1 Rechnen mit komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$: $a + bi$ (Normalform)

- a Realteil
- b Imaginärteil ($b \in \mathbb{R}$!)
- i imaginäre Einheit, $i^2 = -1$

(„gefährliche" Schreibweise: $i = \sqrt{-1}$, führt bei unvorsichtiger Verwendung zu Ergebnissen wie $-1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$.)

Faustregel: Rechnen wie gewohnt, überall i^2 durch -1 ersetzen.

Beispiel: Als kleine Übung berechnen wir für $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = -1 + i$ Summe und Produkt:

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= 2 + 3i - 1 + i = 1 + 4i \\
z_1 z_2 &= (2 + 3i)(-1 + i) = -2 + 2i - 3i - 3 = -5 - i
\end{aligned}
$$

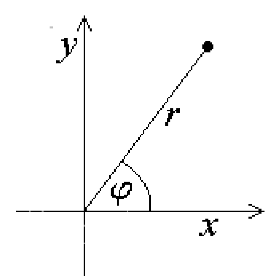
Komplex konjugierte Zahl zu $z = x + iy$: $\bar{z} = z^* = x - iy$.
Wie man sich leicht überzeugen kann, ist $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ und $\bar{\bar{z}} = z$.

Betrag der komplexen Zahl $z = x + iy$: $r = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
Für den Betrag gilt: $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ (Betrag eines Produkts ist gleich dem Produkt der Beträge) und weiters die Dreiecksungleichung $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Division komplexer Zahlen: $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\,\overline{w}}{w\,\overline{w}} = \dfrac{z\,\overline{w}}{|w|^2}$,

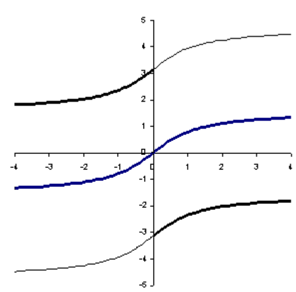
Polardarstellung komplexer Zahlen: Dazu führen wir für komplexe Zahlen neben dem Betrag r noch das Argument (die Phase) φ ein:

$$\varphi = \arg z = \arctan \frac{y}{x}$$



Dieses ist ja an sich nur bis auf $\pm 2\pi$ bestimmt. In den meisten Fällen schränkt man den Wertebereich von φ auf $(-\pi, \pi]$ ein und spricht dann vom *Hauptwert* des Arguments, $\mathrm{Arg}\, z$.

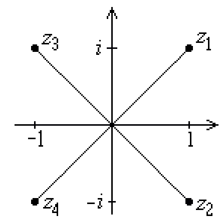
$$
\begin{aligned}
z &= x + iy = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \\
\bar{z} &= x - iy = re^{-i\varphi} = r(\cos\varphi - i \sin\varphi)
\end{aligned}
$$



Ganz generell gibt es beim Berechnen des Arguments aber einen Fallstrick, nämlich die Mehrdeutigkeit des Arcustangens. Es ist nämlich keinesweg klar, welchen Zweig man nehmen muss, und oft ist es hilfreich, sich die entprechende Zahl aufzuzeichnen, um mit dem Argument nicht plötzlich um $\pm\pi$ danebenzuliegen.

Beispiel: Als Demonstration berechnen wir die Polarkoordinaten der vier dargestellten Punkte:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \arctan(\tfrac{1}{1}) = \tfrac{\pi}{4}\\ \varphi_2 &= \arctan(\tfrac{-1}{1}) = -\tfrac{\pi}{4}\\ \varphi_3 &= \arctan(\tfrac{1}{-1}) = -\tfrac{\pi}{4}?\\ \varphi_4 &= \arctan(\tfrac{-1}{-1}) = \tfrac{\pi}{4}?\end{aligned}$$



Wenn es nach dem gehen würde, was die meisten Taschenrechner ausspucken, hätten jeweils zwei Punkte die gleichen Polarkoordinaten, was aber wohl nicht sein kann. Des Rätsels Lösung liegt natürlich darin, dass für die letzten beiden Ergebnisse jeweils ein anderer Zweig des Arcustangens zu nehmen ist, man also noch π addieren bzw. subtrahieren muss. Die richtigen Ergebnisse sind also $\varphi_3 = \frac{3\pi}{4}$ und $\varphi_4 = -\frac{3\pi}{4}$.

Wie sich mit Hilfe der Additionstheoreme für Winkelfunktionen leicht zeigen läßt, erhält man für Produkt und Quotient von $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ die äußerst praktischen Ausdrücke:

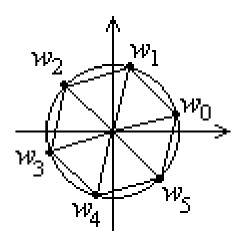
$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))\\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))\end{aligned}$$

Damit erhält man für Potenzen von komplexen Zahlen den Ausdruck $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ und für $|z| = 1$ die Formel von Moivre:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

Aus ihr kann man, indem man verschiedene Werte für n einsetzt und Real- bzw. Imaginärteil vergleicht, diverse trigonometrische Identitäten gewinnen.

Wurzelziehen: Als n-te Wurzel w einer Zahl z bezeichnet man ja jene Zahl mit $w^n = z$. Im Komplexen gibt es für jede Zahl n n-te Wurzeln, die auf einem regelmäßigen n-Eck um den Ursprung liegen:



$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\psi_k + i\sin\psi_k)$$

mit $\psi_k = \frac{\varphi+2\pi k}{n}$, $k = 0, \ldots n-1$.

Beispiel: Wir berechnen die fünften Wurzeln von $z = 32i$. Hier ist $r = 32$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$, für den Betrag der Wurzeln erhält man also $\rho = \sqrt[5]{32} = 2$ und weiter

$$w_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi+4\pi k}{10}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+4\pi k}{10}\right)\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Übungsbeispiele:

1. *Man berechne für a)* $z_1 = 1+i$ *und* $z_2 = -2+i$, *b)* $z_1 = 2-i$ *und* $z_2 = 3-2i$, *c)* $z_1 = 3-2i$ *und* $z_2 = 3+2i$ *die Ausdrücke* z_1+z_2, z_1z_2, z_1-z_2, $\frac{z_1}{z_2}$ *und* $z_1^2-z_2^2$.

   Für a) erhält man die Ergebnisse

$$\begin{aligned}
z_1+z_2 &= 1+i-2+i = -1+2i \\
z_1\cdot z_2 &= (1+i)(-2+i) = -2+i-2i-1 = -3-i \\
z_1-z_2 &= 1+i+2-i = 3 \\
\tfrac{z_1}{z_2} &= \tfrac{1+i}{-2+i} = \tfrac{(1+i)(-2-i)}{|-2+i|^2} = \tfrac{-2-i-2i+1}{5} = -\tfrac{1}{5}-\tfrac{3}{5}i \\
z_1^2-z_2^2 &= (1+i)^2-(-2+i)^2 = 1+2i-1-(4-4i-1) = -3+6i
\end{aligned}$$

   b) $z_1+z_2 = 5-3i$, $z_1z_2 = 4-7i$, $z_1-z_2 = -1+i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{8+i}{13}$ und $z_1^2-z_2^2 = -2+8i$
   c) $z_1+z_2 = 6$, $z_1z_2 = 13$, $z_1-z_2 = -4i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-12i}{13}$ und $z_1^2-z_2^2 = 24i$

2. *Man berechne für a)* $z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$ *und* $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}-i$, *b)* $z_1 = 1-i$ *und* $z_2 = i$, *c)* $z_1 = \sqrt{6}+\sqrt{2}\,i$ *und* $z_2 = 1-\frac{1}{\sqrt{3}}\,i$ *jeweils* $|z_1|$, $\operatorname{Arg} z_1$, $|z_2|$, $\operatorname{Arg} z_2$, $|z_1z_2|$, $\operatorname{Arg}(z_1z_2)$, $|\frac{z_1}{z_2}|$ *und* $\operatorname{Arg}(\frac{z_1}{z_2})$.

   Im Fall a) erhält man (man achte bei den Argumenten auf den richtigen Quadranten und darauf, ob wirklich der Hauptwert vorliegt):

$$\begin{array}{ll}
|z_1| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2, & \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3} \\
|z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+(-1)^2} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} & \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arctan}\frac{-1}{-1/\sqrt{3}} - \pi = \frac{\pi}{3}-\pi = -\frac{2\pi}{3} \\
|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2| = \frac{4}{\sqrt{3}} & \arg(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = -\frac{\pi}{3} \overset{\text{hier}}{=} \operatorname{Arg}(z_1z_2) \\
|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \sqrt{3} & \arg(\frac{z_1}{z_2}) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = \pi \overset{\text{hier}}{=} \operatorname{Arg}(\frac{z_1}{z_2})
\end{array}$$

   b) $|z_1| = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg} z_1 = -\frac{\pi}{4}$, $|z_2| = 1$, $\operatorname{Arg} z_2 = \frac{\pi}{2}$, $|z_1z_2| = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \frac{\pi}{4}$, $|\frac{z_1}{z_2}| = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = -\frac{3\pi}{4}$;

   c) $|z_1| = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{Arg} z_1 = \frac{\pi}{6}$, $|z_2| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{Arg} z_2 = -\frac{\pi}{6}$, $|z_1z_2| = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{Arg}(z_1z_2) = 0$, $|\frac{z_1}{z_2}| = \sqrt{6}$, $\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \frac{\pi}{3}$

3. *Man berechne* z_1^{10}, z_2^8 *und* $z_1^5z_2^4$ *für die Zahlen a)* $z_1 = \sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$ *und* $z_2 = 1-i$, *b)* $z_1 = 1+i$ *und* $z_2 = -2-2i$, *c)* $z_1 = \sqrt{2}+\sqrt{6}\,i$ *und* $z_2 = -1+\sqrt{3}\,i$

   Für derartige Rechungen ist es vorteilhaft, mit Polarkoordinaten zu arbeiten, und dazu berechnen wir zuerst (für a)) $|z_1| = 2$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $|z_2| = \sqrt{2}$ und $\varphi_2 = -\frac{\pi}{4}$. Nun erhalten wir (man erinnere sich an $e^{i\varphi\pm 2\pi i} = e^{i\varphi}$):

$$\begin{aligned}
z_1^{10} &= 2^{10}e^{i\frac{10\pi}{4}} = 2^{10}e^{i\frac{\pi}{2}} = 1024i \\
z_2^8 &= (\sqrt{2})^8e^{-i\frac{8\pi}{4}} = 16e^{-i2\pi} = 16e^0 = 16 \\
z_1^5z_2^4 &= 2^5(\sqrt{2})^4e^{i\frac{5\pi}{4}}e^{-i\frac{4\pi}{4}} = 128e^{i\frac{5\pi-4\pi}{4}} = 128e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{128}{\sqrt{2}}(1+i).
\end{aligned}$$

b) $|z_1| = \sqrt{2}$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $|z_2| = 2\sqrt{2}$, $\varphi_2 = -\frac{3\pi}{4}$; $z_1^{10} = 2^5 e^{i\frac{10\pi}{4}} = 32i$, $z_2^8 = 2^{12}e^{-6i\pi} = 4096$, $z_1^5 z_2^4 = 2^8\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}e^{i\pi} = 256 + 256i$; c) $|z_1| = 2\sqrt{2}$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$, $|z_2| = 2$, $\varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$; $z_1^{10} = 2^{15}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -8192-8192\sqrt{3}\,i$, $z_2^8 = 2^8 e^{i\frac{16\pi}{3}} = -64-64\sqrt{3}\,i$, $z_1^5 z_2^4 = 2^{11}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = 512\sqrt{2}(\sqrt{3}+i)$

4. *Man finde alle Zahlen w, für die gilt a) $w^5 = -32$, b) $w^8 = 256$, c) $w^3 = -27i$ und skizziere sie in der komplexen Ebene. Welche Werte sind dabei reell?*

$z = -32$ hat fünf komplexe Wurzeln w_k ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) mit dem Betrag $|w_k| = \sqrt[5]{32} = 2$. Bei der Berechnung des Arguments erhalten wir zunächst $\operatorname{Arg} z = \pi$ und daher weiter $\operatorname{Arg} w_k = \frac{\pi+2\pi k}{5}$. Die Wurzeln von -32 sind also

$$w_k = 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{5} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{5}\right).$$

Reell ist dabei nur $w_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$.

b) $|w_k| = 2$, $\operatorname{Arg} z = 0$, $w_k = 2(\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4})$ mit $k = 0, \ldots, 7$. Reell sind $w_0 = 2$ und $w_4 = -2$; c) $|w_k| = 3$, $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{2}$, $w_0 = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $w_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$, $w_2 = 3e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, kein w_k ist reell

5. *Man beweise mit Hilfe der Formel von Moivre die folgenden Identitäten:*
a) $\cos 5\varphi = 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi$,
b) $\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$,
c) $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ *und* $\sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi$

a) Für $n = 5$ lautet die Formel von Moivre

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi.$$

Durch Ausmultiplizieren der linken Seite erhält man

$\cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + 5i\sin^5\varphi$,

und der Realteil dieses Ausdrucks muss gleich $\cos 5\varphi$ sein. Mit der Identität $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\cos 5\varphi &= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi \\
&= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi(1-\cos^2\varphi) + 5\cos\varphi(1 - 2\cos^2\varphi + \cos^4\varphi) \\
&= 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi.
\end{aligned}$$

b) Die Formel von Moivre für $n = 4$ lautet: $\cos(4\varphi) + i\sin(4\varphi) = \cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 4i\cos\varphi\sin^3\varphi + \sin^4\varphi$ Hier müssen die Realteile auf beiden Seiten übereinstimmen, und mit $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ erhält man die zu beweisende Aussage.

c) Für $n = 2$ ergibt die Formel von Moivre:

$$\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2 + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi$$

Daraus folgt durch Vergleich von Real- und Imaginärteil sofort $\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ und $\sin(2\varphi) = 2\cos\varphi\sin\varphi$.

2 Teilmengen der komplexen Ebene

$\mathbb{C}$ ist mit der Abstandsdefinition $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ ein metrischer Raum $\rightarrow$ allgemeine Begriffe anwendbar:

- So ist die Epsilon-Umgebung eines Punktes z_0 die Menge $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z - z_0| < \varepsilon\}$.
- Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt offen, wenn es zu jedem $z \in M$ ein ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $U_\varepsilon(z)$ ganz in M liegt.
- Dagegen ist $M \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen, wenn $\mathbb{C} \setminus M$ offen ist. Offenheit und Abgeschlossenheit schließen einander nicht unbedingt aus.
- M ist beschränkt, wenn es ein $R \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|z| < R$ für alle $z \in M$ ist.
- Genau dann wenn eine Menge beschränkt und abgeschlossen ist, ist sie kompakt (Satz von Heine-Borel).

Besonders angenehm in $\mathbb{C}$ ist, dass sich viele Teilmengen mit Begriffen wie dem Betrag, Re oder Im sehr einfach beschreiben lassen. So ist etwa $\{z \,|\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$ die offene rechte Halbebene oder $\{z \,|\, z = \bar{z}\}$ die reelle Achse.

Besonders häufig stößt man auch auf Ausdrücke $|z - z_0| < r$. Setzt man dort die Definition des Betrages ein, erhält man $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$ und nach Ausquadrieren (was ja erlaubt ist, weil beide Seiten positiv sind):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2.$$

Es handelt sich also um eine offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $z_0 = x_0 + iy_0$ und Radius r. Natürlich lassen sich auf ähnlichem Weg auch kompliziertere Teilmengen beschreiben, andererseits können sich hinter gefährlich wirkenden Ausdrücke völlig harmlose Mengen verbergen.

Beispiel: Wir untersuchen die Menge $M = \{z \,|\, \mathrm{Re}\, \frac{1}{z} > 0\}$ und erhalten

$$\mathrm{Re}\, \frac{1}{z} = \mathrm{Re}\, \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \mathrm{Re}\, \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} > 0 \iff \mathrm{Re}\, z > 0,$$

es handelt sich also wieder um die rechte Halbebene.

