

## 10. Übung zur Algebra

**10.1. (Untermodulverband eines Hauptidealbereichs)** (4 Punkte)

Es sei  $R$  ein Hauptidealbereich, der mit seiner Ringmultiplikation als Skalarmultiplikation als  $R$ -Modul aufgefasst werde. Sei  $\mathfrak{a} \subseteq R$  ein Ideal. In analoger Weise wird  $R/\mathfrak{a}$  zu einem  $R/\mathfrak{a}$ -Modul und mittels Bemerkung 6.6 angewandt auf den kanonischen Ringhomomorphismus  $R \rightarrow R/\mathfrak{a}$ ,  $r \mapsto r + \mathfrak{a}$ , wird  $R/\mathfrak{a}$  zu einem  $R$ -Modul.

Nun sei  $\mathfrak{a} = aR$  mit einem Element  $a \in R$  und  $M$  ein  $R$ -Untermodul von  $R/\mathfrak{a}$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Es gibt einen Teiler  $b \in R$  von  $a$  mit  $M = \{x + \mathfrak{a} \in R/\mathfrak{a} : x \in R, b \text{ teilt } x\}$ .
- (b) Mit  $b$  wie in der vorherigen Teilaufgabe und  $\mathfrak{c} = (a/b)R$  sind die  $R$ -Moduln  $M$  und  $R/\mathfrak{c}$  isomorph.

**10.2. ( $K[X]$ -Moduln)** (4 Punkte)

Es sei  $K$  ein Körper. Betrachten Sie die beiden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1_K & 1_K \\ 0_K & (1_K + 1_K + 1_K) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $A$  liefert auf dem  $K$ -Vektorraum  $V = K^2$  eine  $K[X]$ -Modulstruktur mittels

$$K[X] \times V \longrightarrow V, \quad (P, v) \longmapsto P(A) \cdot v,$$

wobei  $P(A) \in K^{2 \times 2}$  durch Einsetzen von  $A$  in das Polynom  $P$  gegeben sei, und  $P(A) \cdot v$  die Matrix-Vektor-Multiplikation bezeichne. Wir nennen den so erhaltenen  $K[X]$ -Modul  $V_A$ . Analog sei  $V_B$  definiert. (Beachten Sie, dass  $V_A$  und  $V_B$ )

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Für  $K = \mathbb{Q}$  sind  $V_A$  und  $V_B$  (als  $K[X]$ -Moduln) isomorph.
- (b) Für  $K = \mathbb{F}_2$  sind  $V_A$  und  $V_B$  (als  $K[X]$ -Moduln) *nicht* isomorph.

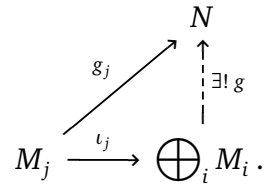
(Hinweis: Mit Blick auf Beispiel 6.3 sollte Ihnen klar werden, dass es sich hier im Kern nur um ein Ähnlichkeitsproblem von Matrizen handelt, welches Sie aus der *linearen Algebra* bereits sehr gut kennen und lösen können. Die eigentliche Aufgabe ist hier vornehmlich, zwischen der bereits bekannten Sprache der linearen Algebra und der Sprache der Modultheorie zu übersetzen.)

10.3. (Direkte Summen von  $R$ -Moduln)

(4 Punkte)

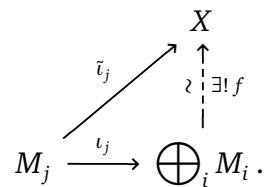
Beweisen Sie die Aussagen (2) und (3) von Satz 6.7: Sei  $(M_i)_i$  eine Familie von  $R$ -Moduln und  $N$  ein  $R$ -Modul.

- (a) Für jede Familie  $(g_i)_i$  von  $R$ -Modulhomomorphismen  $g_i: M_i \rightarrow N$  gibt es genau einen  $R$ -Modulhomomorphismus  $g: \bigoplus_i M_i \rightarrow N$ , der für jeden Index  $j$  das folgende Diagramm kommutativ macht:



Überdies hat man die Formel  $g = \sum_i (g_i \circ \pi_i)$ .

- (b) Ist  $X$  ein  $R$ -Modul zusammen mit  $R$ -Modulhomomorphismen  $\tilde{\iota}_j: M_j \rightarrow X$  derart, dass die Aussage in Aufgabe 10.3 (a) auch für  $X$  statt  $\bigoplus_i M_i$  und  $\tilde{\iota}_j$  statt  $\iota_j$  gilt, so gibt es genau einen(!)  $R$ -Modulisomorphismus  $f: \bigoplus_i M_i \rightarrow X$ , welcher für jeden Index  $j$  das folgende Diagramm kommutativ macht:



(Hinweis: Sie können sich am in der Vorlesung geführten Beweis von Satz 6.7 (1) orientieren.)