Zinseszins- und Rentenrechnung

1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem sich das Einlagekapital K bei **a)** jährlicher **b)** monatlicher **c)** stetiger Verzinsung verdoppelt hat, wobei i der jährliche nominelle Zinssatz ist. Bestimmen Sie auch Zahlenwerte für $i = 0.04$.

2 Ein edler und gut betuchter Spender beschließt angesichts seiner Affinität zu Zahlen eine Stiftung einzurichten, die - ähnlich dem Nobelpreis - jährlich die herausragendste mathematische Leistung würdigen soll. Berechnen Sie das notwendige Einlagekapital, um bei jährlicher Verzinsung von 7% und jährlicher Inflationsrate von 2% eine Dotation 1 Mio. Euro (mit Inflationsanpassung) vom nächstem Jahr an für die nächsten **a)** 10 Jahre, **b)** 100 Jahre und **c)** auf ewig zu garantieren.

3 Zeigen Sie, dass für $i > 0$:

$$d < d^{(2)} < d^{(3)} < \cdots < \delta < \cdots < i^{(3)} < i^{(2)} < i$$

und

$$i^{(m)} - d^{(n)} \leq \frac{i^2}{\min(m,n)}.$$

4 Bei einer ewigen nachschüssigen Rente steige der jährliche Betrag gemäß $(1+k)$, $(1+k)^2$, $(1+k)^3$, $\ldots$. Bei einer jährlichen effektiven Zinsrate von 4% beträgt der Barwert zu Beginn des ersten Jahres genau 51. Wie groß ist k?

5 Die *kaufmännische Verzinsung* ist definiert durch

$$K_K(t) = \frac{(1+i)^{\lfloor t \rfloor + 1}}{1 + i\left((1 - (t - \lfloor t \rfloor)\right)},$$

wobei i der effektive jährliche Zinssatz bei stetiger Verzinsung ist. Zeigen Sie, dass $K_S(\lfloor t \rfloor) \leq K_K(t) \leq K_S(t)$, wobei $K_S(t)$ die stetige Verzinsung (mit dem selben jährlichen effektiven Zinssatz i) darstellt.

6 Sei S eine Schuld, die mit jährlichen, konstanten Annuitäten A beglichen werden soll. Weiters bezeichne N die Laufzeit der Rückzahlung in Jahren (das N-te Jahr ist also jenes, in dem die zu begleichende Restschuld das erste Mal kleiner als A ist). Zeigen Sie, dass

$$N = \min\left\{ n \in \mathbb{N} : n \geq \frac{\ln(A) - \ln(A - iS)}{\ln(1+i)} \right\},$$

wobei i den nominellen Jahreszins bezeichnet.

Die zukünftige Lebensdauer eines x-jährigen

7 Zeigen Sie:
a) ${}_tp_x = \exp\left(\int_x^{x+t} \mu_s \, ds\right)$
b) $\frac{\partial}{\partial x} \, {}_tp_x = (\mu_x - \mu_{x+t})\,{}_tp_x$

x	l_x	d_x
30	10000	200
31	9800	400
32	9400	600
33	8800	800
34	8000	1000
35	7000	1200
36	5800	1400
37	4400	1600
38	2800	1800
39	1000	1000
40	0	0

Tabelle 1: "Steinzeitsterbetafel" aus H. Kracke *Lebensversicherungsmathematik*, l_x ist die Anzahl der Lebenden mit Alter x, $d_x = l_x q_x$

8 Berechnen Sie μ_{55} sowie $\mathring{e}_{55}$, wenn

$${}_tp_x = \frac{120 - x - t}{120 - x}$$

für $0 \leq x < 120$ und $0 \leq t \leq 120 - x$.

9 Betrachten Sie zwei unabhängige Leben, die sich ausschließlich durch den Nikotinkonsum unterscheiden. Für $0 \leq x < \omega$ sei μ_x die Sterbeintensität des Nichtrauchers und $c\mu_x$ mit $c > 1$ die Sterbeintensität des Rauchers. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Raucher den Nichtraucher überlebt.

10 Gegeben seien die Werte $e_{75} = 10.5$, $e_{76} = 10$ und $e_{77} = 9.5$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 75-jährige Person 77 Jahre alt wird?