Beispiel: Welche Punktmenge wird durch $|\frac{z-3}{z+3}| > 2$ beschrieben? Wir formen um:

$$\begin{aligned} |z - 3| &> 2|z + 3| \\ (x - 3)^2 + y^2 &> 4\left((x + 3)^2 + y^2\right) \\ 3x^2 + 30x + 3y^2 + 27 &< 0 \\ (x + 5)^2 + y^2 &< 16 \end{aligned}$$

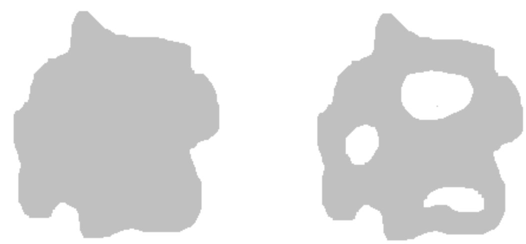
Es handelt sich also um das Innere eines Kreises mit Mittelpunkt $z_0 = -5$ und Radius $r = 4$.

Charakterisierung mit Hilfe topologischer Begriffe:

Ganz grob gesprochen heißt eine Menge M zusammenhängend, wenn sie nur „aus einem Stück“ besteht. Jene Mengen, die sowohl offen als auch zusammenhängend sind, nennt man *Gebiete*. Tatsächlich sind die Gebiete jene Mengen, die man innerhalb der Funktionentheorie wohl am öftesten betrachtet.

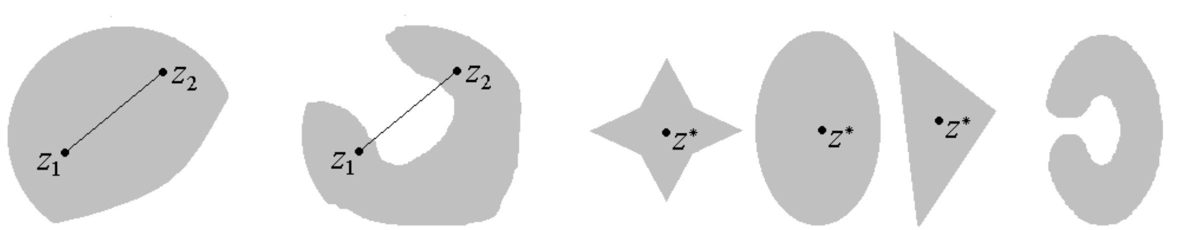
M zusammenhängend M nicht zusammenhängend

Hat ein Gebiet zudem auch keine Löcher im Inneren, so nennt man es *einfach zusammenhängend*. Besteht der Rand hingegen aus n jeweils geschlossenen Kurven, so heißt es n-fach zusammenhängend. Insbesondere einfach zusammenhängende Gebiete werden uns des öfteren begegnen.



einfach zusammenhängend nicht einf. zusammenhängend

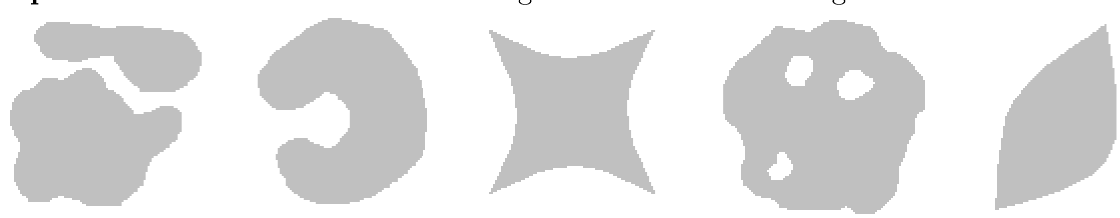
Noch stärkere, das heißt weiter einschränkende Eigenschaften sind Konvexität und Sterneigenschaft. Eine Menge $M \in \mathbb{C}$ heißt *konvex*, wenn für alle $z_1, z_2 \in M$ die Verbindungsstrecke $z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t, t \in [0, 1]$ ganz in M liegt. Gibt es zumindest einen Sternmittelpunkt z^*, so dass die Verbindungsstrecken zwischen z^* und allen $z \in M$ ganz in M liegen, spricht man von einem Sterngebiet.



konvex nicht konvex Sterngebiete kein Sterngebiet

Klarerweise ist jedes konvexe Gebiet auch ein Sterngebiet, und jeder Punkt ist ein möglicher Sternmittelpunkt. Ebenso klar ist aber auch, dass die Umkehrung nicht gilt.

Beispiel: Wir charakterisieren nun die folgenden fünf offenen Mengen:



M_1 M_2 M_3 M_4 M_5

M_1 ist nicht zusammenhängend, M_2 einfach zusammenhängend, M_3 ein Sterngebiet, M_4 ein Gebiet und M_5 ein konvexes Gebiet.

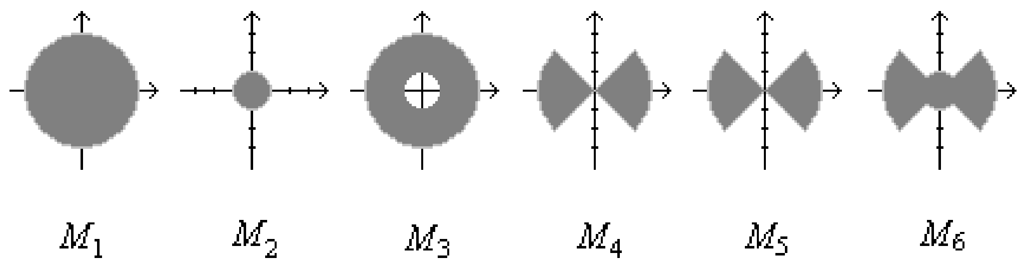
Übungsbeispiele:
Man skizziere die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene:

a) $M_1 = \{z \mid |z| < 3\}$, $M_2 = \{z \mid |z| < 1\}$, $M_3 = M_1 \setminus M_2$, $M_4 = \{z \in M_1 \mid |\mathrm{Arg}\, z| < \frac{\pi}{4} \vee |\mathrm{Arg}\, z| > \frac{3\pi}{4}\}$, $M_5 = M_4 \cup \{0\}$ und $M_6 = M_4 \cup M_2$.

b) $M_1 = \{z \mid |z - 3i| < 2\}$, $M_2 = \{z \mid |z + 3i| < 2\}$, $M_3 = \{z \mid |z| < 3\}$, $M_4 = M_3 \cap (M_1 \cup M_2)$, $M_5 = M_3 \setminus (M_1 \cup M_2)$ und $M_6 = M_3 \cup (M_1 \cup M_2)$

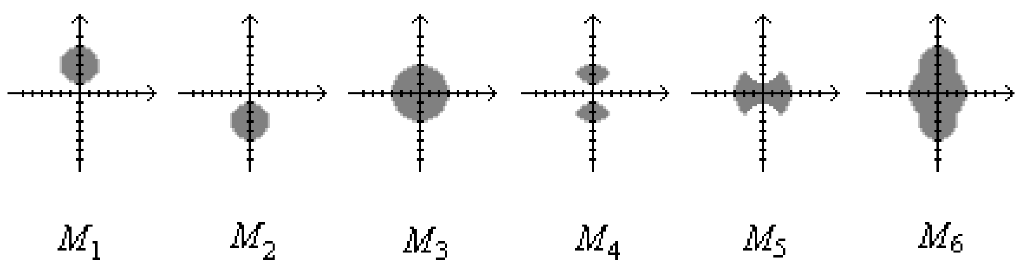
c) $M_1 = \{z \mid |z - 3| + |z + 3| < 10\}$, $M_2 = \{z \mid 1 < |z| < 3\}$, $M_3 = \{z \mid 4 \leq |z| \leq 5\}$, $M_4 = M_1 \setminus M_2$, $M_5 = M_1 \cup M_3$, $M_6 = M_1 \setminus M_3$

Weiters gebe man an, ob es sich um Gebiete (und wenn ja um welche) handelt.

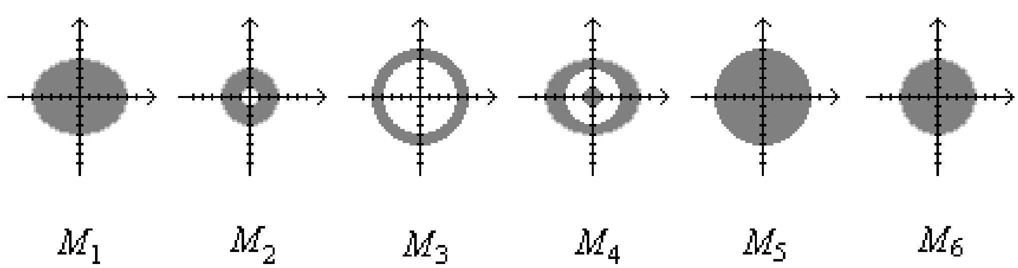


a)
M_1 und M_2 sind beide konvexe Gebiete. M_3 ist zusammenhängend, aber kein Gebiet, weil es nicht offen ist (Kreislinie $|z| = 1$). $M4$ ist zwar offen, aber nicht zusammenhängend, also ebenfalls kein Gebiet. Nimmt man, wie in M_5, den Nullpunkt dazu, ist die Menge zwar zusammenhängend (und $z = 0$ ist sogar ein Sternpunkt), aber dafür ist sie nicht mehr offen, M_5 ist also ebenfalls kein Gebiet. Dafür ist M_6 offen und zusammenhängend, also ein Gebiet, genauer sogar ein Sterngebiet mit dem Sternmittelpunkt $z^* = 0$.

b) M_1 bis M_3 sind offene Kreisscheiben mit den Mittelpunkten $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$, $z_3 = 0$ und den Radien $r_1 = 2$, $r_2 = 2$ und $r_3 = 3$. Alle drei sind natürlich konvexe Gebiete. M_4 ist offen, aber nicht zusammenhängend, M_5 ist zusammenhängend, aber nicht offen, beide sind daher keine Gebiete. M_6 hingegen ist ein Sterngebiet, aber nicht konvex.



c) M_1 ist eine offene Ellipse mit Brennpunkten $z = -3$ und $z = 3$, also ein konvexes Gebiet. M_2 und $M - 3$ sind Kreisringe, wobei M_2 offen ist, M_3 hingegen nicht. M_2 ist also ein zweifach zusammenhängendes Gebiet. M_4 ist weder offen noch zusammenhängend, M_5 ist nicht offen, beide sind also keine Gebiete. M_6 hingegen ist als offene Kreisscheibe ein konvexes Gebiet.



3 Elementare Funktionen im Komplexen

Komplexe Funktion: Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto w = f(z)$

Jede Funktion von $z = x + iy$ läßt sich sowohl als Funktion der reellen, voneinander unabhängigen Variablen x und y als auch als Funktion der komplexen, voneinander abhängigen Größen z und $\bar{z} = x - iy$ schreiben. Der Übergang kann auf jeden Fall mit

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \qquad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

erfolgen, oft lassen sich aber sogar noch einfachere Wege finden.

Beispiel: Wir wollen die Funktion $f = x^3 + xy^2$ auf die Argumente z und $\bar{z}$ umschreiben. Dazu erinnern wir uns an $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$ und erhalten:

$$f = x^3 + xy^2 = x(x^2 + y^2) = x \cdot z\bar{z} = \frac{z + \bar{z}}{2} z\bar{z} = \frac{1}{2}(z^2\bar{z} + z\bar{z}^2).$$

Beispiel: Auch in die andere Richtung funktioniert natürlich das Umschreiben: Für $f = z^2\bar{z}$ erhalten wir:

$$f = z^2\bar{z} = z \cdot z\bar{z} = (x + iy)(x^2 + y^2) = x^3 + xy^2 + ix^2y + iy^3.$$

Warnung: Weil die gleiche Funktion dargestellt wird, verwendet man für $f(x, y)$ und $f(z, \bar{z})$ oft das gleiche Symbol, nämlich f. Die funktionale x-y-Abhängigkeit von f ist aber im allgemeinen eine andere als die z-$\bar{z}$-Abhängigkeit.

Exponential- und Winkelfunktionen

Verallgemeinerung der Potenzreihenentwicklung auf beliebig komplexe z:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \qquad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

Wie im Reellen: $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ und $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$.

Im Gegensatz zum Reellen gibt es im Komplexen auch Zahlen z mit $|\sin z| > 1$ oder $|\cos z| > 1$ und die Exponentialfunktion kann auch negative Werte annehmen (aber weiterhin nicht Null werden). Auf jeden Fall aber gelten die folgenden Funktionalgleichungen (für alle komplexen z, w und alle reellen x, y):

- Wie auch im Reellen gilt $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, wie sich leicht durch Einsetzten in die Potenzreihendarstellung zeigen läßt. Allerdings ist im allgemeinen $(e^z)^w \neq e^{zw}$. Ist w allerdings eine ganze Zahl, so bleibt die aus dem Reellen bekannte Beziehung gültig, $(e^z)^n = e^{nz}$

- Es ist $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, insbesondere ist $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ für reelle y. Daraus folgt $|e^{iy}| = \cos^2 y + \sin^2 y = 1$.

- Mit den beiden oberen Eigenschaften folgt weiter $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Daraus ergibt sich unmittelbar: $e^{z+2\pi i} = e^z$. (e^z ist $2\pi i$-periodisch.)

- Klarerweise lassen sich auch die trigonometrischen Funktionen durch die Exponentialfunktion darstellen: $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ und $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

- Wie im Reellen gelten die Additionstheoreme

$$\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$$
$$\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \cos z \sin w$$

- Außerdem ist nach wie vor $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ und analog für Sinus, weiters $\cos(-z) = \cos(z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$, zudem gilt $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

- Definiert man wie im Reellen die hyperbolischen Funktionen mit $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$; $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, so gilt $\cosh iz = \cos z$ und $\sinh iz = i \sin z$ sowie $\cos iz = \cosh z$ und $\sin iz = i \sinh z$. Außerdem ist allgemein $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

- Damit kann man die trigonometrischen Funktionen in Real- und Imaginärteil auftrennen, man erhält dabei ($z = x + iy$):

$$\cos(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$
$$\sin(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

Logarithmus, Arcus- und Areafunktionen

Logarithmus $\log z$: Umkehrung der Exponentialfunktion, mehrdeutig, weil e^z ja $2\pi i$-periodisch ist:

$$z = \log_k w = \ln |w| + i \arg_k w.$$

Besonders wichtig: Fall $k = 0$, *Hauptwert* des Logarithmus:

$$z = \operatorname{Log} w = \ln |w| + i \operatorname{Arg} w.$$

Was noch zu sagen wäre: $\log_k w$ ist für beliebige k auf $\mathbb{R}^-$ unstetig und bei $w = 0$ nicht einmal definiert. Beliebige Logarithmen $\log_k$ kann man über $\log_k w = \operatorname{Log} w + 2\pi i k$ stets auf den Hauptwert umschreiben.

Auch wenn der komplexe Logarithmus viele Eigenschaften des reellen ln hat, so gelten doch manche praktischen Zusammenhänge nicht mehr. So ist etwa im allgemeinen $\operatorname{Log}(zw) \neq \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$. Ein derartiger Zusammenhang gilt nur mehr in abgeschwächter Form: Es gibt nämlich stets ein $k \in \mathbb{Z}$, für das $\log(zw) = \log z + \log w + 2\pi i k$ ist.

Die Mehrdeutigkeit des Logarithmus überträgt sich auch auf die allgemeine Potenzfunktion

$$z^b := e^{b \log z}. \tag{1}$$

Nur wenn b eine ganze Zahl ist, wird z^b eindeutig und fällt mit dem Hauptwert $e^{b \operatorname{Log} z}$ zusammen. Für $b = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gibt es nur n verschiedene Werte, die n-ten Wurzeln.

Umkehrfunktionen zu Winkel- und Hyperbelfunktionen, lassen sich durch den Logarithmus ausdrücken:

$$\begin{aligned} z &= \arcsin w = -i \log\left(iw \pm \sqrt{1-w^2}\right) & z &= \arccos w = -i \log\left(w \pm \sqrt{w^2-1}\right) \\ z &= \arctan w = \tfrac{i}{2} \log \tfrac{i+w}{i-w} & z &= \operatorname{arccot} w = \tfrac{i}{2} \log \tfrac{i-w}{i+w} \\ z &= \operatorname{arsinh} w = \log\left(w \pm \sqrt{w^2+1}\right) & z &= \operatorname{arcosh} w = \log\left(w \pm \sqrt{w^2-1}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Nimmt man in diesen Ausdrücken jeweils den Hauptwert des Logarithmus und das positive Vorzeichen, so erhält man den jeweiligen Hauptwert, der ebenfalls mit einem großen Anfangsbuchstaben angedeutet wird, also z.B. $\operatorname{Arcsin} w = -i \operatorname{Log}(iw + \sqrt{1-w^2})$.

