TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2019/20
Graz, den 21.11.2019

8. Übung zur Algebra

8.1. *(Galois-Gruppen bestimmen)* (4 Punkte)
Betrachten Sie das Polynom $P = X^5 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und dessen Zerfällungskörper $L = \mathbb{Q}(\varrho, \zeta) \subset \mathbb{C}$ mit $\varrho = \sqrt[5]{2}$ und $\zeta = \exp(2\pi i/5)$.

(a) Zeigen Sie $[L : \mathbb{Q}] = 20$ und konstruieren Sie alle Elemente von $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

(b) Zeichnen Sie die Operation der Galoisgruppe G auf $V(P) = \{\zeta^\nu \varrho : \nu \in \mathbb{Z}\}$. Benutzen Sie hierzu folgende Vorlage:
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/downloads/2019-w-algebra-X5minus2.pdf`
(Hinweis: Sobald Sie das Abbildungsverhalten eines Elements $f \in G$ kennen, können Sie natürlich leicht $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, usw. bestimmen, und sich dadurch Rechenaufwand sparen.)

(c) Bestimmen Sie den Isomorphietyp von G.
(Korrektur vom 25.11.2019: Mit Blick auf Bemerkung 5.14 kommt hier nur eine Gruppe in Frage.)

(d) Wählen Sie exemplarisch eine (nicht-triviale!) Untergruppe U von G und bestimmen Sie den zugehörigen Fixkörper $\mathrm{Fix}(U)$.
(Hinweis: Sie können wie in Beispiel 5.15 vorgehen.)

8.2. *(A_n ist einfach für $n \geq 5$)* (4 Punkte)
Es bezeichne A_n die alternierende Gruppe in $\mathfrak{S}_n = \mathrm{Sym}(\{1, \ldots, n\})$. Zeigen Sie:

(a) Für $n \geq 3$ wird A_n von den 3-Zykeln erzeugt.
(Hinweis: Benutzen Sie die aus der *Einführung in die Algebra* bekannte *Zykelzerlegung* in Transpositionen. Welche Zykel entstehen als das Produkt zweier Transpositionen?)

(b) Für $n \geq 5$ sind alle 3-Zykel konjugiert in A_n.
(Hinweis: Die fragliche Konjugiertheit in $\mathfrak{S}_n$ ist *a-priori* einfacher einzusehen. Kann man daraus nun die Konjugiertheit in A_n gewinnen? Beachten Sie, dass die Voraussetzung $n \geq 5$ einem zu jedem 3-Zykel zwei permutierbare Zahlen zur Verfügung stellt, die nicht in selbigem 3-Zykel vorkommen.)

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen am 28.11.2019 um 12:15 Uhr vor der Vorlesung. Bitte versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Sie dürfen auch zu zweit abgeben. Mehrere Blätter sind zu tackern. Mehr Informationen finden Sie auf der Webseite zur Vorlesung:
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2019-w-algebra.html`

(c) Für $n \geq 5$ ist A_n einfach.
(Hinweis: Sei $N \neq \{\mathrm{id}_{\{1,\dots,n\}}\}$ ein Normalteiler von A_n. Betrachten Sie ein Element $\sigma \neq \mathrm{id}_{\{1,\dots,n\}}$ von N, welches maximal viele Elemente von $\{1,\dots,n\}$ fixiert, und zeigen Sie dann, dass σ ein 3-Zykel sein muss. Hierbei hilft es erneut, in disjunkte Zykel zu zerlegen. Benutzen Sie anschließend die vorangegangenen Teilaufgaben, um $N = A_n$ zu folgern.)

8.3. *(Konstruierbarkeit von regelmäßigen n-Ecken)* (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass das regelmäßige n-Eck $\{\exp(2\pi i\,\nu/n) : \nu \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{C}$ genau dann mit Zirkel und Lineal aus den Punkten 0 und 1 konstruierbar ist, wenn $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz ist.
(Hinweis: Sie können den Beweis von Korollar 5.22 übertragen. Beachten Sie jedoch, dass $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ nicht immer zyklisch ist [z.B. für $n = 8$]. Das macht die Konstruktion des benötigten Körperturms etwas komplizierter.)

(Bemerkung: Man kann zeigen, dass $\varphi(n)$ genau dann eine Zweierpotenz ist, wenn n von der Form $n = 2^\nu p_1 \cdots p_t$ mit verschiedenen Fermat-Primzahlen $p_1, \dots, p_t$ ist. Eine *Fermat-Primzahl* ist eine Primzahl der Form $2^{\nu'} + 1$; Man kann zeigen, dass ν' dann selbst eine Zweierpotenz sein muss und bisher sind nur fünf Fermat-Primzahlen bekannt. Eine offene Vermutung besagt, dass es keine weiteren Fermat-Primzahlen gibt.)