda = 1 \\
\text{III} & F_z = 2z + 4\lambda z = 2z(2\lambda + 1) = 0 & \to & z = 0 \quad \vee & \lambda = -\frac{1}{2} \\
\text{IV} & F_\lambda = g(x,yz) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 = 0 & & &
\end{array}$$

Nun unterscheidet man die Fälle:

- $y = 0$: Hier gilt es wiederum zu unterscheiden:
  - $z = 0$: Aus (IV) erhält man $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$ und $P_1(1,0,0)$, $P_2(-1,0,0)$
  - $\lambda = -\frac{1}{2}$: (I) ergibt $x = \frac{1}{2}$, (IV) wird damit zu $\frac{1}{4} + 2z^2 - 1 = 0$, $z^2 = \frac{3}{8}$ und $z = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$, also $P_3(\frac{1}{2}, 0, \sqrt{\frac{3}{8}})$ und $P_4(\frac{1}{2}, 0, -\sqrt{\frac{3}{8}})$.
- $\lambda = 1$, damit ist $\lambda = -\frac{1}{2}$ von vornherein ausgeschlossen, also $z = 0$. (I) liefert $\frac{1}{2} + 2x = 0$, also $x = -\frac{1}{4}$, damit wird (IV) zu $\frac{1}{16} + y^2 - 1 = 0$ mit der Lösung $y = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$. Letztlich erhält man also noch $P_5(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, 0)$ und $P_6(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}, 0)$.

Will man die Extrema noch klassifizieren, so kann man ausnutzen, dass $g(x,yz) = 0$ ein Ellipsoid, also eine kompakte Menge beschreibt, auf der die Funktion f sowohl ein Minimum als auch ein Maximum annehmen muss. Berechnung der Funktionswerte liefert:

$$f\big|_{P_1} = \frac{1}{2}, \qquad f\big|_{P_2} = -\frac{1}{2}, \qquad f\big|_{P_3} = f\big|_{P_4} = \frac{5}{8} \qquad f\big|_{P_5} = f\big|_{P_6} = -\frac{17}{16},$$

demnach liegen an P_3 und P_4 absolute Maxima, an P_5 und P_6 absolute Minima. Eine Untersuchung der Punkte P_1 und P_2 wäre allerdings aufwendiger.

Man bestimme die stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y,z) = x^2 + xz + y^2$$

unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$. *Handelt es sich dabei um Extreme?*

Mit $g(x,y,z) = 0 \to z = 1-x-y$ definieren wir $\tilde{f}(x,y) := f(x,y,1-x-y) = x^2 + x(1-x-y) + y^2 = x - xy + y^2$ und erhalten

$$\begin{array}{lll}
\tilde{f}_x = 1 - y = 0 & \to & y = 1 \\
\tilde{f}_y = -x + 2y = 0 & \to & x = 2y,
\end{array}$$

also $x = 2$, $y = 1$, $z = -2$. Nun ist $f(2,1,-2) = \tilde{f}(2,1) = 1$, aber z.B. $\tilde{f}(0,0) = 0 < 1$ und $\tilde{f}(2,0) = 2 > 1$, also ist $P(2,1,-2)$ kein Extremum.

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$$

Gesucht sind Lage und Art aller kritischen Punkte von f.

Nullsetzen der ersten partiellen Ableitungen liefert:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -3y^2 + 3x^2 = 3(x^2 - y^2) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = y^2,\ x = \pm y \\ f_y(x,y) &= 4y^3 - 6xy = 2y(2y^2 - 3x) = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \vee 2y^2 - 3x = 0 \end{aligned}$$

Eine Lösung ist also sicher $P_1(0,0)$. Setzt man nun $y^2 = x^2$ in $2y^2 - 3x = 0$ ein, erhält man $x \cdot (2x - 3) = 0$ mit den beiden Lösungen $x = 0$ (schon in P_1 erfasst) und $x = \frac{3}{2}$. Wegen $x = \pm y$ ergeben sich also zwei weitere Punkte $P_2(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ und $P_3(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$. Nun versuchen wir, anhand der Hesse-Matrix Aussagen über die Art des Extremums zu erhalten, dazu betrachten wir:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -6y \\ -6y & 12y^2 - 6x \end{vmatrix}$$

Für die Punkte P_2 und P_3 erhalten wir:

$$\Delta_2\big|_{P_2} = 9 \cdot 18 - (-9) \cdot (-9) = 81 > 0 \qquad \Delta_2\big|_{P_3} = 9 \cdot 18 - 9 \cdot 9 = 81 > 0,$$

Es handelt sich also um Extrema, und zwar (wegen $f_{xx}|_{P_2} = f_{xx}|_{P_2} = 9 > 0$) um zumindest lokale Minima. An P_1 kann mit der Hesse-Matrix keine Aussage gemacht werden ($\Delta_2\big|_{P_1} = 0$), da aber beispielsweise $f(x,0) = x^3$ in jeder Umgebung von $P_1(0,0)$ größere und kleinere Werte als $f(0,0) = 0$ annimmt, muss es sich um einen Sattelpunkt handeln. Anhand von $f(x,0)$ sieht man auch, dass f beliebig große und kleine Werte annehmen kann, es also keine globalen Extreme geben kann.

Man bestimme jenen Punkt auf dem Paraboloid

$$x^2 + y^2 = 2z + 9.$$

der vom Punkt $P(4,6,1)$ den geringsten Abstand hat.

Zur Vereinfachung betrachten wir statt des Abstands $d(x,y,z)$ die Funktion

$$f(x,y,z) := d(x,y,z)^2 = (x-4)^2 + (y-6)^2 + (z-1)^2,$$

die unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z - 9 = 0$ ein Minimum annehmen soll. Nun definieren wir

$$F(x,y,z,\lambda) := (x-4)^2 + (y-6)^2 + (z-1)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2z - 9)$$

und erhalten für die Ableitungen

$$\begin{array}{lllll} (I) & F_x = 2(x-4) + 2\lambda x = 0 & & (1+\lambda)x = 4 & \rightarrow x = 4/z \\ (II) & F_y = 2(y-6) + 2\lambda y = 0 & & (1+\lambda)y = 6 & \rightarrow y = 6/z \\ (III) & F_z = 2(z-1) + 2\lambda x = 0 & \rightarrow & 1 + \lambda = z & \\ (IV) & F_\lambda = x^2 + y^2 - 2z - 9 = 0 & & & \end{array}$$

Setzt man nun $x = \frac{4}{z}$ und $y = \frac{6}{z}$ in (IV) ein, so ergibt sich $\frac{16}{z^2} + \frac{36}{z^2} - 2z - 9 = 0$ und durch Multiplikation mit z^2 die kubische Gleichung $2z^3 + 9z^2 - 52 = 0$, deren einzige reelle Lösung $z_1 = 2$ ist. Der Punkt mit minimalem Abstand (denn einen solchen muss es ja geben) ist also $Q(2,3,2)$.