Übungsbeispiele:

1. Man verifiziere die Relation $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ für die komplexe Zahl $z = \pi + i$.

   Wir berechnen

   $$\begin{aligned} e^{i(\pi+i)} &= e^{-1+i\pi} = e^{-1}e^{i\pi} = \tfrac{1}{e}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\tfrac{1}{e} \\ \cos(\pi+i) &= \cos\pi\ \cosh 1 - i\sin\pi\ \sinh 1 = -\tfrac{e+e^{-1}}{2} \\ \sin(\pi+i) &= \sin\pi\ \cosh 1 + i\cos\pi\ \sinh 1 = -i\tfrac{e-e^{-1}}{2} \end{aligned}$$

   Nun erhalten wir erwartungsgemäß

   $$\cos z + i\sin z = -\tfrac{e^1+e^{-1}}{2} + \tfrac{e^1-e^{-1}}{2} = -\tfrac{1}{e} = e^{i(\pi+i)},$$

   die Formel ist zumindest in diesem Fall also richtig.

2. *Man berechne*

   $$\mathrm{Re}\left(e^{(z^3)}\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\left(e^{(z^3)}\right)$$

   für $z = x + iy$ und damit speziell für $z_1 = \sqrt[3]{\pi} + i\sqrt[3]{\pi}$.

   Allgemein erhält man $z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = x^3 + 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$, $e^{(z^3)} = e^{x^3-3xy^2}e^{i(3x^2y-y^3)} = e^{x^3-3xy^2}(\cos(3x^2y - y^3) + i\sin(3x^2y - y^3))$. Speziell für $z_1 = \sqrt[3]{\pi} + i\sqrt[3]{\pi}$ ergibt sich $e^{(z_1^3)} = e^{-2\pi}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = \frac{1}{e^{2\pi}}$

3. Man berechne $\mathrm{Log}\, z_k$ für die unten gegebenen komplexen Zahlen z_1, z_2 und $z_3 = z_1 \cdot z_2$.
   a) $z_1 = i$, $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$, b) $z_1 = 1 - \sqrt{3}\, i$, $z_2 = -1 - \sqrt{3}\, i$
   und c) $z_1 = 1 - i$ und $z_2 = 3i$. Gilt dabei $\mathrm{Log}\,(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2$?

   $|z_1| = 1$, $\mathrm{Arg}\, z_1 = \frac{\pi}{2}$ und $\mathrm{Log}\, z_1 = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$
   $|z_2| = 2$, $\mathrm{Arg}\, z_2 = \frac{\pi}{4}$ und $\mathrm{Log}\, z_2 = \ln 2 + i\frac{\pi}{4}$
   $|z_3| = |z_1| \cdot |z_2| = 2$, $\arg z_3 = \mathrm{Arg}\, z_1 + Arg z_2 = \frac{3\pi}{4} = \mathrm{Arg}\, z_3$ und $\mathrm{Log}\, z_3 = \ln 2 + i\frac{3\pi}{4}$

   In diesem Fall ist tatsächlich $\mathrm{Log}\,(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2$. Das würde nicht mehr gelten, wenn $\mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 \notin (-\pi, \pi]$, die Summe der Argumente also kein Hauptwert mehr wäre.

   b) $|z_1| = 2$, $\mathrm{Arg}\, z_1 = -\frac{\pi}{3}$, $\mathrm{Log}\, z_1 = \ln 2 - i\frac{\pi}{3}$; $|z_2| = 2$, $\mathrm{Arg}\, z_2 = -\frac{2\pi}{3}$, $\mathrm{Log}\, z_2 = \ln 2 - i\frac{2\pi}{3}$; $|z_3| = 4$, $\mathrm{Arg}\, z_3 = \pi$, $\mathrm{Log}\, z_3 = 2\ln 2 + i\pi \neq \ln 2 - i\pi = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2$.

   c) $|z_1| = \sqrt{2}$, $\mathrm{Arg}\, z_1 = -\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{Log}\, z_1 = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}$; $|z_2| = 3$, $\mathrm{Arg}\, z_2 = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Log}\, z_2 = \ln 3 + i\frac{\pi}{2}$; $|z_3| = 3\sqrt{2}$, $\mathrm{Arg}\, z_3 = \frac{\pi}{4}$, $\mathrm{Log}\, z_3 = \ln 3 + \frac{1}{2}\ln 2 + i\pi = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2$.

4 Komplexe Differenzierbarkeit – die Cauchy-Riemann-Gleichungen

Die Ableitung einer Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine 2×2-Matrix (und damit relativ unhandlich). Oft hätte man gern die Ableitung einer komplexen Funktion f an einem Punkt z_0 durch eine einzige Zahl $f'(z_0)$ charakterisiert – wie eben auch im Reellen. Um das zu erreichen, verschärft man die Anforderungen an die komplexe Ableitung und definiert:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Dabei kommen natürlich alle Tücken der Grenzwerte in mehreren Variablen zum Tragen. Auch wenn eine Funktion $(u(x,y), v(x,y))$ reell durchaus total differenzierbar ist, muss deshalb die Ableitung von $f = u + iv$ im strengeren komplexen Sinne noch keineswegs existieren.

Beispiel: Wir untersuchen zunächst die Funktion $f(z) = z^2$. Im reellen Sinne sind beide problemlos differenzierbar: $(x^2 - y^2, 2xy)$ macht als Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nicht die geringsten Probleme. Sehen wir uns die Sache aber einmal im Komplexen an (wir setzen dabei $h = z - z_0$):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(z_0 + h)^2 - z_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{z_0^2 + 2hz_0 + h^2 - z_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2z_0 + h = 2z_0.$$

In diesem Beispiel, und das ist der springende Punkt, ist es völlig egal, aus welcher Richtung die *komplexe* Variable h gegen Null (und damit z gegen z_0) geht, der Grenzwert existiert also, und wir erhalten wie im Reellen $(z^2)' = 2z$.

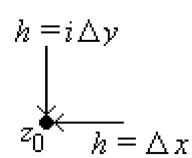
Es zeigt sich, dass die elementaren Funktionen (wie Polynome, e^z, $\sin z$, $\cos z$, ...) komplex differenzierbar sind, und sich ihre Ableitungregeln Eins-zu-Eins aus dem Reellen übertragen lassen. (Lediglich bei Funktionen wie $\log z$ oder Wurzeln ist an manchen Punkten eine gewisse Vorsicht geboten – man denke an Definitionslücken und Unstetigkeitstellen). Ebenso bleiben Produkt-, Ketten- und Quotientenregel gültig, wie sich mittels Grenzwertbildung leicht nachweisen läßt. Nicht oder nur an einzelnen Punkten komplex differenzierbar sind hingegen Funktionen wie $\bar{z}$, $|z|$ oder $\operatorname{Re} z$.

Beispiel: Sehen wir uns etwa $g(z) = \bar{z}$ an. Grenzwertbildung liefert:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z_0} + \overline{h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h}.$$

Hier hängt das Ergenis wesentlich davon ab, wie wir h ansetzen. Wählen wir h reell, $h = \Delta x$, nähern uns also z_0 parallel zur reellen Achse, so erhalten wir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

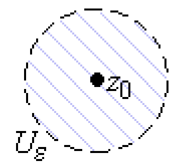


Mit imaginärem h hingegen, $h = i\Delta y$, folgt:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\overline{i\Delta y}}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.$$

Die beiden Werte sind unterschiedlich, die Ableitung existiert also nicht. Da der Punkt z_0 in dieser Überlegung völlig beliebig war, ist $g(z) = \bar{z}$ für kein $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Wesentliche Begriffe: Ist eine Funktion in einem Gebiet komplex differenzierbar, so nennt man sie dort *holomorph* (auch *regulär* oder *analytisch*).



Manchmal spricht man allerdings auch von Holomorphie in einzelnen Punkten, das soll bedeuten: f ist in z_0 holomorph, wenn es eine (beliebig kleine) Umgebung $U_\varepsilon(z_0)$ gibt, in der f holomorph ist. Eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion nennt man übrigens auch *ganze Funktion*.

Einfacheres Kriterium für komplexe Differenzierbarkeit:

- Reell totale Differenzierbarkeit: Dies ist auf jeden Fall erfüllt, wenn sowohl Realteil u als auch Imaginärteil v stetige erste Ableitungen nach x und y besitzen (C^1-Funktionen sind).

- *Cauchy-Riemann-Gleichungen*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

  müssem erfüllt sein.

Beispiel: Die Funktion $f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ ist in ganz $\mathbb{C}$ holomorph, denn sowohl $u(x, y) = e^x \cos y$ als auch $v(x, y) = e^x \sin y$ besitzen stetige Ableitungen nach x und y, außerdem erfüllen sie die Cauchy-Riemann-Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Für $g(z) = \operatorname{Re} z$ sind zwar sowohl Real- als auch Imaginärteil stetig differenzierbar ($u(x, y) = x$, $v(x, y) = 0$), man erhält aber

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Die Funktion $g = \operatorname{Re} z$ ist also nirgends in $\mathbb{C}$ differenzierbar.

Warum müssen aber überhaupt die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten? Dazu betrachten wir:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{df}{dz}\frac{\partial(x+iy)}{\partial x} &&= \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} &&= \frac{\partial f}{\partial x} &&= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{df}{dz} &= \frac{1}{i}\frac{df}{dz}\frac{\partial(x+iy)}{\partial y} &&= -i\frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} &&= -i\frac{\partial f}{\partial y} &&= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Da sowohl u als auch v rein reell sind, erhalten wir durch Vergleich von Real- und Imaginärteil die gesuchten Relationen.

Sozusagen als Nebenprodukt ergeben sich aber auch noch praktische Formeln zur Bestimmung der Ableitung:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Benutzt man nun die Cauchy-Riemann-Gleichungen, so erhält man auch die Form:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \qquad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Übungsbeispiele:

1. Man überprüfe, ob die Grenzwerte a) $\lim_{z\to 1}\frac{z^2-1}{z+2}$, b) $\lim_{z\to 0}\frac{\bar z}{z}$ und c) $\lim_{z\to 1}\frac{z^2-1}{1+\bar z}$ existieren und berechne sie gegebenenfalls.

   a) Der erste Fall ergibt:

   $$\lim_{z\to 1}\frac{z^2-1}{z+2}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(1+\Delta z)^2-1}{1+\Delta z+2}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1+2\Delta z+(\Delta z)^2-1}{3+\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z\frac{2+\Delta z}{3+\Delta z}=0,$$

   unabhängig davon, auf welchem Weg Δz gegen Null geht. Der Grenzwert existiert also und ist gleich Null.

   b) $\lim_{z\to 0}\frac{\bar z}{z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$. Ansatz $\Delta z=\Delta x\in\mathbb{R}$: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overline{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$; Ansatz $\Delta z=i\Delta y$: $\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\overline{i\Delta y}}{i\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-i\Delta x}{i\Delta x}=-1$. Die beiden Richtungsgrenzwerte sind nicht gleich, der Grenzwert existiert also nicht.

   c) $\lim_{z\to 1}\frac{z^2-1}{1+\bar z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(1+\Delta z)^2-1}{1+\overline{1+\Delta z}}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1+2\Delta z+(\Delta z)^2-1}{1+1+\overline{\Delta z}}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z(2+\Delta z)}{2+\overline{\Delta z}}=\frac{0\cdot(2+0)}{2+0}=0$, unabhängig von der Richtung, aus der Δz gegen Null geht.

2. *Man zeige anhand der Cauchy-Riemann-Gleichungen, dass*
   a) $f(z)=\cos z$, *b)* $f(z)=z^2+(1+i)z-1$, *c)* $f(z)=e^{\sin z}$
   auf ganz $\mathbb{C}$ *holomorph ist.*

   a) Zuerst überprüfen wir, ob Real- und Imaginärteil reell total differenzierbar sind, das gilt sicher, wenn sie stetige erste partielle Ableitungen haben.

   $$u(x,y)=\operatorname{Re}f(z)=\cos x\cosh y\in C^1\qquad v(x,y)=\operatorname{Im}f(z)=-\sin x\sinh y\in C^1$$

   Dieser Teil wäre also erledigt. Nun testen wir die Cauchy-Riemann-Gleichungen:

   $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\sin x\cosh y=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad\frac{\partial u}{\partial y}=\cos x\sinh y=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

   Es handelt sich also tatsächlich um eine ganze Funktion.

   b) $f(z)=z^2+(1+i)z-1=(x+iy)^2+(1+i)(x+iy)-1=x^2-y^2+x-y-1+i(2xy+x-y)$, also ist $u(x,y)=x^2-y^2+x-y-1$ und $v(x,y)=2xy+x-y$. Beide Funktionen sind $C^1(\mathbb{R}^2)$ und es gilt $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+1=\frac{\partial v}{\partial y}$ sowie $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y-1=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Die Funktion ist also auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

   c) $f(z)=e^{\sin z}=e^{\sin x\cosh y}e^{i\cos x\sinh y}=e^{\sin x\cosh y}\cos(\cos x\sinh y)+ie^{\sin x\cosh y}\sin(\cos x\sinh y)$, man erhält also $u(x,y)=e^{\sin x\cosh y}\cos(\cos x\sinh y)\in C^1$ und $v(x,y)=e^{\sin x\cosh y}\sin(\cos x\sinh y)\in C^1$. Mit intensivem Einsatz von Produkt- und Kettenregel erhält man $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{\sin x\cosh y}\cos x\cosh y\cos(\cos x\sinh y)+e^{\sin x\cosh y}\sin(\cos x\sinh y)\sin x\sinh y=\frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}=e^{\sin x\cosh y}\sin x\sinh y\cos(\cos x\sinh y)-e^{\sin x\cosh y}\sin(\cos x\sinh y)\cos x\cosh y=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Die Cauchy-Riemann-Gleichungen sind also erfüllt.

5 Die Wirtinger-Operatoren

Kriterium zur Komplexen Differenzierbarkeit – *Wirtinger*-Operatoren:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

(Nur formale Definition, für Anwendungen ist genaues Aussehen der Operatoren unwichtig.)

Wie die Schreibweise schon andeutet, wirken die beiden Operatoren genau wie partielle Ableitungen nach z bzw. $\bar{z}$. (Man kann eine Funktion nach z partiell ableiten, wobei man $\bar{z}$ als konstant ansieht und umgekehrt.)

Für eine komplexe Funktion $f(z)$ gilt überall dort, wo sie differenzierbar ist:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dz}.$$

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen nehmen im Wirtinger-Kalkül also einfach die Form $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ an.Um die komplexe Differenzierbarkeit zu überprüfen, müssen wir jetzt nur mehr:

1. Die Funktion in der Form $f(z, \bar{z})$ anschreiben (zur Not mit Hilfe von $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$).
2. Sie nach $\bar{z}$ partiell ableiten. Wo diese Ableitung Null ist, dort ist f differenzierbar (reell totale Differenzierbarkeit vorausgesetzt).
3. Die Ableitung an diesen Stellen erhält man dann einfach durch partielles Differenzieren nach z.

Beispiel: Wir überprüfen die Funktionen $f_1(z) = z^3$, $f_2(z) = x^2 - 2ixy - y^2$, $f_3(z) = |z|$ und $f_4(z) = \operatorname{Re} z$ auf komplexe Differenzierbarkeit:

- f_1 enthält keinen Term mit $\bar{z}$, also ist $\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} \equiv 0$, die Funktion ist überall komplex differenzierbar, und ihre Ableitung lautet $f_1'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial z} = 3z^2$.
- Entweder durch Einsetzen oder sofort durch Hinsehen erkennt man, dass $f_2(z) = x^2 - 2ixy - y^2 = (x - iy)^2 = \bar{z}^2$ ist. Man erhält also $\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} = 2\bar{z}$, die Funktion kann nur für $z = 0$ komplex differenzierbar sein (und hat dort die Ableitung Null).
- Den Betrag kann man einfach in Terme von z und $\bar{z}$ umschreiben: $f_3(z) = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Die Ableitung nach $\bar{z}$ ist also $\frac{\partial f_3}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{2\sqrt{z\bar{z}}} = \frac{1}{2}\frac{z}{|z|}$, und dieser Ausdruck wird für $z \neq 0$ sicher nie Null. Die Funktion ist also für kein $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex differenzierbar (den Nullpunkt müsste man allerdings noch genauer untersuchen).
- Ebenso umschreiben kann man $f_4(z) = \operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$. Die partielle Ableitung nach $\bar{z}$ ergibt $\frac{\partial f_4}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2} \neq 0$, wie schon früher festgestellt ist $\operatorname{Re} z$ also nirgends komplex differenzierbar.