11 Es sei μ_{x+t} konstant für $0 \leq t < 1$ und $q_x = 0.16$. Berechnen Sie t sodass ${}_tp_x = 0.95$.

12 Für $l_x = \sqrt{121 - x}$, $0 \leq x \leq 121$ berechne die Wahrscheinlichkeiten, dass ein(e) 21-jährige(r) (a) ein Alter von 40 Jahren erreicht, (b) das Alter von 72 Jahren nicht erreicht, (c) das Alter von 35 Jahren erreicht, nicht aber jenes von 57 Jahren und (d) das Alter von 122 Jahren erreicht. Betrachte weiters zwei unabhängige Personen, wobei die eine 40, die andere 21 Jahre alt ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass (e) beide 57 Jahre alt werden, (f) beide zwar 57 Jahre alt werden, aber nicht 72 Jahre und (g) beide noch 50 Jahre leben?

Einfache Kapitalversicherungen

13 Eine stetige lebenslängliche Todesfallsversicherung wird an eine 50-jährige Person ausgestellt. Die Sterblichkeit folge de Moivre's Gesetz (Gleichverteilung des Todeszeitpunktes zwischen 0 und ω Jahren) mit $\omega = 100$

und die Auszahlung betrage $b_t = 1000 - \frac{t^2}{10}$. Berechnen Sie die Nettoeinmalprämie für diese Versicherung unter der Annahme eines effektiven Jahreszinses von $i = 0.04$.

Benutzen Sie die "Steinzeitsterbetafel" aus Tabelle 1.1, um die Barwerte folgender Kapitalversicherungen bei einem Zinsfuß von $i = 0.04$ zu berechnen:

14 A_x mit $x = 33, 35, 37$

15 $A_{x\overline{5|}}^{1}$ mit $x = 32, 34, 36$

16 $A_{x\overline{5|}}$ mit $x = 32, 34, 36$.

Leibrenten und Kommutationszahlen

17 Eine Versicherung, ausgestellt an eine x -jährige Person, zahlt C € nach n Jahren, wenn die Person dann noch am Leben ist, oder die Nettoeinmalprämie A am Ende des Todesjahres, falls die Person vorher verstirbt. Wie läßt sich A durch Kommutationszahlen ausdrücken?

18 Berechnen Sie p_{73} aus folgenden Werten, wobei $i = 0.03$ gilt:

x	72	73	74	75
$\ddot{a}_x$	8.06	7.73	7.43	7.15

19 Es sei $l_x = 100.000(100 - x)$ für $0 \leq x \leq 100$. Berechnen Sie den Barwert einer vorschüssigen lebenslänglichen Leibrente für eine 85-jährige Person, wobei $i = 0.05$ und die jährlichen Raten in den ersten beiden Jahren 2.000 € und danach 3.000 € betragen.

20 Wie Beispiel 19, nur sei die Rente auf 10 Jahre beschränkt

Zwei weitere Typen von Lebensversicherungen sind die sogenannten "standard increasing" und die "standard decreasing" Lebensversicherungen. Bei der Lebensversicherung vom Typ "standard increasing" beträgt der im Jahr k versicherte Betrag genau k, bei "standard decreasing" genau $n - k$. Diese Versicherungen können auch angesehen werden als Summe von konstanten Lebensversicherungen über einen Betrag von 1, die jeweils ein Jahr später beginnen oder enden. Damit ergibt sich für eine lebenslängliche Todesfallsversicherung die Netto-Einmalprämie

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

Für eine n-jährige Todesfallsversicherung können die Netto-Einmalprämien für "standard increasing", $(IA)_{x:\overline{n|}}^{1}$, und $(DA)_{x:\overline{n|}}^{1}$ für "standard decreasing" ausgedrückt werden als:

$$\begin{aligned}(IA)^1_{x:\overline{n}|} &= A_x + {}_{1|}A_x + \cdots + {}_{n-1|}A_x - n_{n|}A_x \\ &= nA^1_{x:\overline{n}|} - A^1_{x:\overline{n-1}|} - A^1_{x:\overline{n-2}|} - \cdots - A^1_{x:\overline{1}|} \\ (DA)^1_{x:\overline{n}|} &= A^1_{x:\overline{n}|} + A^1_{x:\overline{n-1}|} + A^1_{x:\overline{n-2}|} + \cdots + A^1_{x:\overline{1}|}\end{aligned}$$

Analog kann eine "standard increasing" Rente definiert werden, die in Jahr k einen Betrag von $k+1$ ausbezahlt. Die Netto-Einmalprämie beträgt dementsprechend: $(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k (k+1)_k p_x$

21 Berechnen Sie $(DA)^1_{31:\overline{5}|}$ mit $i = 0.03$ und unter Zuhilfenahme der "Steinzeitsterbetafel"

22 Berechnen Sie $(I\ddot{a})_{35}$ mit $i = 0.03$ und unter Zuhilfenahme der "Steinzeitsterbetafel"

23 Zeigen Sie die Relation $\ddot{a}_{\overline{n}|} = d(I\ddot{a})_{\overline{n}|} + nv^n$ und leiten Sie daraus folgende Formel ab: $\ddot{a}_x = d(I\ddot{a})_x + (IA)_x$.