4 Diff.-Rech.: Zusatzbeispiele

1. Für die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \sin \frac{1}{xy} & \text{für } xy \neq 0 \\ 0 & \text{für } xy = 0 \end{cases}$$

berechne man:

(a) $\operatorname{grad} f\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$ und $\operatorname{grad} f(0,0)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$, $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)$ und $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx)$ für $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} f_x(x,1)$ und $f_x(0,1)$

(a) Für $xy \neq 0$ ist $f_x(x,y) = 2xy \sin \frac{1}{xy} - \cos \frac{1}{xy}$ und $f_y(x,y) = x^2 \sin \frac{1}{xy} - \frac{x}{y} \cos \frac{1}{xy}$. Daher ist

$$\operatorname{grad} f\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = \left(\frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}, \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{4}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right).$$

Für $y = 0$ gilt $f_x(x,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \ \forall x$; für $x = 0$ analog $f_y(0,y) = 0 \ \forall y$. Also ist $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$, $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$ und

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} kx^3 \sin \tfrac{1}{kx^2} = 0$$

weil $|\sin \frac{1}{kx^2}| \leq 1$ und $x^3 \to 0$ für $x \to 0$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} f_x(x,1) = \lim\limits_{x\to 0}(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}) = -\lim\limits_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ existiert nicht. Dagegen ist ist

$$f_x(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,1) - f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin \tfrac{1}{h} = 0$$

2. Man berechne die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x,y) = e^{\cos(xy^5)}$$

am Punkt $P(\frac{\pi}{2}, -1)$ in die Richtungen $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$ und $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Für die ersten beiden Ableitungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial \vec{e}_1} &= f_x = -y^5 \sin(xy^5) \cdot e^{\cos(xy^5)} & f_x(\tfrac{\pi}{2}, -1) &= \sin(-\tfrac{\pi}{2}) \cdot e^{\cos(-\frac{\pi}{2})} = -1 \\ \tfrac{\partial f}{\partial \vec{e}_2} &= f_y = -5xy^4 \sin(xy^5) \cdot e^{\cos(xy^5)} & f_y(\tfrac{\pi}{2}, -1) &= -5\tfrac{\pi}{2} \sin(-\tfrac{\pi}{2}) \cdot e^{\cos(-\frac{\pi}{2})} = \tfrac{5\pi}{2} \end{aligned}$$

Wegen der Differenzierbarkeit von f gilt nun:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}\left(\frac{\pi}{2}, -1\right) = \vec{a} \cdot \operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_x\left(\frac{\pi}{2}, -1\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_y\left(\frac{\pi}{2}, -1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{5\pi}{2} - 1\right)$$

3. Man bestimme und klassifiziere alle kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

Man erhält für die partiellen Ableitungen:

$$\begin{array}{lll} f_x = 3x^2 - 3 & f_{xx} = 6x & f_{xy} = 0 \\ f_y = 3y^2 - 12 & f_{yx} = 0 & f_{yy} = 6y \end{array}$$

Aus $f_x(x,y) = 3x^2 - 3 = 0$ erhält man $x^2 = 1$, also $x = \pm 1$; aus $f_y(x,y) = 3y^2 - 12 = 0$ analog $y^2 = 4$, also $y = \pm 2$. Es gibt also vier kritische Punkte

$$P_1(1,2) \qquad P_2(1,-2) \qquad P_3(-1,2) \qquad P_4(-1,-2)$$

Die Determinante der Hesse-Matrix ist $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36xy$ und für die Punkte ergibt sich:

$$\begin{array}{ll} \Delta|_{P_1} = 72 > 0 & f_{xx}|_{P_1} = 6 > 0 \to \text{relatives Minimum} \\ \Delta|_{P_2} = -72 < 0 & \text{Sattelpunkt} \\ \Delta|_{P_3} = -72 < 0 & \text{Sattelpunkt} \\ \Delta|_{P_4} = 72 > 0 & f_{xx}|_{P_1} = -6 < 0 \to \text{relatives Maximum} \end{array}$$

Die gefundenen Extrema können nur lokal sein, da $f(x,0) = x^3 - 3x + 20 \to +\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x,0) \to -\infty$ für $x \to -\infty$.

4. Man zeige, dass sich das Funktionensystem

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= (y+z)^4 + xy(x^2 - z^2) - 1 = 0 \\ f_2(x,y,z) &= (z-x)^4 - yz(x^2 + y^2) = 0 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $P(0,1,0)$ nach y und z auflösen läßt. Weiters bestimme man für die Auflösungen $y(x)$ und $z(x)$ die Ableitungen $y'(0)$ und $z'(0)$.

Es gilt $f_1,\ f_2 \in C^1$ und $f_1(0,1,0) = f_2(0,1,0) = 0$. Für die Jacobi-Determinante erhält man

$$\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)}\right| = \left|\begin{array}{cc} 4(y+z)^3 + x(x^2 - z^2) & 4(y+z)^3 - 2xyz \\ -z(x^2+y^2) & 4(z-x)^3 - y(x^2+y^2) \end{array}\right|_P = \left|\begin{array}{cc} 4 & 4 \\ 0 & -1 \end{array}\right| = -4 \neq 0,$$

also existiert eine derartige Auflösung. Zu den Ableitungen:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= (y(x)+z(x))^4 + xy(x)(x^2 - z(x)^2) - 1 \equiv 0 \\ F_2(x) &= (z(x)-x)^4 - y(x)z(x)(x^2 + y(x)^2) \equiv 0 \\ F_1'(x) &= 4(y(x)+z(x))^3 \cdot (y'(x) + z'(x)) + y(x) \cdot (x^2 - z(x)^2) \\ &\quad + xy'(x) \cdot (x^2 - z(x)^2) + xy(x) \cdot (2x - 2z(x)z'(x)) \equiv 0 \\ F_2'(x) &= 4(z(x)-x)^3 \cdot (z'(x) - 1) - y'(x)z(x) \cdot (x^2 + y(x)^2) \\ &\quad + y(x)z'(x) \cdot (x^2 + y(x)^2) + y(x)z(x) \cdot (2x + 2y(x)y'(x)) \equiv 0 \\ F_1'(0) &= 4 \cdot (1+0)^3 \cdot (y'(0) + z'(0)) + 1 \cdot (0-0) + 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots = 0 \\ F_2'(0) &= 4 \cdot (0-0)^3 \cdot \ldots - 0 \cdot \ldots + z'(0)(0+1) + 0 \cdot \ldots = 0 \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung erhält man sofort $z'(0) = 0$ und damit weiter $y'(0) = 0$.

5. Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = y + xy^3 + e^{xy}$$

(a) Man zeige, dass $f(x,y) = 0$ in einer Umgebung von $P(0,-1)$ nach y auflösbar ist. Liegt für diese Auflösung $y(x)$ in $x = 0$ ein lokales Extremum vor?

(b) Man bestimme Art und Lage aller kritischen Punkte von f.

(a) Es ist $f(x,y) \in C^1$ und $f(0,-1) = -1 + 0 + e^0 = 0$. Außerdem gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 3xy^2 + xe^{xy} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P = 1 \neq 0,$$

es gibt also eine lokale Auflösung $y(x)$. Nun erhält man die erste Ableitung entweder aus

$$\begin{aligned} F(x) &:= f(x,y(x)) = y(x) + xy(x)^3 + e^{xy(x)} \equiv 0 \\ F'(x) &= y'(x) + y(x)^3 + 3xy(x)^2y'(x) + e^{xy(x)} \cdot (y(x) + xy'(x)) \equiv 0 \\ F'(0) &= y'(0) - 1 + 0 \cdot \ldots + 1 \cdot (-1+0) = 0 \quad \rightarrow \quad y'(0) = 2 \end{aligned}$$

oder mittels

$$y'(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{y^3 + ye^{xy}}{1 + 3xy^2 + xe^{xy}} \qquad y'(0) = -\frac{-2}{1} = 2$$

Auf jeden Fall liegt wegen $y'(0) \neq 0$ kein lokales Extremum vor.