Als Faustregel: Immer dann Vorsicht geboten, wenn irgendwo $\bar{z}$ auftaucht (kann auch in $|z|$, $\operatorname{Re} z$ oder $\operatorname{Im} z$ „versteckt“ sein) – meist wird dann komplexe Differenzierbarkeit (wenn überhaupt) nur an wenigen Punkten vorliegen.

Auf die reell totale Differenzierbarkeit ist natürlich auch beim Arbeiten mit den Wirtinger-Operatoren weiter zu achten. So kommt etwa in $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ kein $\bar{z}$ vor, die Funktion ist aber im Punkt $z = z_0$ nicht einmal definiert, also auch nur auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ komplex differenzierbar.

Übungsbeispiele:

1. *Man überprüfe mit Hilfe der Wirtinger-Operatoren, wo auf der Menge M die folgenden Funktionen komplex differenzierbar bzw. wo sie holomorph sind:*

   a) $f(z) = \frac{z^5}{|z|^4}$ *in* $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

   b) $f(z) = \frac{z^4}{|z|^3}$ *in* $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

   c) $f(z) = e^{|z|^2 - \frac{1}{2}\bar{z}^2}$ *in* $M = \mathbb{C}$

   Unsere Funktion in a) können wir mittels $|z|^2 = z\bar{z}$ anschreiben als

   $$f(z) = \frac{z^5}{z^2\,\bar{z}^2} = \frac{z^3}{\bar{z}^2} = z^3\,\bar{z}^{-2}$$

   Für die Wirtinger-Ableitung nach $\bar{z}$ erhalten wir:

   $$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -2z^3\,\bar{z}^{-3} = -2\frac{z^3}{\bar{z}^3}$$

   Für $z \neq 0$ kann das nicht Null werden. Die Funktion f ist demnach in M nirgends differenzierbar, also natürlich auch nirgendwo holomorph. Aber auch eine Funktion, die an einzelnen Punkten oder entlang einer Kurve differenzierbar ist, ist dort noch nicht holomorph.

   b) $f(z) = \frac{z^4}{|z|^3} = \frac{z^4}{z^{3/2}\bar{z}^{3/2}} = \frac{z^{5/2}}{\bar{z}^{3/2}}$ und man erhält für die Wirtinger-Ableitungen: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{3}{2}\frac{z^{5/2}}{\bar{z}^{5/2}} \neq 0\ \forall z \in M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Also ist f nirgendwo auf M komplex differenzierbar.

   c) $f(z) = e^{|z|^2 - \frac{1}{2}\bar{z}^2} = e^{z\bar{z} - \frac{1}{2}\bar{z}^2}$ und die Wirtinger-Ableitung ergibt $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = e^{z\bar{z} - \frac{1}{2}\bar{z}^2} \cdot (z - \bar{z})$. Der erste Faktor kann nie verschwinden, also ist $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ nur Null für $z = \bar{z}$, also für $z = x \in \mathbb{R}$. Die Funktion ist also nur auf der reellen Achse komplex differenzierbar, aber nirgends holomorph.

2. *Man zeige, dass* $f(z) = \operatorname{Im} z$ *für kein* $z \in \mathbb{C}$ *komplex differenzierbar ist, indem man a) die entsprechenden Grenzwerte bilde, b) die Cauchy-Riemann-Gleichungen überprüfe und c) die Wirtinger-Operatoren verwende.*

   a) Wir untersuchen $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\operatorname{Im}(z+\Delta z) - \operatorname{Im} z}{\Delta z}$ zunächst für $\Delta z = \Delta x$: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{Im}(x+iy+\Delta x) - \operatorname{Im}(x+iy)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y-y}{\Delta x} = 0$. Für $\Delta z = i\Delta y$ hingegen erhält man $\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\operatorname{Im}(x+iy+i\Delta y) - \operatorname{Im}(x+iy)}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{y+\Delta y - y}{i\Delta y} = -i$. Die beiden Grenzwerte stimmen nicht überein.

   b) Die beiden Funktionen $u = \operatorname{Re} f = y$ und $v = \operatorname{Im} f = 0$ sind zwar $C^1(\mathbb{R}^2)$, aber es ist $\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \neq 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$, also sind die Cauchy-Riemann-Gleichungen nicht erfüllt.

   c) $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, also ist $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2i} \neq 0$. Auf alle drei Arten zeigt sich (mit unterschiedlichem Aufwand), dass $f(z) = \operatorname{Im} z$ nirgendwo komplex differenzierbar ist.

6 Harmonische Funktionen

Für eine holomorphe Funktion gelten die Cauchy-Riemann-Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Wenden wir nun den Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ auf den Realteil einer solchen Funktion an, so erhalten wir

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

und ebenso gilt auch für den Imaginärteil $\Delta v = 0$. Solche Funktionen Φ, die die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ erfüllen, nennt man *harmonisch*. Real- und Imaginärteil jeder holomorphen Funktion sind also harmonisch.

Auf Sterngebieten gilt aber sogar: Ist $u(x, y)$ eine harmonische Funktion, so läßt sich stets eine weitere harmonische Funktion $v(x, y)$ finden, so dass $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorph ist. Diese *harmonisch konjugierte* Funktion ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

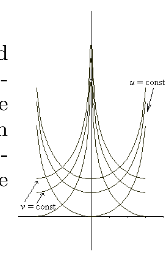
Aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen folgt noch ein weiterer wichtiger Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion. Dazu untersuchen wir die Kurvenscharen $u(x, y) = \alpha = \text{const}$ und $v(x, y) = \beta = \text{const}$. Für eine implizit gegebene Kurve $F(x, y)$=const erhält man durch implizites Differenzieren $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$ und damit für die Steigung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

Bilden wir nun das Produkt der Steigungen von $u(x, y) = \alpha$ und $v(x, y) = \beta$ und verwenden wieder die Cauchy-Riemann-Gleichungen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y} \cdot \frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y} = \frac{\partial u/\partial x}{-\partial v/\partial x} \cdot \frac{\partial v/\partial x}{\partial u/\partial x} = -1.$$

Für eine holomorphe Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sind also die Kurvenscharen $u(x, y) = \alpha$ und $v(x, y) = \beta$ in jedem Punkt orthogonal (im Bild rechts für $f(z) = e^z$ und $\operatorname{Im} z > 0$ gezeigt). Diese Eigenschaft wird in Physik und Elektrotechnik gerne ausgenutzt: Bekanntlich stehen ja (etwa für das elektrische Feld) Äquipotentiallinien und Feldlinien normal aufeinander, das Potential muss zudem (in ladungsfreien Bereichen) die Laplace-Gleichung erfüllen. Identifiziert man nun z.B. den Realteil von $f(z)$ mit dem Potential und den Imaginärteil mit dem Feldlinienverlauf, so beschreibt jedes holomorphe f eine spezielle Potentialkonfiguration mit den dazugehörigen Feldlinien.



Wie berechnet man nun aber zu einem gegebenen $u(x, y)$ die konjugiert harmonische Partnerfunktion v? Ein denkbarer Weg wäre, einfach die Cauchy-Rimann-Gleichungen zu integrieren. Die Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ können wir ja auch in Integralform

$$v = \int \frac{\partial u}{\partial x}\,dy \quad \text{und} \quad v = -\int \frac{\partial u}{\partial y}\,dx$$

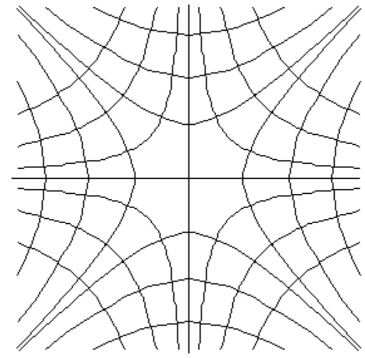
schreiben. Dabei ist aber zu beachten, dass die Integrations„konstante“ jeweils noch von der Variablen, über die nicht integriert wird, abhängen kann. Erst durch Vergleich der beiden Ausdrücke erhält man also das vollständige $v(x, y)$.

Beispiel: Wir wollen zu $u(x, y) = x^2 - y^2$ die konjugiert harmonische Funktion bestimmen. Dabei sollten wir zuerst einmal überprüfen, ob u überhaupt selbst harmonisch ist:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$$

Diese Voraussetzung ist auf jeden Fall einmal erfüllt. Integration der Cauchy-Riemann-Gleichungen liefert:

$$
\begin{aligned}
v &= \int \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = \int 2x\,dy = 2xy + \phi(x) \\
v &= -\int \frac{\partial u}{\partial y}\,dx = -\int (-2y)\,dx = 2xy + \psi(y)
\end{aligned}
$$



In diesem Fall ist $\phi(x) = \psi(y) = C$ eine Konstante, die man (wenn nicht anders gefordert) auch Null setzen kann, und man erhält: $v(x, y) = 2xy$. Die Funktion f lautet also $f(z) = x^2 + 2ixy - y^2 = (x + iy)^2 = z^2$. Die orthogonalen Kurvenscharen für konstante Real- und Imaginärteile sind die rechts dargestellten Hyperbeln.

Beispiel: Nun untersuchen wir $u(x, y) = 2xy - x + y$. Auch diese Funktion ist harmonisch, und wir erhalten durch Integration der Cauchy-Riemann-Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
v &= \int \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = \int (2y - 1)\,dy = y^2 - y + \phi(x) \\
v &= -\int \frac{\partial u}{\partial y}\,dx = -\int (2x + 1)\,dx = -x^2 - x + \psi(y)
\end{aligned}
$$

In diesem Fall ist also $\phi(x) = -x^2 - x + C$ und $\psi(y) = y^2 - y + C$, wobei C eine beliebige reelle Konstante ist. Setzen wir diese gleich Null, erhalten wir: $v(x, y) = y^2 - x^2 - y - x$. Die gesamte Funktion lautet also

$$
\begin{aligned}
f(z) &= u + iv = 2xy - x + y + i(y^2 - x^2 - y - x) \\
&= -i(x^2 + 2ixy - y^2) - (1 + i)(x + iy) = -iz^2 - (1 + i)z
\end{aligned}
$$

Dieses Umschreiben in z ist gleichzeitig auch eine Kontrollrechnung. Hat man richtig gerechnet, dürfen sich keine Terme mit $\bar{z}$ ergeben.

Neben dieser (hoffentlich) intuitiv einsichtigen Methode gibt es aber noch eine zweite, ein wenig raffiniertere, die auf dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen beruht:

Für die Ableitung einer Funktion $f = u + iv$ gilt ja: $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$. Das muss natürlich auch für reelle x aus einem bestimmten Intervall stimmen, $f'(z = x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$. Wir definieren nun für unser (auf einem Gebiet G gegebenes) $u(x, y)$ die Funktion $a(x) := \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$. Wenn $a(z)$ holomorph ist, dann muss auf ganz G immer $a(z) = f'(z)$ gelten. Man muss also in $a(x)$ nur x durch z ersetzen und die Funktion integrieren (also ein Stammfunktion aufsuchen), wobei die Integrationskonstante so zu wählen ist, dass $\operatorname{Re} f$ tatsächlich gleich u ist.

Klingt kompliziert? In der praktischen Anwendung wird es hoffentlich schnell klarer werden.

Beispiel: Wir bestimmen mit dieser neuen Methode noch einmal jene holomorphe Funktion, deren Realteil $u(x, y) = x^2 - y^2$ ist. Es ist ja $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x$ und $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2y$, also ergibt sich: $a(x) := \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 2x$.

Diese Funktion muss für reelle $z = x$ mit der Ableitungen von f übereinstimmen, also ist $f'(z) = 2z$, und durch Integration erhält man $f(z) = z^2 + C$, wobei die Konstante C nur imaginär sein darf, um u nicht zu verändern. Meist wird man $C = 0$ setzen.

Welche Methode einem lieber ist, bleibt natürlich jedem selbst überlassen.

Übungsbeispiele:

1. *Man zeige, dass die folgenden Funktionen $u(x,y)$ harmonisch sind und berechne die konjugiert harmonische Funktionen $v(x,y)$ sowie $f(z) = u + iv$. (Die Integrationskonstante darf dabei Null gesetzt werden.)*
a) $u(x,y) = 2x(1-y)$, b) $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 3x + 3y$, c) $u(x,y) = x^3y - xy^3$

 a) Ausmultiplizieren liefert $u(x,y) = 2x - 2xy$. Damit erhalten wir $\frac{\partial u}{\partial x} = 2 - 2y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, also ist $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Zur Bestimmung der konjugiert harmonischen Funktion können wir entweder mit Integration der Cauchy-Riemann-Gleichungen oder aber mit dem Identitätssatz arbeiten: Die erste Variante ergibt $v = \int(2-2y)\,dy = 2y - y^2 + \phi(x)$ und $v = \int 2x\,dx = x^2 + \psi(y)$. Der Vergleich zeigt:

$$v(x,y) = x^2 - y^2 + 2y + C,$$

 wobei wir hier $C = 0$ setzen. Für die holomorphe Funktion f erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) = 2x - 2xy + ix^2 - iy^2 + 2iy \\ &= i(x^2 + 2ixy - y^2) + 2(x+iy) = iz^2 + 2z. \end{aligned}$$

 b) Für $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 3x + 3y$ ergeben sich die Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y - 3$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 2x + 3$ und damit $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$. Also ist u harmonisch. Nun kann man definieren: $a(x) := \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 2x - 3 - i(-2x+3) = (2+2i)x - (3+3i)$, und daraus folgt mit dem Identitätssatz $f'(z) = (2+2i)z - (3+3i)$. Integration liefert $f(z) = (2+2i)\frac{z^2}{2} - (3+3i)z + C$, die Konstante setzen wir Null. Damit erhält man: $f(z) = (1+i)z^2 - (3+3i)z = (1+i)(x+iy)^2 - (3+3i)(x+iy) = x^2 - 2xy - y^2 - 3x + 3y + i(x^2 + 2xy - y^2 - 3x - 3y)$, also $v(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 - 3x - 3y$.

 c) $u(x,y) = x^3y - xy^3$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y - y^3$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 3xy^2$, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xy - 6xy = 0$, $a(x) := \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = -ix^3$, daraus folgt mit dem Identitätssatz $f'(z) = -iz^3$. Integration liefert (mit $C = 0$): $f(z) = -i\frac{z^4}{4} = \frac{1}{4}(-ix^4 + 4x^3y + 6ix^2y^2 - 4xy^3 - iy^4)$, also ist $v(x,y) = \frac{1}{4}(-x^4 + 6x^2y^2 - y^4$.

2. *Gegeben ist die Funktion $u(x,y) = e^{3x}\cos(ay)$. Man bestimme $a \in \mathbb{R}^+$ so, dass $u(x,y)$ harmonisch ist. Dann ermittle man die harmonisch konjugierte Funktion $v(x,y)$ sowie jene holomorphe Funktion f, für die gilt: $\operatorname{Re} f = u$ und $f(0) = 1 + i$.*

 $u(x,y) = e^{3x}\cos(ay)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 3e^{3x}\cos(ay)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9e^{3x}\cos(ay)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -ae^{3x}\sin(ay)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -a^2e^{3x}\cos(ay)$, also $\Delta u = (9 - a^2)e^{3x}\cos(ay)$, und damit das für alle x, y gilt, muss $a = 3$ sein ($a \in \mathbb{R}^+$). Nun setzt man $a(x) := 3e^{3x}$, man erhält $f'(z) = 3e^{3z}$ und weiter $f(z) = e^{3z} + C = e^{3x}(\cos(3y) + i\sin(3y)) + C$, also $v(x,y) = e^{3x}\sin(3y)$. Die Konstante bestimmt man aus $f(0) = e^0(\cos 0 + i\sin 0) + C = 1 + C \overset{!}{=} 1 + i$ zu $C = i$.

