

7. Übung zur Algebra

7.1. (Erzeugen von \mathfrak{S}_5) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_5 von der Transposition $\tau = (1\ 2)$ und dem 5-Zykel $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ erzeugt wird: $\mathfrak{S}_5 = \langle \tau, \sigma \rangle$.

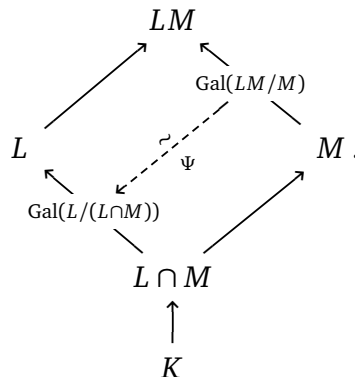
(Hinweis: Benutzen Sie, dass \mathfrak{S}_5 von allen Transpositionen erzeugt wird; Konjugieren Sie einen der beiden Zykeln wiederholt mit dem anderen, um mehr Transpositionen zu erhalten und konjugieren Sie anschließend bereits erhaltene Transpositionen miteinander.)

7.2. (Der Translationssatz) (4 Punkte)

Es seien L und M seien beide Zwischenkörper einer Körpererweiterung eines Körpers K . Ferner sei L/K eine Galois-Erweiterung und LM der Körper, welcher von allen Produkten von Elementen von L und M erzeugt wird. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- Die Erweiterung LM/M ist eine Galois-Erweiterung.
- Die Abbildung $\Psi: \text{Gal}(LM/M) \rightarrow \text{Gal}(L/(L \cap M)), \sigma \mapsto (\sigma|_L)$ ist wohl-definiert. Bei dieser handelt es sich außerdem um einen Gruppenisomorphismus; Insbesondere ist $\text{Gal}(LM/M) \cong \text{Gal}(L/(L \cap M))$.
 (Hinweis: Zum Nachweis der Surjektivität von Ψ können Sie $\text{Fix}(\Psi(\text{Gal}(LM/M))) = L \cap M$ zeigen, und anschließend die Galois-Korrespondenz benutzen.)

Man veranschaulicht sich die Situation der aus der vorliegenden Aufgabe üblicherweise an folgendem Diagramm:



7.3. (Die Diskriminante)

(4 Punkte)

Es sei L/K ein Zerfällungskörper eines normierten separablen Polynoms $P \in K[X]$ und $P = \prod_{j=1}^n (X - x_j)$ mit geeigneten Elementen $x_1, \dots, x_n \in L$. Die *Diskriminante* $\text{disc}(P)$ von P ist definiert durch

$$\text{disc}(P) = (\Delta(P))^2, \quad \text{mit} \quad \Delta(P) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_j - x_k).$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\text{disc}(P)$ ein Element von K ist. (Hinweis: Satz 5.3 (1).)
- (b) Die Galois-Gruppe $\text{Gal}(P) = \text{Gal}(L/K)$ operiert bekanntlich treu auf den Nullstellen von P , was einen Isomorphismus von $\text{Gal}(P)$ auf eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\text{Sym}(\{x_1, \dots, x_n\})$ stiftet. Der Körper K habe Charakteristik $\neq 2$. Zeigen Sie, dass diese Untergruppe genau dann in der alternierenden Gruppe in $\text{Sym}(\{x_1, \dots, x_n\})$ enthalten ist, wenn $\text{disc}(P)$ ein Quadrat in K ist.
(Hinweis: Der Zusatz "in K " im letzten Satz ist ausschlaggebend. Zeigen Sie, dass $\Delta(P)$ genau dann von einem Element von $\text{Gal}(P)$ fixiert wird, wenn dieses eine Permutation mit positivem Vorzeichen auf $\{x_1, \dots, x_n\}$ bewirkt. Die Forderung an die Charakteristik von K stellt $\Delta(P) \neq -\Delta(P)$ sicher.)
- (c) Interessanterweise kann man die Diskriminante eines Polynoms anhand von dessen Koeffizienten berechnen *ohne* die Nullstellen des Polynoms zu bestimmen, z.B.

$$\text{disc}(X^3 + bX^2 + cX + d) = b^2c^2 - 4c^3 - 4b^3d - 27d^2 + 18bcd \quad (\text{für } b, c, d \in K).$$

Benutzen Sie dies in Kombination mit Bemerkung 5.14, um die Galois-Gruppen der kubischen Polynome

$$P_1 = X^3 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X] \quad \text{und} \quad P_2 = X^3 - 3X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

bis auf Isomorphie zu bestimmen.

(Hinweis: Es ist hier *nicht* nötig oder gefordert, die fraglichen Polynome zu faktorisieren oder gar die Elemente der Galois-Gruppen explizit zu konstruieren. Ebenfalls ist es nicht gefordert, die angegebene Formel für die Diskriminante zu beweisen.)

Wichtige Bemerkung: Am Donnerstag, den 21.11.2019, entfällt die Vorlesung. Bitte geben Sie Ihre Lösung für dieses Blatt daher bereits am Mittwoch, den 20.11.2019, um 16:15 Uhr, vor der Vorlesung ab.