(b) Für kritische Punkte muss erfüllt sein

$$\begin{aligned} &f_x(x,y) = y^3 + ye^{xy} = y(y^2 + e^{xy}) = 0 \quad &&\rightarrow y = 0 \quad (y^2 + e^{xy} > 0 \;\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \\ &f_y(x,y) = 1 + 3xy^2 + xe^{xy} = 0 &&y = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \end{aligned}$$

Der einzige kritische Punkt ist demnach Q(-1,0). Untersuchung der Hesse-Matrix liefert:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= y^2e^{xy} \quad & f_{xy} &= 3y^2 + e^{xy} + xye^{xy} \\ f_{yx} &= f_{xy} & f_{yy} &= 1 + 6xy + x^2e^{xy} \end{aligned} \qquad \Delta|_Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Es handelt sich also um einen Sattelpunkt.

6. Gegeben ist das System

$$\begin{aligned} f(x,y) &:= x^2 + y^2 - 1 \\ g(x,y) &:= x^2 - y \end{aligned}$$

Indem man $(x_1, y_1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ als Startpunkt wähle, berechne man mit Hilfe des Newton-Verfahrens den Näherungswert (x_2, y_2) für die in der Nähe von (x_1, x_2) liegende Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems $f(x,y) = g(x,y) = 0$.

Man erhält $f|_{P_1} = -\frac{1}{2}$, $g|_{P_1} = -\frac{1}{4}$ und

$$f_x|_{P_1} = 2x|_{P_1} = 1 \qquad f_y|_{P_1} = 2y|_{P_1} = 1 \qquad g_x|_{P_1} = 2x|_{P_1} = 1 \qquad f_y|_{P_1} = -1|_{P_1} = -1$$

Also ist $J_1 = [f_xg_y - f_yg_x]_{P_1} = -1 - 1 = -2$ und man erhält

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \tfrac{1}{J_1}[fg_y - f_yg]_{P_1} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{7}{8} \\ y_2 &= y_1 - \tfrac{1}{J_1}[f_xg - fg_x]_{P_1} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{5}{8} \end{aligned}$$

7. Man untersuche die folgenden Funktionen auf das Vorliegen lokaler Extrema:

(a) $f(x, y) = (x + y)^2$

(b) $g(x, y) = x^3 + (x + y)^2$

(a) Gradientenbildung liefert:

$$f_x(x, y) = 2(x + y) = 0 \;\to\; y = -x \qquad f_y(x, y) = 2(x + y) = 0 \;\to\; y = -x$$

Für die Determinante der Hesse-Matrix ergibt sich

$$\Delta = \det \mathbf{H} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0,$$

das erlaubt keine Aussage. Nun ist aber $f(x, -x) = 0$ und $f(x, y) > 0$ für $y \neq -x$, also liegen überall globale Minima vor.

(b) Es ist

$$\left.\begin{array}{l} g_x = 3x^2 + 2(x + y) = 0 \\ g_y = 2(x + y) = 0 \end{array}\right\} \;\to\; 3x^2 = 0, \quad x = 0$$

Wiederum erlaubt $\Delta|_{(0,0)} = [2 \cdot (6x+2) - 4]_{(0,0)} = 12x|_{(0,0)} = 0$ keine Aussage. Am kritischen Punkt ist $g(0, 0) = 0$, es ist aber $g(x, -x) = x^3$ größer oder kleiner als Null, je nachdem, ob $x > 0$ oder $x < 0$ ist, an $(0, 0)$ selbst liegt also ein Sattelpunkt.

8. Man bestimme Lage und Art aller kritischen Punkte der Funktion

$$f(x, y) = (1 - x^2) \cdot (3 - y)^2$$

Als Bedingung für kritische Punkte erhält man

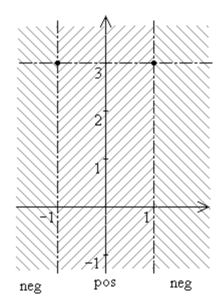
$$\begin{array}{lcccc} f_x(x, y) = -2x \cdot (3 - y)^2 = 0 & \to & x = 0 & \vee & y = 3 \\ f_y(x, y) = -2(1 - x^2)(3 - y) = 0 & \to & x = \pm 1 & \vee & y = 3 \end{array}$$

Da $y = 3$ beide Bedingungen erfüllt, sind alle Punkte $(x, 3)$ mit $x \in \mathbb{R}$ kritische Punkte. Untersuchung der Hesse-Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -2(3 - y)^2 & 4x(3 - y) \\ 4x(3 - y) & 2(1 - x^2) \end{pmatrix} \qquad \Delta = \det \mathbf{H} = (3 - y)^2 \cdot \big[\ldots\big] = 0 \text{ für } y = 3$$

erlaubt keine Aussage. Hier hilft eine andere Betrachtung:

$(1 - x^2)$ ist > 0 für $|x| < 1$ und < 0 für $|x| > 1$. $(y - 3)^2$ ist bei $y = 3$ Null und sonst überall positiv. Die Funktion $f(x, y) = (1 - x^2) \cdot (3 - y)^2$ ist also Null für $x = -1$, $x = 1$ und $y = 3$, ansonsten positiv für $|x| < 1$ und negativ für $|x| > 1$. Damit ist sind also alle Punkte $(x, 3)$ mit $|x| < 1$ lokale Minima und mit $|x| > 1$ lokale Maxima. $(-1, 3)$ und $(1, 3)$ sind Sattelpunkte, da es in jeder Umgebung positive und negative Werte gibt. Die gefundenen Extrema $(x, 3)$, $|x| \neq 0$ sind natürlich nur lokale, keine globalen Minima oder Maxima.



9. Man zeige, dass sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= z\cdot\cos y - x - z^2 \\ f_2(x,y,z) &= z\cdot\sin y + \ln(1+x^2) \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punkte $P(0,0,1)$ nach y und z auflösen läßt. Für diese Auflösungen $y(x)$ und $z(x)$ bestimme man, ob an der Stelle $x=0$ ein lokales Extremum, und wenn ja welches, vorliegt.

Es sind $f_1,\ f_2 \in C^1$ und es ist $f_1(0,0,1) = 1-1 = 0,\ f_2(0,0,1) = 0+0 = 0$.

$$\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)}\right|_P = \left|\begin{array}{cc} -z\cdot\sin y & \cos y - 2z \\ z\cdot\cos y & \sin y \end{array}\right|_P = \left|\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = 1 \neq 0,$$

eine Auflösung ist also möglich. Nun erhält man ($y=y(x)$, $z=z(x)$):

$$\begin{aligned} F_1(x) &= z\cdot\cos y - x - z^2 \equiv 0 \\ F_2(x) &= z\cdot\sin y + \ln(1+x^2) \equiv 0 \\ F_1'(x) &= z'\cos y - zy'\sin y - 1 - 2zz' \equiv 0 \\ F_2'(x) &= z'\sin y + zy'\cos y + \frac{2x}{1+x^2} \equiv 0 \\ F_1'(0) &= z'(0) - 0\cdot\ldots - 1 - 2z'(0) = 0 \\ F_2'(0) &= 0\cdot\ldots + y'(0) + 0\cdot\ldots = 0 \end{aligned}$$