3. *Man verifiziere für die Funktion $f(z) = z^2$, dass die Kurven $\operatorname{Re} f = \alpha$ und $\operatorname{Im} f = \beta$ im Punkt $z_0 = 2 + i$ orthogonal sind.*

 Wir erhalten $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$, also $\operatorname{Re} f = x^2 - y^2$ und $\operatorname{Im} f = 2xy$. Im Punkt $z_0 = 2 + i$ erhalten wir für $\operatorname{Re} f = \text{const}$ die Kurve $x^2 - y^2 = 3$, also $y_u = \sqrt{x^2 - 3}$. Ihre Steigung beträgt $y_u'(2) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}\Big|_{x=2} = 2$. Analog ergibt die Bedingung $\operatorname{Im} f = \text{const}$ die Kurve $2xy = 4$, also $y_v = \frac{2}{x}$. In diesem Fall ist die Steigung $y_v'(2) = -\frac{2}{x^2}\Big|_{x=2} = -\frac{1}{2}$. Das Produkt der beiden Steigungen ist $y_u'(2) \cdot y_v'(2) = -1$, die beiden Kurven sind also tatsächlich orthogonal.

7 Komplexe Integrale; Wege in $\mathbb{C}$

Zu Beginn betrachten wir erst einmal Funktionen, die zwar in die komplexen Zahlen abbilden, als Argument aber nur eine reelle Variable haben, also Funktionen der Form $f(t) = u(t) + iv(t)$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Integrieren ist eine lineare Operation:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx,$$

soll auch für komplexe α und β gelten. Ergebnis:

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b (u(t) + iv(t)) dt = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt. \tag{3}$$

Reelle Integrationstheorie aufs Komplexe übertragbar.Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_a^b (f+g)(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt && \textstyle\int_a^b cf(t)\, dt = c \int_a^b f(t)\, dt \\
&\textstyle\int_a^b f(t)\, dt + \int_b^c f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt && \textstyle\int_a^b f(t)\, dt = -\int_b^a f(t)\, dt \\
&\textstyle\mathrm{Re} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(t)\, dt && \textstyle\mathrm{Im} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \mathrm{Im}\, f(t)\, dt
\end{aligned} \tag{4}$$

Praktische Berechnung: Ist F eine Stammfunktion von f, also $\frac{dF}{dt} = f(t)$, so ist

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a).$$

Beispiel: Wir berechnen zum Eingewöhnen einmal das Integral $\int_0^\pi e^{it}\, dt$. Durch Auftrennen in Real- und Imaginärteil erhalten wir:

$$\int_0^\pi e^{it}\, dt = \int_0^\pi (\cos t + i \sin t)\, dt = \int_0^\pi \cos t\, dt + i \int_0^\pi \sin t\, dt = 0 + i \cdot 2 = 2i.$$

Noch einfacher erhält man das gleiche Ergebnis aber mit

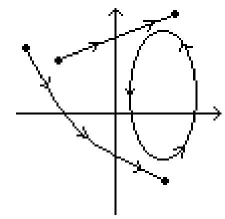
$$\int_0^\pi e^{it}\, dt = \frac{1}{i} e^{it}\Big|_0^\pi = \frac{e^{i\pi} - e^0}{i} = 2i.$$

Beispiel: Auch Polynome machen natürlich keine Probleme:

$$\int_0^1 (t^2 + (1+i)t - 5i)\, dt = \left(\frac{t^3}{3} + (1+i)\frac{t^2}{2} - 5it \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1+i}{2} - 5i = \frac{5}{6} - \frac{9}{2} i.$$

Allgemein können bei solchen Integralen natürlich sämtliche schon aus der reelle Analysis bekannten Tricks (wie etwa Partialbruchzerlegung oder partielle Integration) zur Anwendung kommen. Auch Substitionen sind erlaubt, allerdings sollte man bei ihnen darauf auchten, dass man nicht versehentlich die reelle Achse verläßt – sonst hat man nämlich bereits ein echtes Kurvenintegral vorliegen.

Bisher: Integrale über komplexwertige Funktionen, die nur von einer reellen Variablen abhängen. Während man in $\mathbb{R}$ aber notgedrungen nur entlang von Intervallen integrieren kann, stehen in der komplexen Ebene beliebige Wege zur Verfügung (so wie sie etwa rechts dargestellt sind). Teile der reellen Achse sind also nur ganz spezielle Integrationskurven, wenn auch sehr wichtige – wir werden nämlich allgemeine Kurvenintegrale beim Ausrechnenen meist auf diesen Fall zurückführen.

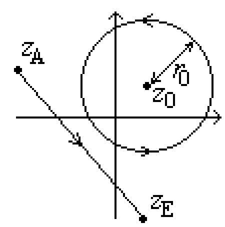


Kurven beschreiben: Parameterdarstellung der Art $C : z(t) = x(t) + iv(t)$ mit einem reellen Parameter t. $x(t)$ und $y(t)$ zumindest stückweise stetig differenzierbar.

Beispiel: Wichtig: Kreise und Geraden.

Für einen mathematisch positiv (das heißt gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufenen Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r_0 erhält man beispielsweise

$$z(t) = z_0 + r_0 e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi].$$



Ein Geradenstück mit Anfangspunkt z_A und Endpunkt z_E ergibt sich mit

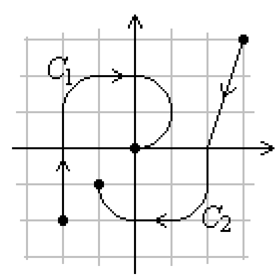
$$z(t) = z_A + (z_E - z_A)t \qquad t \in [0, 1].$$

Besonders angenehm sind natürlich Geraden parallel zur reellen oder imaginären Achse ($z(t) = z_0 + t$ oder $z(t) = z_0 + it$ mit einem geeigneten t-Intervall).

Beispiel: Aus diesen Elementen können wir nun auch wieder kompliziertere Kurven zusammensetzen. So suchen wir jetzt eine Parametrisierung für die beiden im folgenden dargestellten Kurven C_1 und C_2.

Hier ist es sinnvoll, den Weg in mehrere Stücke zu zerlegen. Der erste Teil von C_1 ist ein Geradenstück, das wir mit $C_{11} : z(t) = -2 - 2i + it,\ t \in [0, 3]$ anschreiben können. Es folgt ein negativ durchlaufener Viertelkreis $C_{12} : z(t) = -1 + i + e^{it},\ t \in [\pi, \frac{\pi}{2}]$, wieder ein Geradenstück $C_{13} : z(t) = -1 + 2i + t,\ t \in [0, 1]$ und zum Abschluss ein Halbkreis $C_{14} : z(t) = i + e^{it},\ t \in [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$.

Analog erhält man für C_2: $C_{21} : z(t) = 3 + 3i + (-1 - 3i)t,\ t \in [0, 1]$, $C_{22} : z(t) = 2 - it,\ t \in [0, 1]$, $C_{23} : z(t) = 1 - i + e^{it},\ t \in [0, -\frac{\pi}{2}]$, $C_{24} : z(t) = 1 - 2i - t,\ t \in [0, 1]$ und $C_{25} : z(t) = -i + e^{it},\ t \in [-\frac{\pi}{2}, -\pi]$.



Die Notation $t \in [a, b]$ mit $a > b$ mag etwas ungewohnt sein, $t = a \ldots b$ wäre eine vielleicht naheliegendere Schreibweise. Wichtig ist nur, dass man weiß, was gemeint ist, nämlich dass der Parameter von a nach b läuft.

Die gleiche Kurve kann verschieden parametrisiert werden, so stellen $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ und $z(t) = e^{2it}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ natürlich die gleiche Kurve dar. Durchläuft man eine Kurve C in der anderen Richtung ($t \in [a, b] \to t \in [b, a]$), so schreibt man dafür oft $-C$ (oder auch C^{-1}). Das Bild der Kurve ändert sich bei Umkehrung des Durchlaufungssinns nicht.

Übungsbeispiele:

1. *Man berechne die folgenden Integrale:* a) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{e^{it}+1}{e^{it}+e^{-it}}\,dt$ b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t+1}{t^2+1}\,dt$

c) $\displaystyle\int_0^1 (t^3+(i+1)t^2+(i-1)t+2i)\,dt$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{t^2+(1+i)t+i}\,dt$

a) Man hüte sich vor der verlockenden Substitution $u = e^{it}$, da man dabei die reelle Ache verläßt und entlang eines Halbkreises integrieren muss. Verläßlich ist dagegen die Aufspaltung:

$$\int_0^\pi \frac{e^{it}+1}{e^{it}+e^{-it}}\,dt = \int_0^\pi \frac{\cos(t)+i\sin(t)+1}{2\cos(t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi dt + \frac{i}{2}\underbrace{\int_0^\pi \tan t\,dt}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\pi \frac{dt}{\cos t}}_{=0} = \frac{\pi}{2}$$

Für b) setzen wir eine komplexe Partialbruchzerlegung an:

$$\frac{t+1}{t^2+1} = \frac{A}{t+i} + \frac{B}{t-i} \qquad t+1 = A(t-i)+B(t+i)$$

Einsetzen (Polstellenmethode) liefert:

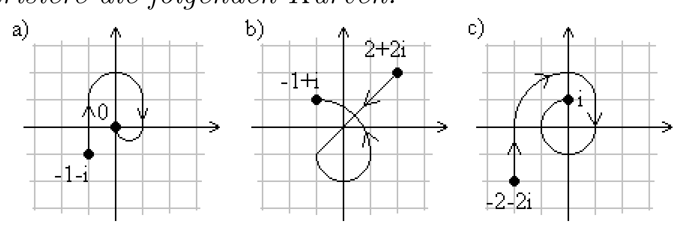
$$t=+i: \quad B = \frac{1+i}{2i} \qquad t=-i: \quad A = \frac{-1+i}{2i}$$

Für das Integral erhalten wir also:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \frac{t+1}{t^2+1}\,du = \frac{-1+i}{2i}\int_{-1}^1 \frac{1}{t+i}\,du + \frac{1+i}{2i}\int_{-1}^1 \frac{1}{t-i}\,du = \\ &= \ldots = \frac{1-i}{2i}\,\frac{i\pi}{2} + \frac{1+i}{2i}\,\frac{i\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int_0^1 (t^3+(i+1)t^2+(i-1)t+2i)\,dt = \left[\frac{t^4}{4}+(i+1)\frac{t^3}{3}+(i-1)\frac{t^2}{2}+2it\right]_0^1 = \frac{1}{12}+\frac{17}{6}\,i$

2. *Man parametrisiere die folgenden Kurven:*



Die Kurve in a) läßt sich beispielsweise auf die folgende Art darstellen:

C_a:	$z(t) = -1-i+2it$	$t \in [0,1]$	C_b:	$z(t) = i + e^{it}$	$t \in [\pi, 0]$
C_c:	$z(t) = 1+i-it$	$t \in [0,1]$	C_d:	$z(t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-it}$	$t \in [0,\pi]$

b) C_1: $z(t) = 2+2i+(-3-3i)t$, $t \in [0,1]$; C_2: $z(t) = -i+e^{it}$, $t \in [-\pi, 0]$; C_3: $z(t) = -1-i+2e^{it}$, $t \in [-\pi, 0]$

c) C_1: $z(t) = -2+it$, $t \in [-2,0]$; C_2: $z(t) = 2e^{it}$, $t \in [\pi, \frac{\pi}{2}]$; C_3: $z(t) = i+e^{it}$, $t \in [\frac{\pi}{2}, 0]$; C_4: $z(t) = 1+it$, $t \in [1,0]$; C_5: $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, -\frac{3\pi}{2}]$

Daneben gibt es natürlich noch viele andere Möglichkeiten der Parametrisierung, die allesamt richtig sind.

8 Komplexe Kurvenintegrale

Kurvenintegral über eine Funktion $f(z)$ entlang einer mit $z(t)$, $t \in [a,b]$ parametrisierten Kurve:

$$\int_C f(z)dz := \int_a^b f(z(t))\frac{dz}{dt}dt$$

Merkregel: $dz = \frac{dz}{dt}dt$

Beispiel: Als erstes berechnen wir das Integral über $f(z) = z^2$ entlang des Halbkreises C : $z(t) = e^{it},\ t \in [0,\pi]$. Dafür erhalten wir

$$\int_C z^2 dz = \int_0^\pi (e^{it})^2 ie^{it}dt = i\int_0^\pi e^{3it}dt = i\frac{e^{3it}}{3i}\Big|_0^\pi = -\frac{2}{3}.$$

Beispiel: Nun ermitteln wir $\int_C \bar{z}\,dz$, wobei C die Strecke $z(t) = i + (1+i)t$, $t \in [0,1]$ ist.

$$\begin{aligned}\int_C \bar{z}\,dz &= \int_0^1 \bar{z}\frac{dz}{dt}dt = \int_0^1 \overline{(i+t+it)}(1+i)dt = (1+i)\int_0^1(-i+(1-i)t)dt \\ &= (1+i)\left(-it+(1-i)\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = (1+i)\left(-i+\frac{1-i}{2}\right) = 2-i\end{aligned}$$

Kurzer Überblick über die wichtigsten Eigenschaften und Merkmale:

- Ist eine Kurve C aus mehreren Stücken $C_1, \ldots, C_n$ zusammengesetzt, so erhält man

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \ldots + \int_{C_n} f(z)\,dz.$$

- Durchläuft man den Integrationsweg in der umgekehrten Richtung, so kehrt sich das Vorzeichen des Integrals um:

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$$

- Real- und Imaginärteil eines komplexen Kurvenintegrals sind reelle Kurvenintegrale. Ein wenig schlampig, aber gut zu merken:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy).$$

- Kurvenintegrale sind linear in dem Sinne, dass $\int_C (f+g)(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$ und $\int_C cf(z)\,dz = c\int_C f(z)\,dz$ ist.

- Achtung: Im allgemeinen ist $\mathrm{Re}\int_C f(z)\,dz \neq \int_C \mathrm{Re}\,f(z)\,dz$ und analog für den Imaginärteil.

- Der Wert eines Kurvenintegrals hängt von der Parametrisierung der Kurve nicht ab.

