TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2019/20
Graz, den 07.11.2019

6. Übung zur Algebra

6.1. *(Minimalpolynome via Galois-Gruppen)* (4 Punkte)
Es sei L/K eine Galois-Erweiterung und $x \in L$ beliebig. Ferner sei $U = \mathrm{Gal}(L/K(x))$, sowie $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Für $\sigma \in G$ sei $\sigma U = \{\sigma \circ \tau : \tau \in U\}$ die Linksnebenklasse von U bezüglich σ. Zeigen Sie:

(a) Der Wert $\sigma(x)$ ist unabhängig vom Repräsentant σ von σU.

(b) Das Polynom $\prod_{\sigma U}(X - \sigma(x))$ ist das Minimalpolynom m_x von x über K, wobei das Produkt über alle verschiedenen Linksnebenklassen σU zu erstrecken ist.

(c) Es gilt $\prod_{\sigma \in G}(X - \sigma(x)) = m_x^{[L:K(x)]}$.

6.2. *(Primitive Elemente in abelschen Galois-Erweiterungen)* (4 Punkte)

(a) Sei L/K eine Galois-Erweiterung mit abelscher Galois-Gruppe. Ferner sei L Zerfällungskörper des irreduziblen Polynoms $P \in K[X]$. Zeigen Sie: Für jede Nullstelle x von P in L ist $L = K(x)$. (Hinweis: Benutzen Sie Satz 5.3 (3).)

(b) Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung 6 gibt, nämlich eine zyklische Gruppe und die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_3 = \mathrm{Sym}(\{1,2,3\})$. (Hinweis: Hier ist Ihr Wissen zur Gruppentheorie aus der *Einführung in die Algebra* gefragt. Benutzen Sie davon, was Sie für richtig halten, solange dabei ein Beweis entsteht, der nachvollziehbar ist und über die Bemerkung "*trivial, da in Vorlesung erwähnt*" hinausgeht.)

(c) Sei $L = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{C}$ mit $\zeta = \exp(2\pi i/3)$. Folgern Sie aus den vorherigen beiden Teilaufgaben $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_3$.

6.3. *($X^3 - 2$ und Galois-Gruppen)* (4 Punkte)
Betrachten Sie die Körpererweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ und den darin enthaltenen Zerfällungskörper L von $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Bestimmen Sie *alle* Zwischenkörper von $L/\mathbb{Q}$ und fertigen Sie wie in Beispiel 4.9 ein Diagramm an, welches sämtliche Zwischenkörper von $L/\mathbb{Q}$ und die Teilmengeninklusionen zwischen diesen verdeutlicht.

(b) Annotieren Sie dieses Diagramm mit den Graden der dabei entstehenden Körpererweiterungen.

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen am 14.11.2019 um 12:15 Uhr vor der Vorlesung. Bitte versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Sie dürfen auch zu zweit abgeben. Mehrere Blätter sind zu tackern. Mehr Informationen finden Sie auf der Webseite zur Vorlesung:
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2019-w-algebra.html`

(c) Markieren Sie auch, bei welchen der auftretenden Erweiterungen es sich um Galois-Erweiterungen handelt.

(Hinweis: Aus Aufgabe 6.2 (c) wissen Sie $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathfrak{S}_3$. Benutzen Sie die Galois-Korrespondenz.)