Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Wintersemester 2019/20
Graz, den 24.10.2019

4. Übung zur Algebra

4.1. *(Transzendente Erweiterungen, II)* (4 Punkte)
Wir betrachten die Körpererweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$. Sei $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ transzendent über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{B} = \{x\}$ eine Transzendenzbasis von $L = \mathbb{Q}(x, i)$ ist. Geben Sie überdies eine weitere Transzendenzbasis $\mathscr{B}'$ von L an derart, dass *keiner* der beiden Körper $\mathbb{Q}(\mathscr{B})$ und $\mathbb{Q}(\mathscr{B}')$ im jeweils anderen enthalten ist.

4.2. *(Separabilitätsgrad und Konstruktion von K-Homomorphismen)* (4 Punkte)
Betrachten Sie den Teilkörper $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$ der Körpererweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$, sowie den Körper $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$ aus Aufgabe 2.3. Bei der Erweiterung $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ handelt es sich um einen algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$. (Das müssen Sie hier nicht zeigen; Das können wir bei der Besprechung der Aufgaben thematisieren.)

(a) Bestimmen Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$, sowie den Separabilitätsgrad $[L : \mathbb{Q}]_{\mathrm{s}}$.

(b) Geben Sie alle $\mathbb{Q}$-Homomorphismen $L \to \mathbb{A}$ an.
(Hinweis: Anhand der vorangegangenen Teilaufgabe sollte Ihnen klar sein, wie viele $\mathbb{Q}$-Homomorphismen Sie finden müssen. Nun können Sie diese durch schrittweise Fortsetzung von $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{A}$ konstruieren.—Eine dafür geeignete Vorgehensweise kennen Sie bereits aus Beispiel 2.11.)

(c) Wie viele $\mathbb{Q}$-Automorphismen $L \to L$ gibt es? Geben Sie diese an!

4.3. *(Grad und Separabilitätsgrad)* (4 Punkte)
Es sei $\iota : K \to L$ eine Körpererweiterung mit $[L : K] < \infty$.

(a) Seien $x_1, x_2 \in L$ beliebige Elemente. Zeigen Sie, dass der Separabilitätsgrad der *Multiplikationsformel* $[K(x_1, x_2) : K]_{\mathrm{s}} = [K(x_1, x_2) : K(x_1)]_{\mathrm{s}} \cdot [K(x_1) : K]_{\mathrm{s}}$ genügt.
(Hinweis: Sei $\iota_{\mathrm{a}} : K \to K^{\mathrm{a}}$ ein algebraischer Abschluss von K. Identifizieren Sie K-Homomorphismen $j : K(x_1, x_2) \to K^{\mathrm{a}}$ mit Paaren $(x_1^*, x_2^*) \in K^{\mathrm{a}} \times K^{\mathrm{a}}$, wobei x_1^* eine Nullstelle in K^{a} des Minimalpolynoms von x_1 über K und x_2^* eine Nullstelle in K^{a} des Minimalpolynoms von x_2 über $K(x_1)$ sei.—Im letzten Fall ist K^{a} mittels $j|_{K(x_1)}$ als Körpererweiterung von $K(x_1)$ aufzufassen.)

(b) Beweisen Sie Proposition 3.3: *Es gilt $[L : K]_{\mathrm{s}} \leq [L : K]$ und $\iota : K \to L$ ist genau dann separabel wenn hierin Gleichheit gilt.*
(Hinweis: Führen Sie mittels der ersten Teilaufgabe einen Induktionsbeweis.)

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen am 31.10.2019 um 12:15 Uhr vor der Vorlesung. Bitte versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Sie dürfen auch zu zweit abgeben. Mehrere Blätter sind zu tackern. Mehr Informationen finden Sie auf der Webseite zur Vorlesung:
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2019-w-algebra.html`