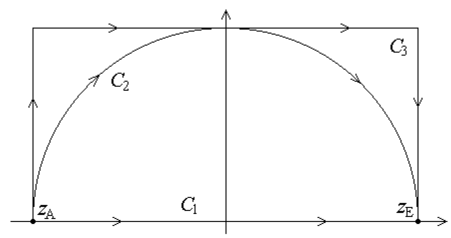
- Zwar gilt nicht mehr $|\int_a^b f(t)\,dt| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$, allerdings gibt es eine andere Abschätzung: Nennen wir $L(C)$ die Länge der Kurve C und $\|f\|_C$ das Maximum des Betrages von f auf C, so ist

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq \|f\|_C \cdot L(C).$$

Eines der wichtigsten Kurvenintegrale überhaupt ist jenes über die Funktionen $(z-z_0)^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $C : z(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\boxed{\int_C (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{für } n = -1 \end{cases}}$$

Beispiel: Wir berechnen die Integrale $\int_{C_k} z^2\,dz$ und $\int_{C_k} \bar{z}\,dz$ entlang der drei rechts dargestellten Wege mit Anfangspunkt $z_A = -1$ und Endpunkt $z_E = +1$:
Die erste Integration erfolgt entlang der reellen Achse.



$$\begin{aligned}
\int_{C_1} z^2\,dz &= \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \\
\int_{C_1} \bar{z}\,dz &= \int_{-1}^{1} t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0
\end{aligned}$$

Nun integrieren wir entlang eines Halbkreises in der oberen Halbebene:

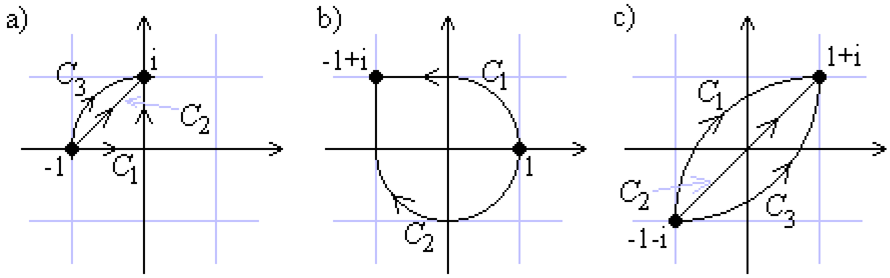
$$\begin{aligned}
\int_{C_2} z^2\,dz &= \int_{\pi}^{0} \left(e^{it}\right)^2 ie^{it}\,dt = -i\int_0^{\pi} e^{3it}\,dt = -i\left.\frac{e^{3it}}{3i}\right|_0^{\pi} = \frac{2}{3} \\
\int_{C_2} \bar{z}\,dz &= \int_{\pi}^{0} e^{-it} ie^{it}\,dt = -i\int_0^{\pi} dt = -i\pi
\end{aligned}$$

Zuletzt wählen wir noch ein Rechteck:

$$\begin{aligned}
\int_{C_3} z^2\,dz &= \int_0^1 (-1+it)^2 i\,dt + \int_{-1}^{1} (i+t)^2 dt + \int_1^0 (1+it)^2 i\,dt = \\
&= i\int_0^1 (1-2it-t^2)dt + \int_{-1}^{1} (-1+2it+t^2)dt - i\int_0^1 (1+2ir-t^2)dt = \\
&= i\left(t - it^2 - \frac{t^3}{3}\right)_0^1 + \left(-t + it^2 + \frac{t^3}{3}\right)_{-1}^1 - i\left(t + it^2 - \frac{t^3}{3}\right)_0^1 = \\
&= i + 1 - \frac{i}{3} - 1 + i + \frac{1}{3} - 1 - i + \frac{1}{3} - i + 1 + \frac{i}{3} = \frac{2}{3} \\
\int_{C_3} \bar{z}\,dz &= \int_0^1 (-1-it)i\,dt + \int_{-1}^{1} (-i+t)dt + \int_1^0 (1-it)i\,dt = \\
&= i\left(-t - i\frac{t^2}{2}\right)_0^1 + \left(-it + t\right)_{-1}^1 - i\left(t - i\frac{t^2}{2}\right)_0^1 = \\
&= -i + \frac{1}{2} - i + \frac{1}{2} - i - \frac{1}{2} - i - \frac{1}{2} = -4i
\end{aligned}$$

Übungsbeispiele:

Man berechne die Integrale $\int_{C_k} \bar{z}\,dz$, $\int_{C_k} \operatorname{Re} z\,dz$, $\int_{C_k} e^{\pi z}\,dz$ *und* $\int_{C_k} z^5\,dz$ *entlang der im folgenden dargestellten Kurven:*



Zuerst müssen wir möglichst einfache Parametrisierungen für die Kurven finden. Eine Möglichkeit wäre etwa:

C_1:	$z(t) = t$	$t \in [-1, 0]$	$dz = dt$
	$z(t) = it$	$t \in [0, 1]$	$dz = i\,dt$
C_2:	$z(t) = -1 + (1+i)t$	$t \in [0, 1]$	$dz = (1+i)dt$
C_3:	$z(t) = e^{it}$	$t \in [\pi, \frac{\pi}{2}]$	$dz = ie^{it}dt$

Nun können wir auch die Kurvenintegrale berechnen. Für die Integrale über $\bar{z}$ und $\operatorname{Re} z$ müssen wir die Parametrisierung der Kurven verwenden, bei $e^{\pi z}$ und z^5 genügt es wegen der Holomorphie des Integranden, eine Stammfunktion zu finden (oder das Integral über *einen* Weg zu bestimmen).

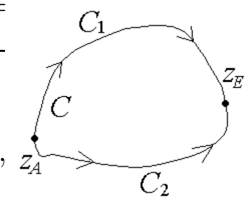
$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \bar{z}\,dz &= \int_{-1}^{0} \bar{t}\,dt + \int_0^1 \overline{it}\,i\,dt = \int_{-1}^{0} t\,dt + \int_0^1 t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \\
\int_{C_2} \bar{z}\,dz &= \int_0^1 \overline{(-1+(1+i)t)}\,(1+i)\,dt = (1+i)\int_0^1 (-1+(1-i)t)\,dt = \\
&= (1+i)\left(-1+(1-i)\frac{1}{2}\right) = -1 - i + |1+i|^2\frac{1}{2} = -i \\
\int_{C_3} \bar{z}\,dz &= \int_{\pi}^{\pi/2} \overline{e^{it}}\,i\,e^{it}\,dt = -i\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-it}e^{it}\,dt = -i\int_{\pi/2}^{\pi} dt = -i\frac{\pi}{2} \\
\int_{C_1} \operatorname{Re} z\,dz &= \int_{-1}^{0} \operatorname{Re} t\,dt + \int_0^1 \operatorname{Re}(it)\,i\,dt = \int_{-1}^{0} t\,dt + \int_0^1 0\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2} \\
\int_{C_2} \operatorname{Re} z\,dz &= \int_0^1 \operatorname{Re}((-1+(1+i)t))\,(1+i)\,dt = (1+i)\int_0^1 (-1+t)\,dt = \\
&= (1+i)\left(-1+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1+i}{2} \\
\int_{C_3} \operatorname{Re} z\,dz &= \int_{\pi}^{\pi/2} \operatorname{Re}(e^{it})\,i\,e^{it}\,dt = -i\int_{\pi/2}^{\pi} \cos t\,e^{it}\,dt = -i\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}e^{it}\,dt = \\
&= -\frac{i}{2}\left\{\int_{\pi/2}^{\pi} e^{2it}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} dt\right\} = -\frac{i}{2}\left\{\frac{e^{2i\pi}-e^{i\pi}}{2i} + \frac{\pi}{2}\right\} = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \\
\int_{C_k} e^{\pi z}\,dz &= \left.\frac{e^{\pi z}}{\pi}\right|_{z=i} - \left.\frac{e^{\pi z}}{\pi}\right|_{z=-1} = \frac{e^{i\pi}-e^{-\pi}}{\pi} = -\frac{1+e^{-\pi}}{\pi} \\
\int_{C_k} z^5\,dz &= \left.\frac{z^6}{6}\right|_{z=i} - \left.\frac{z^6}{6}\right|_{z=-1} = \frac{i^6-(-1)^6}{6} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

9 Der Cauchysche Integralsatz

Jeweils äquivalent sind:

- Wegunabhängigkeit eines Kurvenintegrals, $\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$ für zwei Kurven mit gleichem Anfangs- und Endpunkt

- Verschwinden jedes Integrals über einen geschlossenen Weg, $\oint_C f(z)\,dz = 0$



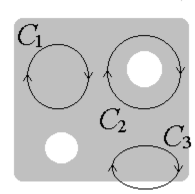
- Existenz einer Stammfunktion $F(z)$ mit $F'(z) = f(z)$

Voraussetzungen für Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen? Real- und Imaginärteil eines komplexen Kurvenintegrals sind jeweils reelle Kurvenintegrale. $\int_C f(z)dz$ wird also dann wegunabhängig sein, wenn das auf die beiden reellen Integrale $\int_C(u\,dx - v\,dy)$ und $\int_C(v\,dx + u\,dy)$ zutrifft.

Die reelle Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial V_j}{\partial x_k} = \frac{\partial V_k}{\partial x_j}$ ergibt für das erste Integral $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ und für das zweite $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, also genau die Cauchy-Riemann-Gleichungen! Kurvenintegrale über holomorphe Funktionen sind also wegunabhängig. Allerdings müssen wir dieses Ergebnis noch ein wenig präzisieren, was die erlaubten Integrationswege angeht:

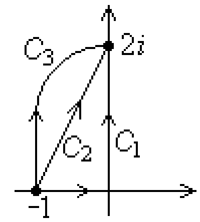
> **Cauchyscher Integralsatz**
>
> G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f sei darin holomorph. Dann gilt, sofern alle betrachteten Wege ganz in G liegen:
>
> - Für jeden geschlossenen Weg C ist $\oint_C f(z)dz = 0$.
> - Für zwei beliebige Wege C_1 und C_2 mit gleichem Anfangs- und Endpunkt ist $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$.
> - Zu $f(z)$ existiert eine Stammfunktion $F(z)$ mit $\frac{dF}{dz} = f$ und $\int_{z_A \to z_E} f(z)dz = F(z_E) - F(z_A)$.

Dazu gibt es natürlich einige Anmerkungen: Zunächst einmal ist es wesentlich, dass ein *einfach* zusammenhängendes Gebiet vorausgesetzt wird. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ etwa ist in jedem Punkt mit Ausnahme von $z = 0$ holomorph, und trotzdem ergibt das Integral auf einem Kreis um den Ursprung nicht den Wert Null. Schon ein einzelner Punkt kann also die Wegunabhängigkeit zerstören. Im Bild rechts ist das Holomorphiegebiet einer Funktion f grau schattiert. Es ist zwar sicher $\oint_{C_1} f(z)dz = 0$, nicht unbedingt aber $\oint_{C_2} f(z)dz$ oder $\oint_{C_3} f(z)dz$.

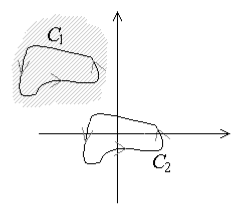


Ein direkte Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz ist weiter, dass Integrationswege innerhalb des Holomorphiegebietes einer Funktion beliebig deformiert werden können. Das ist mit ein Grund, warum man sich bevorzugt mit Geraden und Kreisen als Integrationswegen befasst. Bei einem holomorphen Integranden kann ja ohnehin wieder jeder Weg in diese Form gebracht werden.

Beispiel: Als erstes berechnen wir die Integrale $\int_{C_k} e^{\pi z} dz$ entlang der Kurven C_1 bis C_3: Auf die direkte Art müßten wir jetzt erst einmal die Wege parametrisieren und dann insgesamt fünf komplexe Integrale auswerten. Nun ist aber der Integrand $f(z) = e^{\pi z}$ holomorph und besitzt die Stammfunktion $\frac{1}{\pi} e^{\pi z}$. Da alle drei Kurven den gleichen Anfangs- und Endpunkt haben, nämlich $z_A = -1$ und $z_E = 2i$, ist $\int_{C_1} e^{\pi z} dz = \int_{C_2} e^{\pi z} dz = \int_{C_3} e^{\pi z} dz = \frac{e^{2\pi i} - e^{-\pi}}{\pi} = \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi}$. Das würde natürlich auch für jeden anderen Weg mit gleichem Anfang und Ende gelten, egal wie kompliziert er auch sein mag.

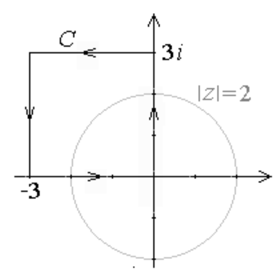


Beispiel: Als nächstes berechnen wir die beiden Integrale $\oint_{C_1} \frac{1}{z}\, dz$ und $\oint_{C_2} \frac{1}{z}\, dz$. Die dargestellten Wege wäre zwar recht schwierig zu parametrisieren, das ist aber auch gar nicht nötig. Der Integrand $\frac{1}{z}$ ist nämlich überall außer bei $z = 0$ holomorph, also sicher auch in dem grau schattierten einfach zusammenhängenden Gebiet. Dort ist also jedes Integral über einen geschlossenen Weg Null, und wir können sofort sagen: $\oint_{C_1} \frac{1}{z}\, dz = 0$.



Im zweiten Fall ist es zwar nicht ganz so einfach, denn hier umläuft der Integrationweg den Nullpunkt, es läßt sich jetzt also kein geeignetes einfach zusammenhängendes Gebiet finden. Allerdings ist der Integrand außerhalb von $z = 0$ holomorph, der Integrationsweg darf also beliebig verformt werden, zum Beispiel auch zu einem Kreis – und für diesen Fall haben wir schon früher das Ergebnis $2\pi i$ erhalten, also $\oint_{C_2} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$.

Beispiel: Wir wollen nun für die Funktion $f(z) = \begin{cases} |z| & \text{für } |z| < 2 \\ z & \text{für } |z| \geq 2 \end{cases}$ das Integral $\int_C f(z) dz$ entlang der rechts dargestellten Kurve berechnen. Der Integrand $f(z)$ ist außerhalb des Kreises $|z| = 2$ holomorph und besitzt die Stammfunktion $F(z) = \frac{z^2}{2}$. Damit ergibt sich für das Integral von $2i$ bis -2 der Wert



$$\int_{z=2i}^{-2} z\, dz = \left. \frac{z^2}{2} \right|_{2i}^{-2} = \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(2i)^2}{2} = 2 - (-2) = 4.$$

Innerhalb des Kreises müssen wir parametrisieren, etwa für den ersten Teil des Weges (von -2 nach 0) $z(t) = -2 + t$, $t \in [0, 2]$, für den zweiten (von 0 nach $2i$) $z(t) = it$, $t \in [0, 2]$. Damit erhält man für die Integrale:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z) dz &= \int_{C_1} |z| dz = \int_0^2 |-2 + t|\, dt = \int_0^2 (2 - t)\, dt = 2t \Big|_0^2 - \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^2 = 2 \\ \int_{C_2} f(z) dz &= \int_{C_2} |z| dz = \int_0^2 |it|\, i\, dt = i \int_0^2 t\, dt = i \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^2 = 2i \end{aligned}$$

Das gesamte Integral hat also den Wert $\oint_C f(z) dz = 4 + 2 + 2i = 6 + 2i$.

10 Der Cauchysche Integralsatz

Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt mit wenig Aufwand die in vieler Hinsicht zentrale Formel der Funktionentheorie, die Cauchysche Integralformel. Davor müssen wir uns aber noch ein wenig mit der Thematik der Windungszahlen befassen.

Dazu wählen wir einen beliebigen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und einen positiv orientieren Kreis C, wobei z_0 nicht auf C (oder genauer dem Bild C^*) liegen soll. Nun wollen wir das Integral

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz$$

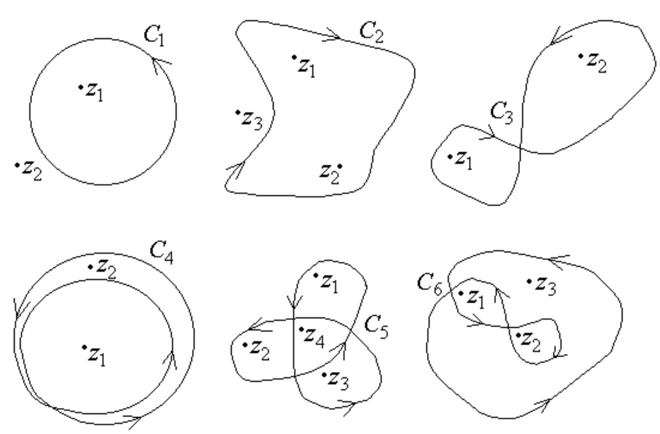
berechnen. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden: So könnte z_0 außerhalb des Kreises liegen. In diesem Fall ist das Integral Null (da der Integrand ja in einem geeigneten einfach zusammenhängenden Gebiet holomorph ist). Liegt z_0 hingegen innerhalb und wird der Kreis n-mal im Uhrzeigersinn durchlaufen, so erhält man das Ergebnis $n2\pi i$, bei n Umläufen gegen den Uhrzeigersinn wird das zu $-n2\pi i$. Man kann also sagen, das obige Integral zählt, wie oft der Punkt z_0 von der Kurve C umlaufen wird.

Nun verallgemeinern wir das für beliebige Kurven, indem wir den *Index* (auch *Windungszahl*) einer Kurve C bezüglich eines Punktes z_0 definieren als

$$\operatorname{Ind}_C(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz. \tag{5}$$

Dabei soll z_0 natürlich weiterhin nicht auf C liegen. Der Index gibt also an, wie oft ein Punkt von einer speziellen Kurve umlaufen wird, das Vorzeichen sagt zusätzlich, ob im oder gegen den Uhrzeigersinn.

Beispiel: Wir ermitteln nun die Windungszahlen $\operatorname{Ind}_{C_k}(z_j)$ der folgenden Punkte bezüglich der folgenden Kurven C_1 bis C_6.

