TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2019/20
Graz, den 28.11.2019

9. Übung zur Algebra

9.1. *(Beipiele für (nicht-)auflösbare Gruppen)* (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Gruppen auflösbar sind:

(1) Alle abelschen Gruppen G;

(2) Alle Diedergruppen D_{2n} ($n \in \mathbb{N}$);

(3) Alle symmetrischen Gruppen $\mathfrak{S}_k$ mit $1 \leq k \leq 4$.

(Hinweis: Hier ist es gegebenenfalls schneller direkt mit der Definition zu arbeiten, anstatt Kommutatorgruppen zu berechnen. Bei $\mathfrak{S}_4$ muss man ein wenig nachdenken, kommt aber auch ohne viel Rechenarbeit zum Ziel.)

(b) Beweisen Sie Satz 5.30: *Für $n \geq 5$ ist die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ nicht auflösbar.* (Hinweis: Ist $N \lhd \mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{S}_n/N$ abelsch, so benutzen Sie

$$(1\ 2\ 3) \circ (3\ 4\ 5) \circ (1\ 2\ 3)^{-1} \circ (3\ 4\ 5)^{-1} = (1\ 4\ 3),$$

um $(1\ 4\ 3) \in N$ einzusehen. Zeigen Sie auf ähnliche Weise, dass N alle 3-Zykel enthält. Folgern Sie hieraus $N = A_n$. Wie folgt dann, dass $\mathfrak{S}_n$ nicht auflösbar ist?)

9.2. *(Verträglichkeit von Auflösbarkeit mit diversen Gruppentheorie-Konzepten)* (4 Punkte)
Beweisen Sie Korollar 5.27: *Untergruppen auflösbarer Gruppen sind auflösbar und homomorphe Bilder von auflösbaren Gruppen sind auflösbar (d.h. ist $\psi : G \to H$ ein Grupperhomomorphismus, und G auflösbar, so ist auch* $\operatorname{im}\psi$ *auflösbar). Ist G eine Gruppe mit auflösbarem Normalteiler N und auflösbarer Quotientengruppe G/N, so ist auch G auflösbar.*

9.3. *(Radikalerweiterungen und Auflösbarkeit; qualitativ)* (4 Punkte)
Alle Adjunktionen in der folgenden Aufgabe sind bezüglich der Körpererweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ zu verstehen. Für jede komplexe Zahl z sei $\sqrt[3]{z}$ eine beliebige Kubikwurzel von z. (Zur Erinnerung: Für $z \neq 0$ haben Sie drei verschiedene Möglichkeiten für „$\sqrt[3]{z}$“. Hier geht es nur darum, sich darauf geeinigt zu haben, bei mehrfachem Auftreten von $\sqrt[3]{z}$ stets *dieselbe* Zahl zu meinen.) Das irreduzible Polynom $P = X^6 - 2X^3 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ hat in $\mathbb{C}$ die sechs Nullstellen $\zeta^{2k}\sqrt[3]{1 \pm \sqrt{2}}$ ($k = 1, 2, 3$) mit $\zeta = \exp(2\pi i/6)$ und bei $R/\mathbb{Q}$ mit $R = \mathbb{Q}(x_1)$ und

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen am 05.12.2019 um 12:15 Uhr vor der Vorlesung. Bitte versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Sie dürfen auch zu zweit abgeben. Mehrere Blätter sind zu tackern. Mehr Informationen finden Sie auf der Webseite zur Vorlesung:
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2019-w-algebra.html`

$x_1 = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ handelt es sich um eine Radikalerweiterung, denn wir haben $R = \mathbb{Q}(x_0, x_1)$ mit $x_0 = \sqrt{2}$ und

$$x_0^6 = 8 \in \mathbb{Q} \quad \text{und} \quad x_1^6 = 3 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(x_0).$$

Nun sei $L/\mathbb{Q}$ mit $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $(X^6 - 1)P$.

(a) Verfahren Sie *wie im Beweis von Lemma 5.28* und konstruieren Sie einen Körperturm (mit zugehörigem Turm von Galois-Gruppen) der Form

$$\begin{tikzcd}
L \\
\text{(mehrere Zwischenschritte)} \arrow[u, dashed] \\
\mathbb{Q}(\zeta, \sqrt{2}) \arrow[u, dashed] \\
\mathbb{Q}(\zeta) \arrow[u, "\text{Grad?}"] \\
\mathbb{Q} \arrow[u, "\text{Grad?}"]
\end{tikzcd}$$

wobei in jedem „Schritt $K \to K(x)$" nur ein Element $x \in L$ mit $x^6 \in K$ adjungiert werden soll. Bei der Betrachtung der Liste „$x_{j,1}, x_{j,2}, \ldots, x_{j,n}$" (in der Notation aus dem Beweis von Lemma 5.28) dürfen Sie Wiederholungen vermeiden, um unnötig viele triviale (Grad 1) Schritte in Ihrem Turm zu vermeiden.

(b) Bestätigen Sie ohne Lemma 5.24, dass für jedem Ihrer Schritte $K \to K(x)$ die zugehörige Faktorgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)/\mathrm{Gal}(L/K(x))$ abelsch ist.
(Hinweis: Betrachten Sie $[K(x) : K]$; Damit, und zusammen mit Ihrer Kenntnis kleiner Gruppen, sollte die Frage schon fast banal sein.)

9.4. *(Radikalerweiterungen und Auflösbarkeit; explizit)* (4 Punkte)
Wir behalten die Notation aus Aufgabe 9.3 bei.

(a) Sei $L'/\mathbb{Q}$ mit $L' \subseteq L$ Zerfällungskörper von P. Zeigen Sie $L' = L$ und folgern Sie, dass $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ *treu* auf den Nullstellen von P operiert.

(b) Bestimmen Sie $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, indem Sie feststellen, welche Permutationen der Nullstellen von P durch G bewirkt werden können.
(Hinweis: Sie können ähnlich wie in Aufgabe 8.1 (a) vorgehen. Am Schluss sollten Sie sehen, dass G isomorph zur Diedergruppe D_{12} mit 12 Elementen ist.)

(c) Berechnen Sie zu Ihrem Körperturm aus Aufgabe 9.4 für jeden darin enthaltenen Körper Z auch die zugehörige Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L/Z)$ in dem Sinne, dass Sie feststellen, welche Permutationen der Nullstellen von P von $\mathrm{Gal}(L/Z) \leq G$ bewirkt werden können.

Wichtige Bemerkung: Das aktuelle Blatt erhöht die zur Notenberechnung herangezogene Gesamtpunktzahl nur um $3 \times 4 = 12$ Punkte, Sie können aber bis zu 16 Punkte erreichen.