Für $z(x)$ liegt wegen $z'(0) = -1 \neq 0$ an $x=0$ kein lokales Extremum, dagegen ist die Stelle für $y(x)$ zumindest ein kritischer Punkt, und die zweite Ableitung muss untersucht werden:

$$\begin{aligned} F_1''(x) &= z''\cos y - 2y'z'\sin y - zy'^2\cos y - zy''\sin y - 2z'^2 - 2zz'' \equiv 0 \\ F_2''(x) &= z''\sin y + 2y'z'\cos y - zy'^2\sin y + zy''\cos y + \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \\ F_1''(0) &= z''(0) - 0\cdot\ldots - 0\cdot\ldots - 0\cdot\ldots - 0\cdot\ldots - 2 - 2z''(0) = 0 && \big(z''(0) = -2\big) \\ F_2''(0) &= 0\cdot\ldots + 0\cdot\ldots + 0\cdot\ldots - 0\cdot\ldots + y''(0) + 2 = 0 && y''(0) = -2 \end{aligned}$$

Wegen $y''(0) = -2 < 0$ liegt für $y(x)$ also ein lokales Maximum vor.

10. Man bestimme diejenigen Punkte auf der Kugeloberfläche $x^2+y^2+z^2=1$, die von $(1,1,1)$ den kleinsten bzw. den größten Abstand haben.

Wir sollen die Funktion $f(x,y,z) = d((x,y,z),(1,1,1))^2 = (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$ minimieren bzw. maximieren. Mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren erhält man:

$$\begin{aligned} F(x,y,z,\lambda) &:= (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\lambda\cdot(x^2+y^2+z^2-1) \\ F_x &= 2(x-1)+2\lambda x = 0 \qquad 2\lambda x = 2(1-x) \qquad \lambda = \tfrac{1-x}{x} \\ F_y &= 2(y-1)+2\lambda y = 0 \qquad \lambda = \tfrac{1-y}{y} \\ F_z &= 2(z-1)+2\lambda z = 0 \qquad \lambda = \tfrac{1-z}{z} \\ F_\lambda &= x^2+y^2+z^2-1 = 0 \qquad \Rightarrow\ 3\cdot\tfrac{1}{(1+\lambda)^2} = 1 \quad \lambda = \pm\sqrt{3}-1 \end{aligned}$$

Damit ist $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (min. Abstand) bzw. $x=y=z=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (max. Abstand), wie natürlich auch geometrisch unmittelbar klar ist.

11. Man bestimme Maximum und Minimum der Funktion $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ auf der Menge

$$S = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 = 5,\ y = z\}.$$

Minimierung der Funktion $f(x,y,z) = x^2+y^2+z$ unter den beiden Nebenbedingungen $g(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 - 5 = 0$ und $h(x,y,z) = y - z = 0$:

$$\begin{array}{rcllll} F(x,y,z,\lambda,\mu) & := & x^2+y^2+z+\lambda\cdot((x-1)^2+y^2-5)+\mu\cdot(y-z) & & & \\ F_x & = & 2x+2\lambda(x-1)=0 & (1+\lambda)x=\lambda & & x=\frac{\lambda}{1+\lambda} \\ F_y & = & 2y+2\lambda y+\mu=0 & 2y(1+\lambda)=-\mu & & y=-\frac{\mu}{2(1+\lambda)} \\ F_z & = & 1-\mu=0 & \mu=1 & & \\ F_\lambda & = & (x-1)^2+y^2-5=0 & & & \\ F_\mu & = & y-z=0 & z=y & & \end{array}$$

Setzt man $x = x(\lambda)$ aus $F_x = 0$ und $y = y(\lambda)$ aus $F_y = 0$ (mit $\mu = 1$) nun in $F_\lambda = 0$ ein, so erhält man

$$\left(\frac{\lambda}{1+\lambda} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2(1+\lambda)}\right)^2 - 5 = 0 \qquad \frac{5}{4} = 5(1+\lambda)^2 \qquad \lambda = -1 \pm \frac{1}{2}$$

Daraus ergeben sich die Koordinaten:

$$x = \frac{-1 \pm \frac{1}{2}}{\pm\frac{1}{2}} = 1 \mp 2 \qquad y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pm\frac{1}{2}} = \mp 1 = z,$$

also die Punkte $P(-1,-1,-1)$ und $Q(3,1,1)$. Wegen der Kompaktheit von $(g=0) \cap (h=0)$ und $f|_P = 1,\ f|_Q = 11$ liegt an P ein Minimum und an Q ein Maximum.

5 Integralrechnung

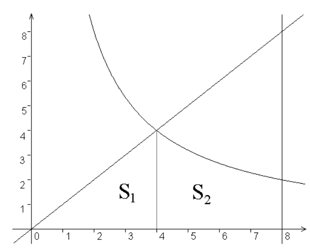
Man berechne das Dreifachintegral

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\ln 2} \int_{z=0}^{\pi} x\, e^{xy} \,\sin z \; dx\; dy\; dz$$

Das z-Integral kann man als Produkt abspalten, für den Rest empfiehlt es sich, zuerst über y, dann über x zu integrieren:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{1} x \left\{ \int_{y=0}^{\ln 2} e^{xy}\, dy \right\} dx \cdot \int_{z=0}^{\pi} \sin z\; dz = \int_{x=0}^{1} x \left[\frac{e^{xy}}{x} \right]_{y=0}^{\ln 2} dx \cdot \Big[-\cos z \Big]_{z=0}^{\pi} = \\ &= \int_{x=0}^{1} \left\{ e^{x \ln 2} - 1 \right\} dx \cdot [1+1] = 2 \cdot \left[\frac{e^{x \ln 2}}{\ln 2} - x \right]_{x=0}^{1} = \frac{2}{\ln 2} - 2 \end{aligned}$$

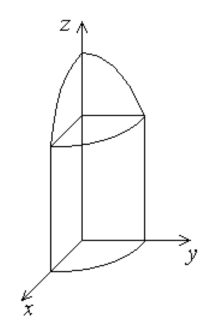
Man berechne das Integral $\iint_S x^2\, dx\, dy$, *wobei der Bereich* S *von der Hyperbel* $xy = 16$ *und den Geraden* $y = x$, $y = 0$ *und* $x = 8$ *begrenzt wird.*



Der rechts dargestellte Bereich S wird günstigerweise in zwei Bereiche S_1 und S_2 zerlegt, wobei S_1 von $x = 0$ bis $x = 4$ reicht und durch $\underline{y} = 0$ und $\overline{y} = x$ begrenzt wird; S_2 reicht von $x = 4$ bis $x = 8$ und wird durch $\underline{y} = 0$ sowie $\overline{y} = \frac{16}{x}$ begrenzt. (Analog könnte man natürlich auch an der Stelle $y = 2$ zerlegen.)