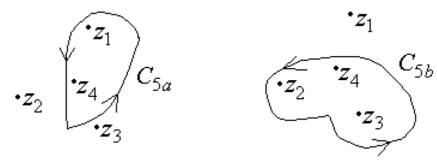


Für die erste Kurve erhalten wir $\operatorname{Ind}_{C_1}(z_1) = +1$, denn dieser Punkt wird einmal mathematisch positiv umlaufen. Weiters ist $\operatorname{Ind}_{C_1}(z_2) = 0$.
Die Kurve C_2 wird mathematisch negativ durchlaufen, es ist $\operatorname{Ind}_{C_2}(z_1) = \operatorname{Ind}_{C_2}(z_2) = -1$, und klarerweise erhalten wir $\operatorname{Ind}_{C_2}(z_3) = 0$.
C_3 umläuft den Punkt z_1 negativ, z_2 hingegen positiv, also $\operatorname{Ind}_{C_3}(z_1) = -1$ und $\operatorname{Ind}_{C_3}(z_2) = +1$.
Die Kurve C_4 umläuft den Punkt z_2 einmal, z_1 zweimal im positiven Sinne; es ist also $\operatorname{Ind}_{C_4}(z_1) = +2$ und $\operatorname{Ind}_{C_4}(z_2) = +1$.

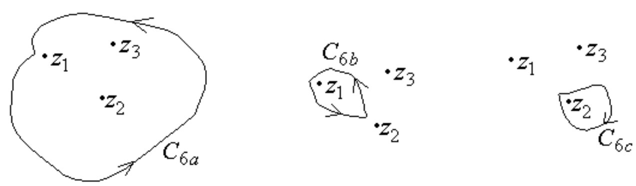
Bisher waren die Windungszahlen hoffentlich intuitiv einsichtig. Bei komplizierteren Kurven wie etwa C_5 oder C_6 ist das nicht mehr unbedingt der Fall. Wie groß ist etwa

$\mathrm{Ind}_{C_5}(z_4)$? Null, Eins, Zwei oder vielleicht doch Drei? In solchen Fälle hilft es, die Kurven in geschlossene Teilstücke zu zerlegen, die nur mehr einmal in positiver oder negativer Richtung durchlaufen werden.

Für C_5 könnte das etwa so aussehen wie rechts dargestellt. Natürlich gibt es noch andere Möglichkeiten der Zerlegung; eine ist so gut wie die andere. Auf jeden Fall überlegt man sich nun die Windungszahlen für jede Teilkurve getrennt und addiert am Ende die Ergebnisse.



In unserem Fall ist $\mathrm{Ind}_{C_{5a}}(z_1) = \mathrm{Ind}_{C_{5a}}(z_4) = +1$ bzw. $\mathrm{Ind}_{C_{5b}}(z_2) = \mathrm{Ind}_{C_{5b}}(z_3) = \mathrm{Ind}_{C_{5b}}(z_4) = +1$, alle anderen Windungszahlen sind Null. Nun addiert man die Ergebnisse und erhält: $\mathrm{Ind}_{C_5}(z_1) = \mathrm{Ind}_{C_5}(z_2) = \mathrm{Ind}_{C_5}(z_3) = +1$, $\mathrm{Ind}_{C_5}(z_4) = +2$.
Analog kann man bei C_6 vorgehen, hier erhält man drei Teilstücke und die Windungszahlen $\mathrm{Ind}_{C_{6a}}(z_1) = \mathrm{Ind}_{C_{6a}}(z_2) = \mathrm{Ind}_{C_{6c}}(z_3) = +1$, $\mathrm{Ind}_{C_{6b}}(z_1) = +1$ sowie $\mathrm{Ind}_{C_{6c}}(z_2) = -1$.



Das Gesamtergebnis ist also $\mathrm{Ind}_{C_6}(z_1) = +2$, $\mathrm{Ind}_{C_6}(z_2) = 0$ und $\mathrm{Ind}_{C_6}(z_3) = 1$. Man sieht: Der Punkt z_2 wird netto gar nicht umlaufen, weil sich eine positive und eine negative Umrundung aufheben.

Für allgemeine geschlossene Wege C nennt man nun die Menge aller Punkte $z \in \mathbb{C} \backslash C^*$ mit $\mathrm{Ind}_C(z) \neq 0$ das Innere von C ($\mathrm{Int}(C)$ von *interior*), jene mit $\mathrm{Ind}_C(z) = 0$ das Äußere ($\mathrm{Ext}(C)$ von *exterior*). Im oberen Beispiel liegt z_2 also per Definition im Äußeren der Kurve.

Auch sonst gibt es zu Windungszahlen noch einiges zu sagen. So ist klarerweise

$$\mathrm{Ind}_{-C}(z_0) = -\mathrm{Ind}_C(z_0).$$

Jene Wege C, für die an allen $z \in \mathrm{Int}(C) \neq \emptyset$ die Windungszahl $\mathrm{Ind}_C(z)$ gleich Eins ist, nennt man *einfach geschlossen*. Im vorigen Beispiel wäre also C_1 einfach geschlossen, C_2 hingegen bereits nicht mehr (alle Windungszahlen im Inneren sind gleich -1).

Mit diesem Vorwissen können wir nun zur zentralen Formel der Funktionentheorie kommen:

Cauchysche Integralformel

G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, der geschlossene Weg C verlaufe ganz darin. Die Funktion f sei holomorph in G. Dann gilt für beliebige $z \in G \setminus C^*$:

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_C(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Natürlich kann man das auch in der Form

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i \cdot f(z) \operatorname{Ind}_C(z)$$

schreiben, so sieht man besonders klar, dass sich bestimmte Typen von Integralen recht leicht mit dieser Formel berechnen lassen werden. Die Aussagen der Cauchyschen Integralformel reichen aber noch viel weiter: So geht aus ihr hervor, dass die Werte einer holomorphen Funktion im Inneren eines Bereichs vollständig durch die Werte am Rand festgelegt sind. (Im Reellen würde die analoge Aussage lauten: Kennt man die Werte einer Funktion an den Grenzen eines Intervalls, dann kennt man auch alle Werte im Inneren – das trifft in $\mathbb{R}$ nur für lineare Funktionen zu.)

Sehr oft betrachtet man als Kurve in der Cauchyschen Integralformel einen einfach positiv durchlaufenen Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r. Diesen notiert man meist mit $|z - z_0| = r$ und setzt die positive Orientierung als vereinbart voraus:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

sofern z im Inneren der Kreislinie liegt (sonst ist $f(z) = 0$).

Wählt man nun $z = z_0$, so sieht man, dass der Funktionswert von f an jedem Punkt das arithmetische Mittel der Werte auf jeder beliebigen Kreislinie um den Punkt ist (sofern der Kreis noch ganz im Holomorphiegebiet liegt), das ist die Aussage der Mittelwertgleichung. Noch wichtiger ist aber eine andere Folgerung aus der Integralformel, nämlich, dass sich mit ihrer Hilfe (im Prinzip) Ableitungen beliebig hoher Ordnung berechnen lassen:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{6}$$

Wesentlich ist dabei, dass für jede holomorphe Funktion Ableitungen beliebig hoher Ordnung existieren; das haben wir zwar früher schon erwähnt, bewiesen kann es allerdings erst mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel werden. Die konkrete Berechnung der Ableitung wird man natürlich in der Regel *nicht* mit dieser Formel durchführen.

Beispiel: Wir zeigen nun noch wie sich gewisse Integrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel berechnen lassen. Als erstes Beispiel wählen wir

$$I = \oint\limits_{|z - (1+2i)| = \sqrt{2}} \frac{e^{\pi z}\, z^2}{z - 2i}\, dz.$$

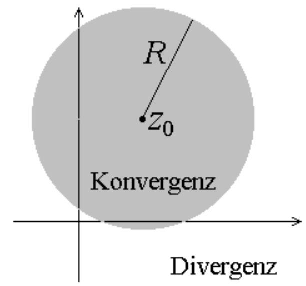
Der Punkt $z = 2i$ ligt innerhalb des positiv durchlaufenen Kreises, die Integralformel ergibt also

$$I = 2\pi i\, \left(e^{\pi z}\, z^2\right)_{z=2i} = 2\pi i\, \left(e^{2\pi i} \cdot (-4)\right) = -8\pi i.$$

---

11 Potenzreihen

Potenzreihen im Komplexen – weitgehend analog zum Reellen. Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $R \in [0, \infty]$ (Konvergenzradius), für die gilt: Die Reihe konvergiert absolut in $|x - x_0| < R$ und divergiert für $[x - x_0| > R$. Dieses R kann mit der Formel von Cauchy-Hadamard



$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \text{oder auch mit} \qquad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{7}$$

berechnet werden, wobei die zweite Form nur gilt, wenn der Grenzwert auch tatsächlich existiert.

Beispiel: Wir berechen die Konvergenzradien der drei Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (1 + i^n)(z - 1)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^{2n}$$

1. Die erste Reihe ist relativ einfach. Mit $a_n = \frac{1}{n}$ erhält man

   $$R = \lim_{n\to\infty} \left| \tfrac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{n+1}{n} = 1.$$

   Analog liefert die Formel von Cauchy-Hadamard

   $$\tfrac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\tfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

   also ebenfalls $R = 1$.

2. Der zweite Fall ist nicht mehr ganz so leicht, wegen:

   $$a_n = \begin{cases} 2 & \text{für } n = 4k \\ 1 + i & \text{für } n = 4k + 1 \\ 0 & \text{für } n = 4k + 2 \\ 1 - i & \text{für } n = 4k + 3 \end{cases} \qquad \text{mit } k \in \mathbb{N}_0$$

   Ein Grenzwert des Quotienten kann in einem solchen Fall gar nicht existieren, wir müssen also hier auf jeden Fall auf Cauchy-Hadamard zurückgreifen:

   $$\tfrac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1,$$

   wir erhalten also wiederum $R = 1$.

3. In der dritten Reihe setzen wir zunächst $u = z^2$ und erhalten $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} u^n$. Nun ergibt sich weiter

   $$\begin{aligned} R_u &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n/n!}{(n+1)^{(n+1)}/(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n\,(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}\,n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n\,(n+1)\,n!}{(n+1)^n\,(n+1)\,n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

   Jetzt erinnern wir uns an $u = z^2$, also ist $R = \sqrt{R_u} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

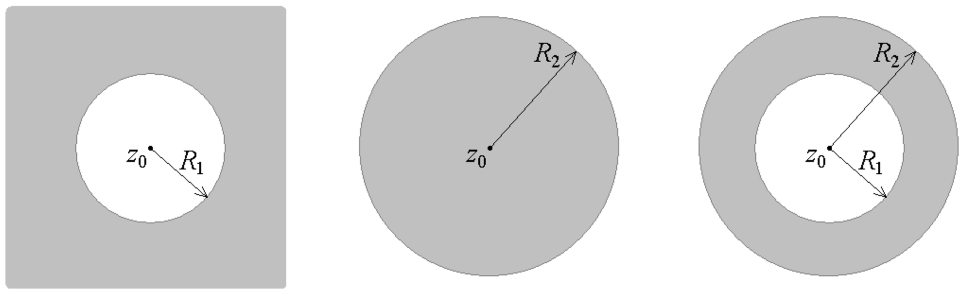
---

12 Laurent-Reihen

Verallgemeinerung der Potenzreihe (auch mit negativen Potenzen $(z-z_0)^{-n} = \frac{1}{(z-z_0)^n}$): *Laurentreihen*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}.$$

...nur dort konvergent, wo beide Teilreihen konvergent sind.



$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n \text{ konv.} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ konv.} \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ konv.}$$

Im Kreisring $D_{R_1R_2}$ stellt die Laurentreihe eine holomorphe Funktion dar, und umgekehrt läßt sich eine in einem Kreisring holomorphe Funktion auch in eine Laurentreihe entwickeln. Für diese Entwicklung erhält man, wenn C ein einfach geschlossener Weg in $D_{R_1R_2}$ ist und die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D_{R_1}(z_0)}$ ganz im Inneren von C liegt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta \tag{8}$$

Die Formel für die Koeffizienten ist in der Praxis weniger wichtig als es vielleicht den Anschein haben mag. Will man nämlich die Laurentreihe einer Funktion bestimmen, dann ist sie nur der letzte Ausweg, sozusagen ein Akt der Verzweiflung, wenn alles andere versagt. In den meisten interessanten Fällen kann man nämlich die Laurentreihenentwicklung einfach aus einer bereits bekannten Potenzreihe ablesen oder mit Hilfe bestimmter Summenformeln (etwa der für die geometriscbe Reihe) gewinnen.

Ist f holomorph in $0 < |z-z_0| < \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$, so nennt man den Koeffizienten a_{-1} der dort gültigen Laurent-Entwicklung von f um z_0 das *Residuum* von f an der Stelle z_0, $\mathrm{Res}\,(f; z_0)$. Warum gerade dieser Koeffizient so wichtig ist, dass er einen eigenen Namen erhält, werden wir bald sehen.

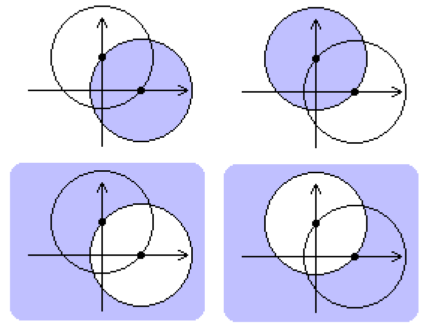
Beispiel: Wir wollen die Laurentreihe von $e^{1/z}$ um den Nullpunkt $z = 0$ herum bestimmen. Die Exponentialfunktion hat dort die Potenzreihendarstellung

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}u^n.$$

In diese können wir nun $u = z^{-1}$ einsetzen und erhalten

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!}z^n$$

Beispiel: Wir betrachten nun die Laurententwicklung von $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-i)}$. Hier sind vor allem zwei Entwicklungspunkte interessant, nämlich die Singularitäten $z = +1$ und $z = +i$. Ihr Abstand voneinander ist $\sqrt{2}$; insgesamt wird man also vier Laurentreihen erhalten, nämlich für $0 < |z-1| < \sqrt{2}$, für $|z-1| > \sqrt{2}$, für $0 < |z-i| < \sqrt{2}$ und für $|z-i| > \sqrt{2}$. Die expliziten Ausdrücke gewinnt man am besten mit Hilfe der geometrischen Reihe:



$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-i} &= -\frac{1}{i-z} = -\frac{1}{i-z+1-1} = -\frac{1}{i-1-(z-1)} = -\frac{1}{i-1}\,\frac{1}{1-\frac{z-1}{i-1}} \\
&= -\frac{1}{i-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{i-1}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(i-1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Der entscheidende Schritt ist dabei die Anwendung von $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, die nur unter der Bedingung $|q| < 1$ gilt. Daher stimmt diese Entwicklung nur für $|\frac{z-1}{i-1}| < 1$, also für $|z-1| < |i-1| = \sqrt{2}$, aber das ist ja auch genau der Bereich, der uns interessiert. Die übrigen Entwicklungen erhält man auf ähnliche Weise:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-i} &= \frac{1}{z-1-i+1} = \frac{1}{z-1}\,\frac{1}{1-\frac{i-1}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i-1}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i-1)^n}{(z-1)^{n+1}} \\
\frac{1}{z-1} &= \frac{-1}{1-i-z+i} = \frac{-1}{1-i}\,\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} = \frac{-1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} \\
\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z-i-1+i} = \frac{1}{z-i}\,\frac{1}{1-\frac{1-i}{z-i}} = \frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-i}{z-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{(z-i)^{n+1}}
\end{aligned}$$

In diesen Fällen gelten die Entwicklungen für $|z-1| > \sqrt{2}$, für $|z-i| < \sqrt{2}$ und für $|z-i| > \sqrt{2}$. Die Ergebnisse können wir hier sofort in $f(z)$ einsetzen und erhalten für den Fall $0 < |z-1| < \sqrt{2}$:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)}\,\frac{1}{(z-i)} = -\frac{1}{(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(i-1)^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n-1}}{(i-1)^{n+1}}$$

Analog ergeben sich die Ausdrücke

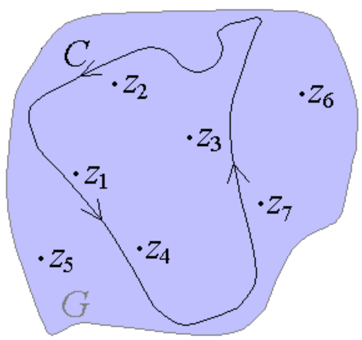
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i-1)^n}{(z-1)^{n+2}} \qquad f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^{n-1}}{(1-i)^{n+1}} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{(z-i)^{n+2}}$$

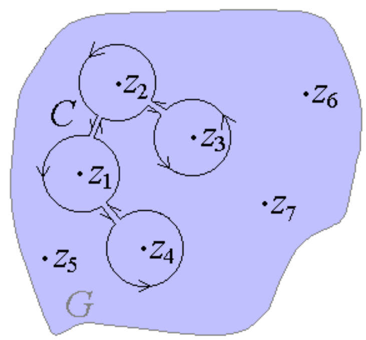
für $|z-1| > \sqrt{2}$, für $0 < |z-i| < \sqrt{2}$ und für $|z-i| > \sqrt{2}$. In diesem Fall hat man beim Einsetzen keinerlei Probleme. Geht es aber um eine Funktion mit mehr als zwei Singularitäten oder eine rationale Funktion (wie zum Beispiel $f(z) = \frac{3z}{(z-1)(z-i)}$), wird die Sache schwieriger, denn man muss ja jeden Term für sich entwickeln. In solchen Fällen hilft meist eine Partialbruchzerlegung, in die man dann wiederum einfach einsetzen kann.

