TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2019/20
Graz, den 17.10.2019

3. Übung zur Algebra

3.1. *(Zerfällungskörper bestimmen)* (4 Punkte)
Bestimmen Sie für jedes der folgenden Polynome $P \in \mathbb{Q}[X]$ jeweils den Zerfällungskörper $\iota\colon \mathbb{Q} \to L$ mit $L \subseteq \mathbb{C}$ und $\iota = \mathrm{id}_L|_{\mathbb{Q}}$, sowie dessen Grad $[L : \mathbb{Q}]$. Zerlegen Sie auch das Polynom $\iota^* P \in L[X]$ in ein Produkt von Linearfaktoren.

(a) $X^2 - 11$;

(b) $X^4 - 2$;

(c) $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4$. (Hinweis: $P(-2)$.)

(Hinweis: Zu Beginn von Beispiel 2.11 wurde auch ein Zerfällungskörper in der Form bestimmt, wie es hier gefordert wird; Sie können sich an der dortigen Diskussion orientieren.)

3.2. *(Grade von Zerfällungskörpern)* (4 Punkte)
Sei K ein Körper und $P \in K[X]$ ein (nicht notwendigerweise irreduzibles) Polynom vom Grad n, sowie $\iota\colon K \to L$ ein Zerfällungskörper von P.

(a) Zeigen Sie, dass $[L : K]$ ein Teiler von $n!$ ist.
(Hinweis: Schreiben Sie $L = K(x_1, \ldots, x_n)$ mit den Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ von P in L und führen Sie eine Induktion; Betrachten Sie hierzu die Körpererweiterungen $K \to K(x_n)$ und $L/K(x_n)$.)

(b) Belegen Sie anhand zweier Beispiele, dass sowohl der Fall $n < [L : K] < n!$, wie auch der Fall $[L : K] = n!$ eintreten können. (Hinweis: Aufgabe 3.1.)

3.3. *(Eindeutigkeit des algebraischen Abschlusses)* (4 Punkte)
Beweisen Sie Proposition 2.15: *Je zwei algebraische Abschlüsse von K sind K-isomorph.*
(Hinweis: Sind $\iota_{\mathrm{a}}\colon K \to K^{\mathrm{a}}$ und $\iota\colon K \to L$ zwei algebraische Abschlüsse von K, so können Sie Lemma 2.13 benutzen, um einen K-Homomorphismus $j\colon L \to K^{\mathrm{a}}$ zu finden und anschließend zeigen, dass dieser surjektiv ist. Dafür kann man zu $x \in K^{\mathrm{a}}$ das Minimalpolynom m_x von x über L anschauen und dann $j^* m_x$ betrachten.)

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen am 24.10.2019 um 12:15 Uhr vor der Vorlesung. Bitte versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Sie dürfen auch zu zweit abgeben. Mehrere Blätter sind zu tackern. Mehr Informationen finden Sie auf der Webseite zur Vorlesung:
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2019-w-algebra.html`