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S_1} x^2\, dx\, dy + \iint_{S_2} x^2\, dx\, dy = \int_{x=0}^{4} \left\{ \int_{\underline{y}=0}^{\overline{y}=x} x^2\, dy \right\} dx + \int_{x=4}^{8} \left\{ \int_{\underline{y}=0}^{\overline{y}=\frac{16}{x}} x^2\, dy \right\} dx \\ &= \int_{x=0}^{4} \left\{ x^2 y \Big|_{y=0}^{y=x} \right\} dx + \int_{x=4}^{8} \left\{ x^2 y \Big|_{y=0}^{y=\frac{16}{x}} \right\} dx = \int_{0}^{4} x^3\, dx + \int_{4}^{8} 16x\, dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^4 + 16 \frac{x^2}{2}\Big|_4^8 = 448 \end{aligned}$$

Man berechne das Trägheitsmoment $I_z = \iiint_B (x^2 + y^2)\, dV$ *jenes homogenen Körpers* B, *der durch* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ *und* $z = 3 - x^2 - y^2$ *begrenzt wird.*

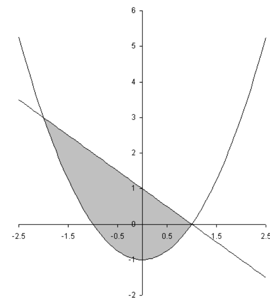


Für dieses Problem sind Zylinderkoordinaten vorteilhaft ($x^2 + y^2 = r^2$, $dV = r\, dr\, d\varphi\, dz$):

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{1} \int_{z=0}^{3-r^2} r^2 \cdot r\; d\varphi\, dr\, dz = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} d\varphi \int_{r=0}^{1} \Big[r^3 z \Big]_{z=0}^{3-r^2} dr = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_{r=0}^{1} \left(3r^3 - r^5 \right)\, dr = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{3r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right)_{r=0}^{1} = \frac{7\pi}{24} \end{aligned}$$

Man berechne den Schwerpunkt der Fläche S, die von der Parabel $y = x^2 - 1$ und der Geraden $y = 1 - x$ begrenzt wird.

Schneiden der beiden Kurven liefert: $x^2 - 1 = 1 - x$, $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$, also $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Nun berechnen wir den Flächeninhalt von S:



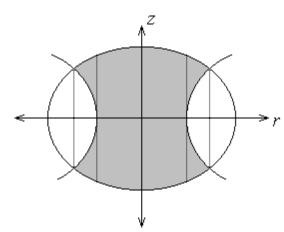
$$\begin{aligned} A &= \int_{x=-2}^{1} \int_{\underline{y}=x^2-1}^{\overline{y}=1-x} dx\,dy = \int_{x=-2}^{1} (2 - x - x^2)\,dx = \\ &= \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = [1 + \tfrac{1}{6}] - [-6 + \tfrac{8}{3}] = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Für die Schwerpunktkoordinaten erhält man nun

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{A} \iint_S x\,dx\,dy = \frac{1}{A} \int_{x=-2}^{1} \int_{\underline{y}=x^2-1}^{\overline{y}=1-x} x\,dx\,dy = \frac{1}{A} \int_{x=-2}^{1} xy\Big|_{\underline{y}=x^2-1}^{\overline{y}=1-x} dx \\ &= \frac{1}{A} \int_{x=-2}^{1} (2x - x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{A}\left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{1} = -\frac{1}{A} \cdot \frac{27}{12} = -\frac{1}{2} \\ y_S &= \frac{1}{A} \iint_S y\,dx\,dy = \frac{1}{A} \int_{x=-2}^{1} \int_{\underline{y}=x^2-1}^{\overline{y}=1-x} y\,dx\,dy = \frac{1}{A} \int_{x=-2}^{1} \frac{y^2}{2}\Big|_{\underline{y}=x^2-1}^{\overline{y}=1-x} dx \\ &= \frac{1}{2A} \int_{x=-2}^{1} (-x^4 + 3x^2 - 2x)\,dx = \frac{1}{2A}\left[-\frac{x^5}{5} + x^3 - x^2\right]_{-2}^{1} = -\frac{1}{2A} \cdot \frac{27}{5} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Man bestimme den Inhalt jenes Volumsbereiches, der von den Flächen $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ und $x^2 + y^2 = 2 - z^2$ eingeschlossen wird und der den Koordinatenursprung enthält.

Als erstes führen wir Polarkoordinaten ein, die beiden Flächen $r^2 = 1+z^2$ und $r^2 = 2 - z^2$ schneiden sich in $r = \sqrt{3/2}$ bzw. $z = \pm\frac{1}{4}$. Um die Integration ausführen zu können, muss der Bereich in zwei Teile zerlegt werden, einmal von $r = 0$ bis $r = 1$ und dann von $r = 1$ bis $r = \sqrt{3/2}$. Erleichternd kommt hinzu, dass aus Symmetriegründen nur über positive z integriert werden muss, der Bereich $z < 0$ kann durch einen Faktor 2 vor dem Integral berücksichtigt werden.

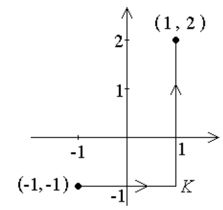


$$\begin{aligned} V &= 2\left\{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=0}^{\sqrt{2-r^2}} r\,d\varphi\,dr\,dz + \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{\sqrt{3/2}} \int_{z=\sqrt{r^2-1}}^{\sqrt{2-r^2}} r\,d\varphi\,dr\,dz\right\} \\ &= 2\left\{2\pi \int_{r=0}^{1} r\sqrt{2-r^2}\,dr + 2\pi \int_{r=1}^{\sqrt{3/2}} r(\sqrt{r^2-1} - \sqrt{2-r^2})\,dr\right\} \\ &= 4\pi\left\{\int_{r=0}^{\sqrt{3/2}} r\sqrt{2-r^2}\,dr - \int_{r=1}^{\sqrt{3/2}} r\sqrt{r^2-1}\,dr\right\} \end{aligned}$$

Mit der Substitution $u = r^2$, $\frac{du}{dr} = 2r$, $dr = \frac{du}{2r}$ in beiden Integralen folgt:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\left\{\int_0^{3/2} \sqrt{2-u}\,du - \int_{r=1}^{3/2} r\sqrt{u-1}\,du\right\} = 2\pi\left\{-\frac{2}{3}(2-u)^{3/2}\Big|_0^{3/2} - \frac{2}{3}(u-1)^{3/2}\Big|_1^{3/2}\right\} \\ &= 2\pi\left\{-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} + \frac{2}{3}2^{3/2} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}\right\} = 2\pi\left\{\frac{2}{3}2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\} = 2\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

6 Kurven- und Oberflächenintegrale



Man berechne den Wert des Kurvenintegrals

$$I = \int_K \{(2xy + y^2)dx + (2xy + x^2)dy\}$$

für die in nebenstehender Skizze gegebene Kurve K.

Es ist $V_1(x,y) = 2xy + y^2$ und $V_2(x,y) = 2xy + x^2$. Nun gilt $V_{1,y} = 2x + 2y = V_{2,x}$, daher besitzt $\vec{V} = (V_1, V_2)$ ein Potential Φ, für das gilt: $\Phi_x = V_1$ und $\Phi_y = V_2$. Integration liefert nun: $\Phi = \int V_1\,dx = x^2y + xy^2 + w_1(y)$ und $\Phi = \int V_2\,dy = x^2y + xy^2 + w_2(x)$. Auf jeden Fall ist also $\Phi(x,y) = x^2y + xy^2$ ein Potential, und das Integral liefert $I = \Phi(1,2) - \Phi(-1,-1) = (2+4) - (-1-1) = 8$.
Ebenso könnte man das Integral natürlich ohne Potential direkt berechnen (zuerst $(x,y) = (t,-1)$, $t \in [-1,1]$, $dx = dt$, $dy = 0$, dann $(x,y) = (1,t)$, $t \in [-1,2]$, $dy = dt$, $dx = 0$):

$$I = \int_{-1}^{1} (-2t+1)\,dt + \int_{-1}^{2} (2t+1)\,dt = \Big[-t^2+t\Big]_{-1}^{1} + \Big[t^2+t\Big]_{-1}^{2} = 2 + 6 = 8$$

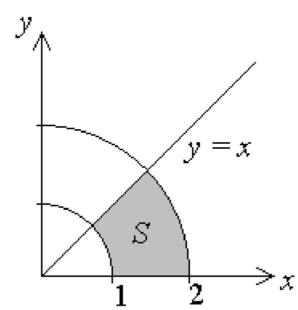
$S \subset \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$S := \big\{(x,y)\big|x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\big\}$$

Über S sei durch $z(x,y) = x^2 + y^2$ explizit eine Fläche F gegeben. Man skizziere die Menge S und berechne das Oberflächenintegral $I = \iint_F G\,dA$ mit $G(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$.

