TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2019/20
Graz, den 12.12.2019

# 11. Übung zur Algebra

**11.1.** *(Einschränkung der Skalare)* (4 Punkte)
Seien $R$ und $R'$ zwei Ringe und $f : R' \to R$ ein Ringhomomorphismus. Wir fassen einen $R$-Modul $M$ mittels der durch

$$R' \times M \longrightarrow M, \quad (r', x) \mapsto f(r')x \quad \text{(mittels } R\text{-Skalarmultiplikation)}$$

definierten Skalarmultiplikation auch als $R'$-Modul auf. (Siehe Bemerkung 6.6 im Skriptum.) Sei $N$ ein zweiter $R$-Modul, den wir auch vermöge der eben beschriebenen Prozedur als $R'$-Modul auffassen, und sei $\Phi\colon M \to N$ eine beliebige Abbildung auf den zugrundeliegenden *Mengen*. Vergleichen Sie die beiden Aussagen

- "$\Phi$ ist ein $R$-Modulhomomorphismus,"
- "$\Phi$ ist ein $R'$-Modulhomomorphismus."

Impliziert eine davon die andere? Sind beide Begriffe sogar äquivalent? (Geben Sie jeweils entweder einen Beweis, oder konstruieren Sie geeignete Gegenbeispiele!)

**11.2.** *(Direkte Summen von Moduln)* (4 Punkte)
Im Folgenden wird Ihnen jeweils eine rationale 3×3-Matrix $A$ oder $B$ gegeben, welche $V = \mathbb{Q}^3$ (wie in Aufgabe 10.2) mit einer $\mathbb{Q}[X]$-Modulstruktur ausstattet. Wir schreiben dann $V_A$ bzw. $V_B$ für $V$, um auf diese Zusatzstruktur hinzuweisen. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen stimmen (selbstverständlich mit Begründung!):

(a) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $V_A = \mathbb{Q}[X]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{Q}[X]\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$;

(b) Für $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist $V_B = \mathbb{Q}[X]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{Q}[X]\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**11.3.** *(Freie Moduln und Faktormoduln)* (4 Punkte)
Wir betrachten den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}[i] = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in \mathbb{Z}, \operatorname{Im} z \in \mathbb{Z}\}$ der *ganzen gaußschen*

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen am 09.01.2020 um 12:15 Uhr vor der Vorlesung. Bitte versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Sie dürfen auch zu zweit abgeben. Mehrere Blätter sind zu tackern. Mehr Informationen finden Sie auf der Webseite zur Vorlesung:
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2019-w-algebra.html`

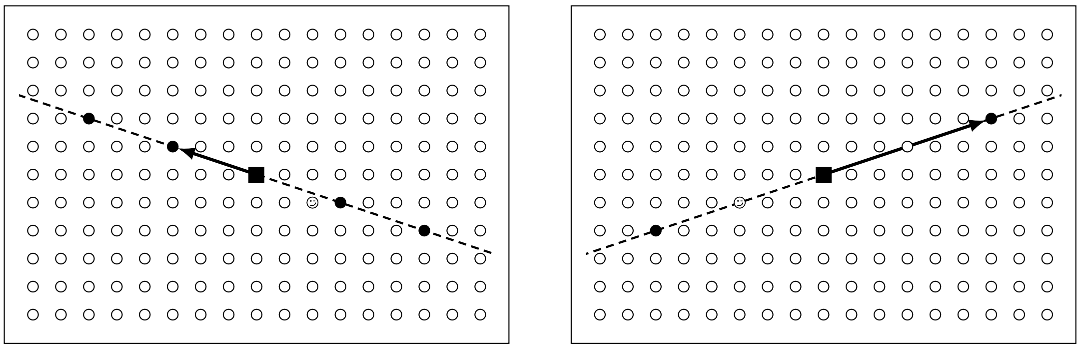
*Zahlen* (mit der offensichtlichen Addition und Skalarmultiplikation), sowie die zwei Untermoduln $U = \mathbb{Z}(-3+i) := \{\,\lambda(-3+i) : \lambda \in \mathbb{Z}\,\}$ und $V = \mathbb{Z}(6+2i)$ von $\mathbb{Z}[i]$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Faktormodul $\mathbb{Z}[i]/U$ frei ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Faktormodul $\mathbb{Z}[i]/V$ *nicht* frei ist.
(Hinweis: Kann in einem freien $\mathbb{Z}$-Modul $M$ die Gleichung $\lambda m = 0_M$ mit $\lambda \in \mathbb{Z}\setminus\{0_{\mathbb{Z}}\}$ und $m \in M \setminus \{0_M\}$ gelten?)

Hinweis: Folgendes ist vielleicht hilfreich:



[Gezeichnet sind die Untermoduln $U$ bzw. $V$ (jeweils schwarze Punkte) im Modul $\mathbb{Z}[i]$ (alle Punkte). Der Nullpunkt ist durch ein Quadrat markiert und die Pfeile deuten jeweils auf $-3+i \in U$ bzw. $6+2i \in V$.]

**11.4.** *(Freie Moduln)* (4 Punkte)

Beweisen Sie Proposition 6.10: *Sei $I$ eine beliebige Menge. Für jeden $R$-Modul $M$ und jede Abbildung $G : I \to M$ gibt es* genau einen *$R$-Modulhomomorphismus $g : R^{(I)} \to M$ mit $g(\boldsymbol{i}) = G(i)$ für alle $i \in I$:*

$$\begin{tikzcd} R^{(I)} \arrow[r, dashed, "\exists!\, g"] & M . \\ I \arrow[u, "i \mapsto \iota_i(1_R)"] \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

*Man hat einen Isomorphismus von abelschen Gruppen*

$$\mathrm{Abb}(I, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(R^{(I)}, M), \quad G \longmapsto g.$$

*Ist $R$ kommutativ, so handelt es sich sogar um $R$-Modulisomorphismen.*
(Hinweis: Im Wesentlichen braucht man sich bloß auf Satz 6.7 (3) berufen. Vermutlich fällt Ihre Lösung hier also sehr kurz aus.)

**Wichtige Bemerkung**: Das aktuelle Blatt erhöht die zur Notenberechnung herangezogene Gesamtpunktzahl nur um $3 \times 4 = 12$ Punkte, Sie können aber bis zu 16 Punkte erreichen.