TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2019/20
Graz, den 14.11.2019

7. Übung zur Algebra

7.1. *(Erzeugen von $\mathfrak{S}_5$)* (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_5$ von der Transposition $\tau = (1\ 2)$ und dem 5-Zykel $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ erzeugt wird: $\mathfrak{S}_5 = \langle \tau, \sigma \rangle$.
(Hinweis: Benutzen Sie, dass $\mathfrak{S}_5$ von allen Transpositionen erzeugt wird; Konjugieren Sie einen der beiden Zykel wiederholt mit dem anderen, um mehr Transpositionen zu erhalten und konjugieren Sie anschließend bereits erhaltene Transpositionen miteinander.)

7.2. *(Der Translationssatz)* (4 Punkte)
Es seien L und M seien beide Zwischenkörper einer Körpererweiterung eines Körpers K. Ferner sei L/K eine Galois-Erweiterung und LM der Körper, welcher von allen Produkten von Elementen von L und M erzeugt wird. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Erweiterung LM/M ist eine Galois-Erweiterung.

(b) Die Abbildung $\Psi\colon \mathrm{Gal}(LM/M) \to \mathrm{Gal}(L/(L \cap M))$, $\sigma \mapsto (\sigma|_L)$ ist wohl-definiert. Bei dieser handelt es sich außerdem um einen Gruppenisomorphismus; Insbesondere ist $\mathrm{Gal}(LM/M) \cong \mathrm{Gal}(L/(L \cap M))$.
(Hinweis: Zum Nachweis der Surjektivität von Ψ können Sie $\mathrm{Fix}(\Psi(\mathrm{Gal}(LM/M))) = L \cap M$ zeigen, und anschließend die Galois-Korrespondenz benutzen.)

Man veranschaulicht sich die Situation der aus der vorliegenden Aufgabe üblicherweise an folgendem Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
& & LM & & \\
& & & \mathrm{Gal}(LM/M) \arrow[ul] \arrow[ddll, dashed, "\sim"', "\Psi"] & \\
L \arrow[uurr] & & & & M . \arrow[ul, dash] \\
& \mathrm{Gal}(L/(L\cap M)) \arrow[ul] & & & \\
& & L \cap M \arrow[ul, dash] \arrow[uurr] & & \\
& & K \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen am 20.11.2019 um 12:15 Uhr vor der Vorlesung. Bitte versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Sie dürfen auch zu zweit abgeben. Mehrere Blätter sind zu tackern. Mehr Informationen finden Sie auf der Webseite zur Vorlesung:
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2019-w-algebra.html`

7.3. *(Die Diskriminante)* (4 Punkte)

Es sei L/K ein Zerfällungskörper eines normierten separablen Polynoms $P \in K[X]$ und $P = \prod_{j=1}^{n}(X - x_j)$ mit geeigneten Elementen $x_1, \ldots, x_n \in L$. Die *Diskriminante* $\mathrm{disc}(P)$ *von* P ist definiert durch

$$\mathrm{disc}(P) = (\Delta(P))^2, \quad \text{mit} \quad \Delta(P) = \prod_{1 \le j < k \le n} (x_j - x_k).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{disc}(P)$ ein Element von K ist. (Hinweis: Satz 5.3 (1).)

(b) Die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(P) = \mathrm{Gal}(L/K)$ operiert bekanntlich treu auf den Nullstellen von P, was einen Isomorphismus von $\mathrm{Gal}(P)$ auf eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ stiftet. Der Körper K habe Charakteristik $\neq 2$. Zeigen Sie, dass diese Untergruppe genau dann in der alternierenden Gruppe in $\mathrm{Sym}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ enthalten ist, wenn $\mathrm{disc}(P)$ ein Quadrat in K ist.
(Hinweis: Der Zusatz "in K" im letzten Satz ist ausschlaggebend. Zeigen Sie, dass $\Delta(P)$ genau dann von einem Element von $\mathrm{Gal}(P)$ fixiert wird, wenn dieses eine Permutation mit positivem Vorzeichen auf $\{x_1, \ldots, x_n\}$ bewirkt. Die Forderung an die Charakteristik von K stellt $\Delta(P) \neq -\Delta(P)$ sicher.)

(c) Interessanterweise kann man die Diskriminante eines Polynoms anhand von dessen Koeffizienten berechnen *ohne* die Nullstellen des Polynoms zu bestimmen, z.B.

$$\mathrm{disc}(X^3 + bX^2 + cX + d) = b^2c^2 - 4c^3 - 4b^3d - 27d^2 + 18bcd \quad (\text{für } b, c, d \in K).$$

Benutzen Sie dies in Kombination mit Bemerkung 5.14, um die Galois-Gruppen der kubischen Polynome

$$P_1 = X^3 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X] \quad \text{und} \quad P_2 = X^3 - 3X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

bis auf Isomorphie zu bestimmen.
(Hinweis: Es ist hier *nicht* nötig oder gefordert, die fraglichen Polynome zu faktorisieren oder gar die Elemente der Galois-Gruppen explizit zu konstruieren. Ebenfalls ist es nicht gefordert, die angegebene Formel für die Diskriminante zu beweisen.)

Wichtige Bemerkung: Am Donnerstag, den 21.11.2019, entfällt die Vorlesung. Bitte geben Sie Ihre Lösung für dieses Blatt daher bereits am Mittwoch, den 20.11.2019, um 16:15 Uhr, vor der Vorlesung ab.