Zur Berechnung des Oberflächenelements braucht man $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 2x$ und $z_y = \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 2y$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S GG(x,y,z(x,y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2(x,y) + z_y^2(x,y)}\,d(x,y) = \\
&= \int_{r=1}^{2}\int_{\varphi=0}^{\pi/4} \underbrace{\arctan\frac{r\,\sin\varphi}{r\,\cos\varphi}}_{\arctan(\tan\varphi)=\varphi} \cdot \sqrt{1+4r^2} \cdot r\,dr\,d\varphi = \\
&= \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \varphi\,d\varphi \cdot \int_{r=1}^{2} r\,\sqrt{1+4r^2}\,dr = \left|\begin{array}{ll} u = 1+4r^2 & 2 \to 17 \\ du = 8r\,dr & 1 \to 5 \end{array}\right| = \\
&= \frac{\varphi^2}{2}\Big|_0^{\pi/4} \cdot \int_{u=5}^{17} \frac{1}{8}u^{1/2}\,du = \frac{\pi^2}{12\cdot 32}u^{3/2}\Big|_5^{17} = \frac{\pi^2}{384}\cdot(17^{3/2} - 5^{3/2})
\end{aligned}$$



Man untersuche, ob das Kurvenintegral

$$L = \int_{C:A\to B} \{2x_1\,dx_1 + x_3\,dx_2 + (x_2+x_4)dx_3 + x_3\,dx_4\}$$

mit $A(0,0,0,0)$, $B(1,1,0,1)$ vom Weg unabhängig ist und berechne L für den Fall, dass C die geradlinige Verbindung von A nach B ist.

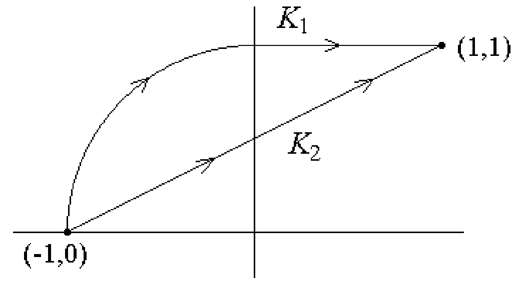
Untersuchung der Integrabilitätsbedingungen: $\frac{\partial V_2}{\partial x_3} = 1 = \frac{\partial V_3}{\partial x_2}$, $\frac{\partial V_3}{\partial x_4} = 1 = \frac{\partial V_4}{\partial x_3}$, alle anderen sind trivial erfüllt. Berechnung von L entweder über Potential (z.B. $\Phi = x_1^2 + x_2x_3 + x_3x_4$) oder schneller mit $\vec{x}(t) = (t,t,0,t)$, $t \in [0,1]$: $L = \int_0^1 2t\,dt = 1$

K_1, K_2 sind die rechts dargestellten Kurven im $\mathbb{R}^2$ mit Anfangspunkt $(-1,0)$ und Endpunkt $(1,1)$. Für die Vektorfelder

a) $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *b)* $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$,

c) $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{\pi x}\cos(\pi y) \\ -e^{\pi x}\sin(\pi y) \end{pmatrix}$

berechne man die Integrale $\displaystyle\int_{K_i} \{V_1\,dx + V_2\,dy\}$.



1. Untersuchung der Integrabilitätsbedingungen: $\frac{\partial V_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial V_2}{\partial x}$, also existiert ein Potential $\varphi(x,y)$, für das gilt: $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = V_1 = x$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = V_2 = y$, z.B. $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$. Damit ist
$$\int_{K_i} \{V_1\,dx + V_2\,dy\} = \varphi(1,1) - \varphi(-1,0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2. Wegen $\frac{\partial V_1}{\partial y} = -1$ und $\frac{\partial V_2}{\partial x} = 1$ gibt es kein Potential. Daher muss man die Kurven parametrisieren
$$\begin{array}{llllll} K_1: & i) & \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} & t \in [0,\frac{\pi}{2}] & \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ & ii) & \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} & t \in [0,1] & \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ K_2: & & \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -1+2t \\ t \end{pmatrix} & t \in [0,1] & \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$
und erhält für die Integrale:
$$\begin{aligned} \int_{K_1} \{-y\,dx + x\,dy\} &= \int_0^{\pi/2} \{-\sin^2 t - \cos^2 t\}dt + \int_0^1 (-1)\,dt = -\int_0^{\pi/2} dt - \int_0^1 dt = -\Big(1 + \frac{\pi}{2}\Big) \\ \int_{K_2} \{-y\,dx + x\,dy\} &= \int_0^1 \{-t\cdot 2 + (-1+2t)\}dt = -\int_0^1 dt = -1 \end{aligned}$$

3. Hier gilt wieder
$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = -\pi e^{\pi x}\sin(\pi y) = \frac{\partial V_2}{\partial x},$$
es gibt also ein Potential $\varphi(x,y)$, z.B. $\varphi(x,y) = \frac{1}{\pi}e^{\pi x}\cos(\pi y)$. Damit ist:
$$\int_{K_i} \{V_1\,dx + V_2\,dy\} = \varphi(1,1) - \varphi(-1,0) = \frac{1}{\pi}e^{\pi}\cos(\pi) - \frac{1}{\pi}e^{-\pi}\cos(0) = -\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{\pi}$$

Man zeige, dass das Kurvenintegral
$$I = \int_C \left\{\pi x e^{\pi w}\,dw + e^{\pi w}\,dx + z^2\,dy + 2yz\,dz\right\}$$
vom Weg unabhängig ist und berechne seinen Wert für den Weg $A(1,1,1,1) \to E(1,-1,2,0)$.

Es ist
$$\frac{\partial V_w}{\partial x} = \pi e^{\pi w} = \frac{\partial V_x}{\partial w} \qquad \frac{\partial V_y}{\partial z} = 2z = \frac{\partial V_z}{\partial y},$$
alle anderen Ableitungen sind klarerweise Null. Ein Potential ist $\varphi(w,x,y,z) = xe^{\pi w} + yz^2$ und für das Integral ergibt sich: $I = \varphi(1,-1,2,0) - \varphi(1,1,1,1) = -(2e^{\pi} + 1)$.

