Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Wintersemester 2019/20
Graz, den 10.10.2019

2. Übung zur Algebra

2.1. *(Rechnen mit Potenzbasen)* (4 Punkte)
Wir betrachten die Körpererweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{C}$. Dann bezeichne $\mathbb{Q}(x)$ den kleinsten Zwischenkörper von $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$, der x enthält. Im Folgenden sei x eine beliebige komplexe Nullstelle des Polynoms $X^3 - 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Zeigen Sie, dass $\{1, x, x^2\}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}(x)$ ist.
(Insbesondere ist $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = 3$.)

(b) Sei $y \in \mathbb{Q}(x)$ beliebig. Begründen Sie, dass $\mathbb{Q}(y) \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(x)\}$.
(Hinweis: Gradformel, Satz 1.7.)

(c) Stellen Sie die Elemente

$$(1 - x + 2)(x^4 + 1), \quad x^{-1} \quad \text{und} \quad (1 + x)^{-1}$$

von $\mathbb{Q}(x)$ als $\mathbb{Q}$-Linearkombinationen bezüglich der $\mathbb{Q}$-Basis $\{1, x, x^2\}$ dar.
(Hinweis: Arithmetik im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$ kann hier helfen. Stichwörter: Polynomdivision, euklidischer Algorithmus.)

2.2. *(Quadrate und ungerade einfache Erweiterungen)* (4 Punkte)
Es sei $\iota \colon K \to L$ eine Körpererweiterung mit ungeradem Grad $[L : K]$. Ferner sei $x \in L$ beliebig. Zeigen Sie $K(x) = K(x^2)$.
(Hinweis: Betrachten Sie das Minimalpolynom m_x von x über K und schreiben Sie dieses in der Form $m_x = XP(X^2) + Q(X^2)$ mit Polynomen $P, Q \in K[X]$. Was liefert Ihnen nun die Gleichung $(\iota^* m_x)(x) = 0_L$?)

2.3. *(Transzendente Erweiterungen)* (4 Punkte)
Es bezeichne $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}$ die Menge aller komplexen Zahlen, welche algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ eine Körpererweiterung unendlichen Grades ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{A}$ abzählbar ist.
(Hinweis: Betrachten Sie Minimalpolynome. Wie viele gibt es davon?)

(c) Folgern Sie, dass es in $\mathbb{R}$ Elemente gibt, die transzendent über $\mathbb{Q}$ sind.

(Für mehr Hinweise siehe Bemerkung 2.4 aus der Vorlesung.)

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen am 17.10.2019 um 12:15 Uhr vor der Vorlesung. Bitte versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Sie dürfen auch zu zweit abgeben. Mehrere Blätter sind zu tackern. Mehr Informationen finden Sie auf der Webseite zur Vorlesung:
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2019-w-algebra.html`

2.4. *(Einfache transzendente Erweiterungen)* (4 Punkte)

Beweisen Sie Satz 2.5: *Sei* $\iota\colon K \to L$ *eine Körpererweiterung und* $x \in L$ *transzendent über* K. *Dann ist die Körpererweiterung* $K \to \mathrm{Quot}(K[X])$ K*-isomorph zu der von* ι *induzierten Körpererweiterung* $K \to K(x)$.

(Hinweis: Sie können den Beweis von Satz 2.1 übertragen.)

Wichtige Bemerkung: Von den obigen vier Aufgaben werden *nur die besten drei* bewertet. Sie können auf diesem Übungsblatt also maximal $3 \times 4 = 12$ Punkte erreichen.