24 Zeigen Sie, dass sich der Ausdruck

$$\frac{(I\ddot{a})_x - \ddot{a}_{x:\overline{1}|}}{(I\ddot{a})_{x+1} + \ddot{a}_{x+1}}$$

zu $\frac{p_x}{1+i}$ vereinfachen lässt.

Nettoprämien und Berücksichtigung der Kosten

25 ${}_nP_x$ bezeichne die jährliche Prämie für eine nicht befristeste Ablebensversicherung, wobei die Prämien aber maximal n-mal bezahlt werden. Sei $i = 0.04$, berechnen Sie ${}_3P_{34}$ für $i = 0.04$ mit Hilfe der "Steinzeitsterbetafel".

26 Es seien ${}_{20}P_{25} = 0.046$, $P_{25:\overline{20}|} = 0.064$ und $A_{45} = 0.640$. Bestimmen Sie die Prämie $P^1_{25:\overline{20}|}$.

27 Ein Kredit über 4 Jahre sei ausgestellt auf eine 25-jährige Person. Dieser Kredit soll durch konstante Zahlungen jeweils am Ende des 1., 2., 3. und 4. Jahres getilgt werden. Gleichzeitig soll eine Ablebensversicherung auf vier Jahre abgeschlossen werden, die im Falle des Ablebens der versicherten Person die Restschuld decken soll (der Einfachkeit halber soll angenommen werden, dass dies am Ende des Todesjahres geschieht). Die Zinsrate sei $i = 0.06$ sowohl für den Kredit als auch für die Verzinsung. Weiters sei $\ddot{a}_{25:\overline{4}|} = 3.667$ und ${}_4q_{25} = 0.005$.
a) Bestimmen Sie die Nettoeinmalprämie der Versicherung bei einem Kredit von 1000 € bzw. 2000 €.
b) Nun soll die Bezahlung der Versicherung aus den Mitteln des Kredites erfolgen. Wie hoch muss der Kredit dann sein, damit die Person nach Bezahlung der Versicherung 10000 € zur Verfügung hat.

28 Betrachten Sie eine gemischte Versicherung über einen Betrag von 1 mit einer Laufzeit 20 Jahren an eine 40-jährige Person. Als zusätzliche Leistung der Versicherung sei festgelegt, dass im Fall des Ablebebens der Person bereits in den ersten zehn Jahren zusätzlich zum Nennwert 1 die bis zum Todesjahr bezahlten Prämien verzinst zurückerstattet werden. Bestimmen Sie k derart, dass die Prämie für obige Versicherung als $A_{40:\overline{20|}}/k$ dargestellt werden kann.

29 Bei einer Lebensversicherung über 10.000 €, ausgestellt an eine x-jährige Person, wird 20 Jahre lang zu Jahresbeginn eine Prämie eingezahlt. Die Auszahlung erfolgt am Ende des Todesjahres. Solange noch Prämien eingezahlt werden, wird im Todesfall auch die Hälfte der letzten Prämie rückerstattet. Zeige, dass die jährliche Nettoprämie

$$\frac{10.000 A_x}{\left(1+\frac{d}{2}\right)\ddot{a}_{x:\overline{20|}} - \left(1 - v^{20}{}_{20}p_x\right)/2}$$

beträgt.

30 Berechnen Sie die ausreichende Prämie für eine Ablebensversicherung mit Nennwert 1000 € einer 35-jährigen Person gemäß der "Steinzeitsterbetafel" mit $i = 0.04$. Nehmen Sie dabei an, dass die Versicherung folgende Kosten veranschlagt: 5% Abschlusskosten, 3% Inkassokosten und 10% Verwaltungskosten. Geben Sie außerdem die Aufteilung der ausreichenden Prämie in Nettoprämie, Abschlusskosten, Inkassokosten und Verwaltungskosten an.