1. *Für das Vektorfeld* $\vec{V} = (yz^3, xz^3, 3xyz^2)$ *berechne man* rot $\vec{V}$, div $\vec{V}$, grad div $\vec{V}$, *gebenenfalls ein Potential* $\phi(x,y,z)$ *und das Kurvenintegral*

$$I = \int_C \{yz^3\,dx + xz^3\,dy + 4xyz^2\,dz\},$$

wobei C *den Anfangspunkt* $(0,0,0)$ *geradlinig mit dem Endpunkt* $(1,2,3)$ *verbindet.*

2. *Man überprüfe, ob das Kurvenintegral*

$$I = \int_C \{(e^y - ze^x)\,dx + xe^y\,dy - e^x\,dz\}$$

vom Weg unabhängig ist und berechne I *für den Fall, dass* C *das Geradenstück von* $(1,1,1)$ *nach* $(2,3,4)$ *ist.*

3. *Man berechne die beiden Kurvenintegrale*

$$I_i = \int_{C_i} \left\{(x^2+y^2)\,dx + e^y\,dy\right\}$$

wobei C_1 *den Anfangspunkt* $A(1,0)$ *mit dem Enpunkt* $B(0,1)$ *in einem Viertelkreis verbindet,* C_2 *in gerader Linie.*

4. *Man zeige, dass das Kurvenintegral*

$$\int_C \sin\left\{x_2\,e^{x_1\,\sin x_2}\,dx_1 + x_1\,\cos x_2\,e^{x_1\,\sin x_2}\,dx_2 + x_4^2\,dx_3 + 2x_3x_4\right\}$$

vom Weg unabhängig ist und bestimme ein Potential des Vektorfeldes.

5. *Man berechne den Oberflächeninhalt der Fläche* F *mit Parametrisierung*

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} \sin^2 u\,\cos v \\ \sin^2 u\,\sin v \\ \sin u\,\cos u \end{pmatrix} \qquad u \in [0,\pi],\ v \in [0,2\pi]$$

6. *Man berechne das Oberflächenintegral* $\int_F G\,d\sigma$ *der Funktion*

$$G(x,y,z) = \frac{yz}{\sqrt{1+x}}$$

über der Fläche

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\sqrt{x},\ z = \sqrt{4x - y^2}\right\}$$

7. *Durch* $z(x,y) = y^2$ *sei über der Menge*

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 2,\, 0 \le y \le \sqrt{x}\right\}$$

eine Fläche F *gegeben. Man berechne den Wert des Oberflächenintegrals* $\int_F y\,d\sigma$.

1. Für $\vec{V}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{V} &= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} yz^3 \\ xz^3 \\ 3xyz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3xz^2 - 3xz^2 \\ -3yz^2 + 3yz^2 \\ z^3 - z^3 \end{pmatrix} = \vec{0} \\
\text{div } \vec{V} &= \frac{\partial yz^3}{\partial x} + \frac{\partial xz^3}{\partial y} + \frac{\partial 3xyz^2}{\partial z} = 0 + 0 + 6xyz = 6xyz \\
\text{grad div } \vec{V} &= \text{grad } (6xyz) = \begin{pmatrix} 6yz \\ 6xz \\ 6xy \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wegen rot $\vec{V} = \vec{0}$ gibt es ein Potential; entweder durch Integration oder über Hinschauen erhält man $\varphi(x, y, z) = xyz^3$. Damit ergibt das Kurvenintegral einfach

$$I = \int_C \vec{V}\, d\vec{x} = \varphi(1, 2, 3) - \varphi(0, 0, 0) = 54$$

2. Untersuchung der Integrabilitätsbedingungen liefert:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = e^y = \frac{\partial V_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial V_1}{\partial z} = -e^x = \frac{\partial V_3}{\partial x} \qquad \frac{\partial V_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial V_3}{\partial y},$$

also ist das Integral wegunabhängig und es existiert ein Potential φ. Für dieses erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \int (e^y - ze^x)\, dx = xe^y - ze^x + w_1(y, z) \\ \varphi = \int xe^y\, dy = xe^y + w_2(x, z) \\ \varphi = -\int e^x\, dz = -ze^x + w_3(x, y) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(x, y, z) = xe^y - ze^x$$

Damit ist $I = \varphi(2, 3, 4) - \varphi(1, 1, 1) = (2e^3 - 4e^2) - (e - e) = 2e^3 - 4e^2$.

3. Die Integrabilitätsbedingtungen sind nicht erfüllt, also muss man parametrisieren:

$$\begin{aligned}
C_1 \quad &: \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \qquad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\
I_1 \quad &= \int_0^{\pi/2} \left\{ -(\cos^2 t + \sin^2 t) \sin t + e^{\sin t} \cos t \right\} dt = \\
&= -\int_0^{\pi/2} \sin t\, dt + \int_0^{\pi/2} e^{\sin t} \cos t\, dt = \Big[\cos t\Big]_0^{\pi/2} + \Big[e^{\sin t}\Big]_0^{\pi/2} = e - 2
\end{aligned}$$

Für den zweiten Weg erhält man analog:

$$\begin{aligned}
C_2 \quad &: \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 - t \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 1] \qquad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
I_2 \quad &= \int_0^{\pi/2} \left\{ -((1 - t)^2 + t^2) + e^t \right\} dt = \int_0^{\pi/2} (2t - 2t^2 - 1 + e^t)\, dt = \\
&= -\left[t^2 - \frac{2t^3}{3} - t + e^t \right]_0^{\pi/2} = e - \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

4. Überprüfen der Integrabilitätsbedingungen liefert:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_2} = \cos x_2\, e^{x_1 \sin x_2} + x_1 \sin x_2 \cos x_2\, e^{x_1 \sin x_2} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial V_3}{\partial x_4} = 2x_4 = \frac{\partial V_4}{\partial x_3},$$

alle anderen sind offensichtlich erfüllt. Als Potential erhält man $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = e^{x_1 \sin x_2} + x_3 x_4^2$.

5. Zunächst bestimmen wir die Tangentialvektoren an die Parameterkurven

$$\vec{x}_u = \begin{pmatrix} 2\sin u\, \cos u\, \cos v \\ 2\sin u\, \cos u\, \sin v \\ \cos^2 u - \sin^2 u \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -\sin^2 u\, \sin v \\ \sin^2 u\, \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

und den Normalvektor an die Fläche:

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{pmatrix} \sin^2 u\, \cos v\, (\sin^2 u - \cos^2 u) \\ \sin^2 u\, \sin v\, (\sin^2 u - \cos^2 u) \\ 2\sin^3 u \cos u \end{pmatrix}$$

Dessen Betrag ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| &= \sqrt{\sin^4 u\, \cos^2 v\, (\sin^2 u - \cos^2 u)^2 + \sin^4 u\, \sin^2 v\, (\sin^2 u - \cos^2 u)^2 + 4\sin^6 u \cos^2 u} = \\ &= \sqrt{\sin^4 u\, (\sin^4 u - 2\sin^2 u\, \cos^2 u + \cos^4 u) + 4\sin^6 u \cos^2 u} = \\ &= \sqrt{\sin^4 u\, (\sin^4 u + 2\sin^2 u\, \cos^2 u + \cos^4 u)} = \sqrt{\sin^4 u\, (\sin^2 u + \cos^2 u)^2} = \sin^2 u \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt

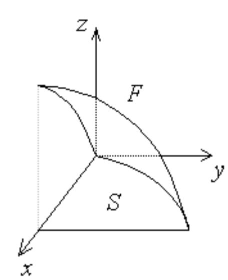
$$\begin{aligned} \int_F d\sigma &= \int_{u=0}^{\pi}\int_{v=0}^{2\pi} |\vec{x}_u \times \vec{x}_v|\; du\, dv = \int_{u=0}^{\pi}\int_{v=0}^{2\pi} \sin^2 u\, du\, dv = \\ &= \int_{v=0}^{2\pi} dv \cdot \int_{u=0}^{\pi} \sin^2 u\, du = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \pi^2 \end{aligned}$$

6. Die Fläche F ist definiert durch $z(x,y) = \sqrt{4x - y^2}$ über dem Bereich

$$S = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\sqrt{x}\}.$$

Für die Ableitungen von z nach x und y erhält man $z_x = \frac{2}{\sqrt{4x-y^2}}$, $z_y = -\frac{y}{\sqrt{4x-y^2}}$ und damit für das Oberflächenintegral:

$$\begin{aligned} \int_F G\, d\sigma &= \iint_S G(x,y,z(x,y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy = \\ &= \iint_S \frac{y\sqrt{4x-y^2}}{\sqrt{1+x}} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{4x-y^2} + \frac{y^2}{4x-y^2}}\, dx\, dy = \\ &= \iint_S \frac{y\sqrt{4x-y^2}}{\sqrt{1+x}} \cdot \sqrt{\frac{4x - y^2 + 4 + y^2}{4x-y^2}}\, dx\, dy = \iint_S 2y\, dx\, dy = \\ &= \int_{x=0}^{2}\int_{\underline{y}=0}^{\overline{y}=2\sqrt{x}} 2y\, dy = \int_{x=0}^{2} y^2\Big|_{\underline{y}=0}^{\overline{y}=2\sqrt{x}} = \int_0^2 4x\, dx = 2x^2\Big|_0^2 = 8 \end{aligned}$$



7. Für diese Fläche ist $z_x = 0$, $z_y = 2y$ und damit erhält man

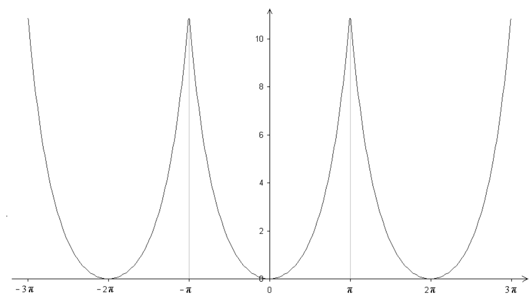
$$\begin{aligned} \int_F y\, d\sigma &= \iint_S y\, \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy = \iint_S y\, \sqrt{1 + 4y^2}\, dx\, dy = \int_{x=0}^{2}\int_{\underline{y}=0}^{\overline{y}=\sqrt{x}} y(1+4y^2)^{1/2} dy\, dy = \\ &= \frac{1}{12}\int_{x=0}^{2} (1+4y^2)^{3/2}\Big|_{\underline{y}=0}^{\overline{y}=\sqrt{x}} = \frac{1}{12}\int_0^2 \left[(1+4x)^{3/2} - 1\right] dx = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{10}(1+4x)^{5/2} - x\right]_0^2 = \\ &= \frac{1}{12}\left[\frac{1}{10}(3^5 - 1) - 2\right] = \frac{243}{120} - \frac{1}{120} - \frac{20}{120} = \frac{37}{20} \end{aligned}$$

7 Fourier-Reihen

$f(x)$ sei auf $(-\pi, +\pi]$ durch $f(x) := \cosh x - 1$ definiert und 2π-periodisch fortgesetzt.

1. *Man skizziere f im Intervall $[-3\pi, 3\pi]$.*
2. *Man berechne die Fourierreihe von f.*
3. *Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Fourierreihe gegen $f(x)$?*

1. Für f erhält man in $(-\pi, +\pi]$:



2. Da f gerade ist, sind alle Koeffizienten $b_\nu = 0$, weiters ist

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\cosh x - 1)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\sinh x - x\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\sinh\pi - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\sinh\pi - 1$$

Das Integral für a_k löst man am einfachsten mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned}
I &= \int \cosh x \cdot \cos\nu x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u' = \cosh x & u = \sinh x \\ v = \cos\nu x & v' = -\nu\sin\nu x \end{array}\right| = \\
&= \sinh x \cdot \cos\nu x + \nu\int \sinh x \cdot \sin\nu x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u' = \sinh x & u = \cosh x \\ v = \sin\nu x & v' = \nu\cos\nu x \end{array}\right| = \\
&= \sinh x \cdot \cos\nu x + \nu\cosh x \cdot \sin\nu x - \nu^2\int \cosh x \cdot \cos\nu x\,dx \\
\to \quad & \int \cosh x \cdot \cos\nu x\,dx = \frac{1}{1+\nu^2}\left(\sinh x \cdot \cos\nu x + \nu\cosh x \cdot \sin\nu x\right)
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
a_\nu &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cosh x \cdot \cos\nu x\,dx = \frac{2}{\pi(1+\nu^2)}\Big[\sinh x \cdot \cos\nu x + \nu\cosh x \cdot \sin\nu x\Big]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi(1+\nu^2)}\sinh\pi \cdot \cos\nu\pi = \frac{2\cdot(-1)^\nu}{\pi(1+\nu^2)}\sinh\pi
\end{aligned}$$

und letztendlich

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\sinh\pi - 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^\nu}{\pi(1+\nu^2)}\sinh\pi \cdot \cos\nu x$$

3. Diese Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen f, da f stetig ist und f'_+ und f'_- überall existieren.

Man entwickle die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ x + \frac{\pi}{2} & \text{für } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \qquad f(x \pm 2\pi) = f(x)$$

in eine Fourierreihe.

Da die Funktion im relevanten Intervall $[-\pi, \pi]$ nur für $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ungleich Null ist, muss man auch nur über diese Bereich integrieren. Für den Koeffizienten a_0 erhält man

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2},$$

denn das Integral $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\, dx$ verschwindet aus Symmetriegründen. Für a_k ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos(kx)\, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(kx)\, dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin(kx)}{k}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2k} \left(\sin \frac{k\pi}{2} - \sin(-\frac{k\pi}{2})\right) = \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k} \end{aligned}$$

Bei der Rechung ist zu beachten, dass $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos(kx)\, dx$ wieder aus Symmetrieüberlegungen heraus gleich Null sein muss, ausserdem wurde die Relation $\sin(-x) = -\sin x$ verwendet. Analog ist

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin(kx)\, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(kx)\, dx$$

Das zweite Integral ist wieder gleich Null, das erste läßt sich am besten mittels partieller Integration bewältigen: $u = x$, $u' = 1$, $v' = \sin(kx)$, $v = -\cos(kx)/k$. Damit erhält man ($\cos(-x) = \cos x$)

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{1}{k} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{2}{k^2 \pi} \sin \frac{k\pi}{2}$$

Nun geht es noch darum, die Koeffizienten zu vereinfachen. Der Ausdruck für a_k ist für gerade k gleich Null, für ungerade abwechselnd $+1$ oder -1. Analog verschwindet in der Formel für b_k abwechselnd der Sinus- oder der Cosinus-Term. Als geschlossene Ausdrücke erhält man also

$$a_{2n} = 0,\ a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1},\ b_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n},\ b_{2n+1} = \frac{2(-1)^n}{(2n+1)^2 \pi}$$

und für die Fourierreihe

$$f \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos((2n+1)x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \sin(2nx) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)^2 \pi} \sin((2n+1)x)$$