Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Wintersemester 2019/20
Graz, den 31.10.2019

5. Übung zur Algebra

5.1. *(Separabilität prüfen)* (4 Punkte)

(a) Untersuchen Sie jeweils für welche $n \in \mathbb{N}_0$ die folgenden Polynome separabel sind.

$$X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X], \quad X^n - 1 \in \mathbb{F}_4[X], \quad X^n + X^2 \in \mathbb{C}[X].$$

(b) Betrachten Sie für jedes der obigen Polynome $P_n \in K[X]$ jeweils einen Zerfällungskörper $\iota : K \to L$. Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ ist dieser jeweils separabel?
(Hinweis: Die Antwort ist vielleicht überraschend kurz—siehe Bemerkung 3.8.)

5.2. *(Galois-Hülle)* (4 Punkte)
Es sei $\iota : K \to L$ eine separable Körpererweiterung.

(a) Zeigen Sie, dass es eine separable Körpererweiterung $L \to L^{\mathrm{g}}$ gibt derart, dass deren Verkettung mit ι eine normale, separable Körpererweiterung $\iota_{\mathrm{g}} : K \to L^{\mathrm{g}}$ stiftet.
(Hinweis: Falls ι nicht bereits normal ist, "fehlen" in L laut Satz 3.9 gewissermaßen noch Elemente. Diese braucht man bloß noch hinzuadjungieren, um Normalität herzustellen, und sich überlegen, dass einem dabei die Separabilität nicht abhanden kommt.)

(b) Zeigen Sie: Hat $\iota : K \to L$ endlichen Grad, so kann die Erweiterung $L \to L^{\mathrm{g}}$ auch mit endlichem Grad gewählt werden.

(c) Seien $K \subseteq L$ nun Teilkörper eines algebraisch abgeschlossenen Körpers K^{a}. Begründen sie kurz, dass man L^{g} in der vorherigen Teilaufgabe ebenfalls als Teilkörper von K^{a} wählen kann, der K und L enthält.
(Hinweis: Hier ist *fast* nichts zu tun; Die Aufgabe soll nur noch mal das generelle Prinzip verdeutlichen, dass man viele nützliche Konstruktionen auch innerhalb eines zuvor fixierten algebraischen Abschlusses durchführen kann, ohne diesen verlassen zu müssen.)

(Bemerkung: Ist die obige Körpererweiterung $L \to L^{\mathrm{g}}$ minimal in dem Sinne, dass kein echter Zwischenkörper von $L \to L^{\mathrm{g}}$ die Rolle von L^{g} einnehmen kann, so nennt man $L \to L^{\mathrm{g}}$ die *Galois-Hülle von* $\iota : K \to L$.)

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen am 07.11.2019 um 12:15 Uhr vor der Vorlesung. Bitte versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Sie dürfen auch zu zweit abgeben. Mehrere Blätter sind zu tackern. Mehr Informationen finden Sie auf der Webseite zur Vorlesung:
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2019-w-algebra.html`

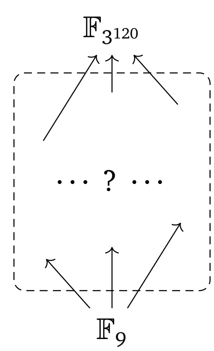
5.3. *(Normalität prüfen)* (4 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_{81}$ ein endlicher Körper mit genau 81 Elementen. Betrachten Sie die offensichtliche Körpererweiterung $\mathbb{F}_{81} \to L$ mit $L = \mathrm{Quot}(\mathbb{F}_{81}[T])$, sowie deren Zwischenkörper $K = \mathbb{F}_{81}(T^{10}) \subseteq L$. Zeigen Sie, dass die Erweiterung L/K normal ist.
(Hinweis: Sie haben schon mehrfach Polynome der Bauart $X^n - a$ faktorisiert.—Wie sahen diese Faktorisierungen aus? Gegebenenfalls hilft es, sich darauf zu berufen, dass die Einheitengruppe $\mathbb{F}_{81}^{\times}$ zyklisch ist.)

5.4. *(Zwischenkörperverband von $\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q$)* (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie die letzte Aussage von Satz 4.8: *Seien q eine Primzahlpotenz und n, k natürliche Zahlen. Genau dann hat $\mathbb{F}_{q^n}$ einen—und dann auch nur einen—zu $\mathbb{F}_{q^k}$ $\mathbb{F}_q$-isomorphen Teilkörper, wenn k ein Teiler von n ist.*

(b) Zeichnen Sie ein Diagramm, welches alle Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{F}_{3^{120}}/\mathbb{F}_9$ zeigt und mit den zugehörigen Körpergraden annotiert ist (wie in Beispiel 4.9):



(Hinweis: Ihr Diagramm sollte—einschließlich $\mathbb{F}_9$ und $\mathbb{F}_{3^{120}}$—insgesamt zwölf Zwischenkörper enthalten.)

Wichtige Bemerkung: Von den obigen vier Aufgaben werden *nur die besten drei* bewertet. Sie können auf diesem Übungsblatt also maximal $3 \times 4 = 12$ Punkte erreichen.