13 Der Residuensatz

Die Funktion f habe folgende Eigenschaften: Es gibt ein einfach zusammenhängendes Gebiet G, in dem f mit Ausnahme endlich vieler Punkte $z_j, \quad j = 1, \ldots, N$ holomorph ist. Der geschlossene Integrationsweg C soll ganz in $G \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}$ liegen.

Residuensatz: $\oint_C f(z)dz$ berechnen durch Deformierung des Weges, Entwicklung von f in Laurentreihen um jede Singularität (für $0 < |z - z_j| < r$, Vertauschung von Reihenbildung und Integration $\leftarrow$ nur Terme $2\pi i a_{-1} = 2\pi i \mathrm{Res}\,(f, z_j)$ bleiben übrig





Mehrfach umlaufene Punkte und jeweiligen Durchlaufungssinn durch $\mathrm{Ind}\,(f, z_j)$ berücksichtigt, führt auf:

Residuensatz

G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet. $z_1, z_2, \ldots z_N \in G$ seien endlich viele (paarweise verschiedene) Punkte. Die Funktion f sei auf $G \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}$ holomorph. Dann gilt für jeden geschlossene Weg C, der ganz in $G \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}$ verläuft:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{N} \left(\mathrm{Res}\,(f, z_j) \cdot \mathrm{Ind}_C(z_j)\right)$$

Berechnung der Residuen: Bei Polen k-ter Ordnung:

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z-z_0)^k f(z) \right) \right]$$

Speziell für Pole erster Ordnung ergibt sich

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0) f(z) \right]$$

für Pole zweiter Ordnung erhält man $\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{d}{dz} \left((z-z_0)^2 f(z) \right) \right]$. Außerdem: Wenn f und g holomorph an z_0 sind und weiters $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) \neq 0$ ist, dann gilt:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}; z_0 \right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \tag{9}$$

Auch aus einer Partialbruchzerlegung können die Residuen meist direkt abgelesen werden.

Beispiel: Die Funktion $f(z) = \frac{z}{(z-i)(z+1)^2}$ hat an $z = +i$ einen Pol erster, bei $z = -1$ einen zweiter Ordnung. Für die Residuen an diesen Punkten erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f; +i) &= \lim_{z \to +i} \left\{ (z-i) \frac{z}{(z-i)(z+1)^2} \right\} = \lim_{z \to +i} \frac{z}{(z+1)^2} = \frac{i}{(1+i)^2} = \frac{1}{2} \\
\operatorname{Res}(f; -1) &= \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \frac{z}{(z-i)(z+1)^2} \right\} = \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z}{(z-i)} \right\} \\
&= \lim_{z \to -1} \left\{ \frac{z-i-z}{(z-i)^2} \right\} = \frac{-i}{(-1-i)^2} = -\frac{i}{1+2i-1} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Beispiel: Wir berechnen die Residuen von $f(z) = \frac{z+1}{z^4-1}$ an den vier Polen erster Ordnung $z = +1$, $z = -1$, $z = +i$ und $z = -i$.

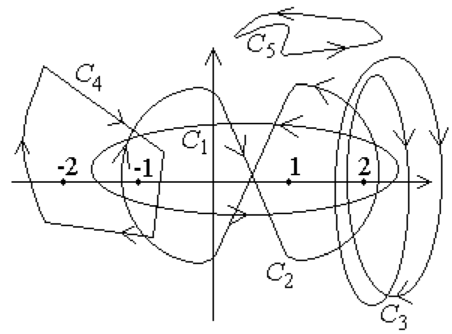
$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}\left(\tfrac{z+1}{z^4-1}; +1\right) = \tfrac{z+1}{4z^3}\Big|_{z=+1} = \tfrac{1}{2} && \operatorname{Res}\left(\tfrac{z+1}{z^4-1}; +i\right) = \tfrac{z+1}{4z^3}\Big|_{z=+i} = \tfrac{z^2+z}{4z^4}\Big|_{z=+i} = \tfrac{-1+i}{4} \\
&\operatorname{Res}\left(\tfrac{z+1}{z^4-1}; -1\right) = \tfrac{z+1}{4z^3}\Big|_{z=-1} = 0 && \operatorname{Res}\left(\tfrac{z+1}{z^4-1}; -i\right) = \tfrac{z+1}{4z^3}\Big|_{z=-i} = \tfrac{z^2+z}{4z^4}\Big|_{z=-i} = \tfrac{-1-i}{4}
\end{aligned}$$

Beispiel: Die rationale Funktion f mit der Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{3} \frac{1}{z+2i} - 2 \frac{1}{z-3} + \frac{1}{(z-3)^2}$$

hat die Residuen $\operatorname{Res}(f; +1) = 1$, $\operatorname{Res}(f; -2i) = \frac{2}{3}$ und $\operatorname{Res}(f; +3) = -2$.

Beispiel: Wir berechnen dazu die Integrale
$$\int_{C_k} \frac{2z+1}{z^2-z-2}\,dz$$



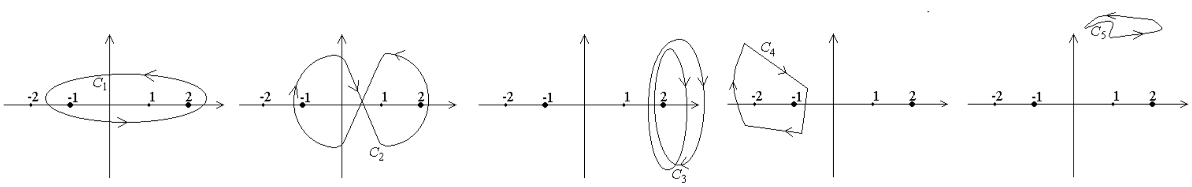
entlang der fünf rechts dargestellten Kurven C_1 bis C_5. Zunächst einmal bestimmen wir Art und Lage der Residuen: Die quadratische Gleichung $z^2-z-2=0$ hat die beiden Lösungen $z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$. Also hat $f(z) = \frac{2z+1}{z^2-z-2} = \frac{2z+1}{(z+1)(z-2)}$ zwei Pole erster Ordnung an $z=-1$ und $z=+2$.

Nun berechnen wir an diesen Stellen die Residuen. Dafür erhält man

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,-1) &= \lim_{z\to-1}(z+1)\frac{2z+1}{(z+1)(z-2)} = \lim_{z\to-1}\frac{2z+1}{z-2} = \frac{-2+1}{-1-2} = \frac{1}{3}\\
\operatorname{Res}(f,+2) &= \lim_{z\to2}(z-2)\frac{2z+1}{(z+1)(z-2)} = \lim_{z\to-1}\frac{2z+1}{z+1} = \frac{4+1}{2+1} = \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Im dritten Schritt bestimmen wir die Windungszahlen:

$\operatorname{Ind}_{C_1}(-1)=+1$ $\quad\operatorname{Ind}_{C_2}(-1)=-1$ $\quad\operatorname{Ind}_{C_3}(-1)=0$ $\quad\operatorname{Ind}_{C_4}(-1)=-1$ $\quad\operatorname{Ind}_{C_5}(-1)=0$
$\operatorname{Ind}_{C_1}(+2)=+1$ $\quad\operatorname{Ind}_{C_2}(+2)=+1$ $\quad\operatorname{Ind}_{C_3}(+2)=-2$ $\quad\operatorname{Ind}_{C_4}(+2)=0$ $\quad\operatorname{Ind}_{C_5}(+2)=0$



Jetzt steht dem Berechnen der Integrale nichts mehr im Weg:

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} f(z)\,dz &= 2\pi i\left\{\operatorname{Res}(f,-1)\operatorname{Ind}_{C_1}(f,-1)+\operatorname{Res}(f,+2)\operatorname{Ind}_{C_1}(f,+2)\right\} =\\
&= 2\pi i\left\{\tfrac{1}{3}\cdot 1+\tfrac{5}{3}\cdot 1\right\} = 2\pi i\cdot\tfrac{6}{3} = 4\pi i\\
\int_{C_2} f(z)\,dz &= 2\pi i\left\{\tfrac{1}{3}\cdot(-1)+\tfrac{5}{3}\cdot 1\right\} = 2\pi i\cdot\tfrac{4}{3} = \tfrac{8\pi i}{3}\\
\int_{C_3} f(z)\,dz &= 2\pi i\left\{\tfrac{1}{3}\cdot 0+\tfrac{5}{3}\cdot(-2)\right\} = 2\pi i\cdot(-\tfrac{10}{3}) = -\tfrac{20\pi i}{3}\\
\int_{C_4} f(z)\,dz &= 2\pi i\left\{\tfrac{1}{3}\cdot(-1)+\tfrac{5}{3}\cdot 0\right\} = 2\pi i\cdot(-\tfrac{1}{3}) = -\tfrac{2\pi i}{3}\\
\int_{C_5} f(z)\,dz &= 2\pi i\left\{\tfrac{1}{3}\cdot 0+\tfrac{5}{3}\cdot 0\right\} = 0
\end{aligned}$$

Das letzte Integral erhält man bereits aus dem Cauchyschen Integralsatz, überhaupt lassen sich sowohl dieser als auch die Cauchysche Integralformel als Spezialfälle des Residuensatzes auffassen (keine Singularität bzw. nur ein Pol erster Ordnung).

14 Berechnung reeller Integrale mittels Residuensatz

Umformung reeller Integrale mittels Substitution oder durch Schließen des Weges in der komplexen Ebene auf ein komplexes Kurvenintegral.

- rationale Funktionen in $\sin t$ und $\cos t$:
$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi i \sum_{|z_j|<1} \operatorname{Res}(f(z), z_j),$$
wobei $f(z) := \frac{1}{iz} R(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))$ ist.

- rationale Funktionen $P(t)/Q(t)$ mit $\operatorname{Grad} Q \geq 2 + \operatorname{Grad} P$, wobei Q keine reellen Nullstellen besitzt:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j>0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)$$

- $\operatorname{Grad} Q \geq 1 + \operatorname{Grad} P$, wobei Q keine reellen Nullstellen besitzt:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{i\alpha t}\, dt = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j>0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_j\right)$$
daraus folgt weiter (Trennung von Real- und Imaginärteil):
$$\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} \cos(\alpha t)\, dt = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j>0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_j\right)\right\}$$
$$\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} \sin(\alpha t)\, dt = \operatorname{Im}\left\{2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j>0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_j\right)\right\}$$

Beispiel: Wir berechnen das Integral $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+4\cos t)^2}\, dt$. Zunächst erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{(5 + 4\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))^2} = \frac{z}{i} \frac{1}{(2z^2+5z+2)^2} = \frac{z}{4i} \frac{1}{(z+\frac{1}{2})^2 (z+2)^2}$$

Diese Funktion hat bei $z = -\frac{1}{2}$ und $z = -2$ jeweils Pole zweiter Ordnung, nur $z = -\frac{1}{2}$ liegt dabei innerhalb des Einheitskreises. Für das Residuum an diesem Punkt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f; -\frac{1}{2}\right) &= \lim_{z\to-\frac{1}{2}} \frac{d}{dz} \left\{(z+\frac{1}{2})^2 f(z)\right\} = \lim_{z\to-\frac{1}{2}} \frac{d}{dz} \left\{\frac{z}{4i(z+2)^2}\right\} \\
&= \lim_{z\to-\frac{1}{2}} \left\{\frac{1}{4i(z+2)^2} - \frac{2z}{4i(z+2)^3}\right\} = \frac{1}{9i} + \frac{2}{27i} = \frac{5}{27i}
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+4\cos t)^2}\, dt = 2\pi i \cdot \frac{5}{27i} = \frac{10\pi}{27}.$$

---

15 Der Satz von Rouché

Satz von Rouché: *Wenn f und g holomorph innerhalb und auf einer einfach geschlossenen Kurve C sind und auf ganz C gilt, dass $|g(z)| < |f(z)|$ ist, so haben $f+g$ und f innerhalb von C die gleiche Anzahl von Nullstellen.* („Kleine Störungen ändern das prinzipielle Nullstellenverhalten nicht.“) Dabei müssen Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden, eine Nullstelle dritter Ordnung etwa zählt für den Satz von Rouché wie drei einfache Nullstellen.

Beispiel: Für das Polynom $P(z) = z^{10} + 6z^7 + z^5 + z + 2$ zeigen wir zuerst, dass alle Nullstellen innerhalb von $|z| = 2$ liegen, und dann, dass sich sieben innerhalb von $|z| = 1$ befinden.

Wir wählen nun $f(z) = z^{10}$ und $g(z) = 6z^7 + z^5 + z + 2$. Dann gilt für $|z| = 2$ auf jeden Fall die Abschätzung:

$$|g(z)| = |6z^7 + z^5 + z + 2| \leq 6|z^7| + |z^5| + |z| + 2 < |z^{10}| = |f(z)|$$

Der Satz von Rouche wird also anwendbar und sagt uns, dass $f(z)$ und $P(z) = f(z)+g(z)$ innerhalb von $|z| = 2$ die selbe Anzahl von Nullstellen haben. $f(z) = z^{10}$ hat in $z = 0$ eine zehnfache Nullstelle, also muss auch auch P innerhalb dieses Kreises zehn Nullstellen haben.

Für den zweiten Teil der Aufgabe wählen wir $f(z) = z^{10} + 6z^7 = z^7(z^3 + 6)$ und $g(z) = z^5 + z + 2$. Die Dreiecksungleichung liefert uns wieder eine Abschätzung, diesmal für $|z| = 1$:

$$|g(z)| = |z^5 + z + 2| \leq |z^5| + |z| + 2 = 4 < 5 \leq |z^{10} + 6z^7| = |f(z)|$$

Nach dem Satz von Rouché haben $f(z)$ und $P(z) = f(z) + g(z)$ also innerhalb von $|z| = 1$ gleich viele Nullstellen. Die neue Funktion f hat eine siebenfache Nullstelle bei $z = 0$ und drei Nullstellen mit dem Betrag $\sqrt[3]{6} > 1$. Demnach hat auch P innerhalb des Einheitskreises sieben Nullstellen.

Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral: *G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, f sei meromorph in G. C sei ein einfach geschlossener Weg mit $C^* \subset G$, wobei auf C^* keine Null- und Polstellen von f liegen. N_f sei die Anzahl der Null-, P_f die Anzahl der Polstellen von f in* $\mathrm{int}(C)$*, wobei beide Arten so oft zu zählen sind, wie es ihrer Vielfachheit/Ordnung entspricht. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N_f - P_f$$

Beispiel: Wir wollen das Integral $I = \int_{|z|=2} \frac{8z^7+10z^4+6}{z^8+2z^5+6z+7}\, dz$ ermitteln. Mit Adleraugen erkennen wir, dass der Zähler im Integranden gerade die Ableitung des Nenners ist. Die Funktion $f(z) = z^8 + 2z^5 + 6z + 7$ hat keine Pole, und der Satz von Rouché sagt uns weiterhin, dass alle acht Nullstellen innerhalb des relevanten Kreises $|z| = 2$ liegen, denn es ist ja $|2z^5 + 6z + 7| \leq 2|z^5| + 6|z| + 7 = 77 < 256 = |z^8|$. Der Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral ergibt also mit $N_f = 8$ und $P_f = 0$:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{(z^8 + 2z^5 + 6z + 7)'}{z^8 + 2z^5 + 6z + 7}\, dz = 2\pi i \cdot N_f = 16\pi i$$
