Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Wintersemester 2019/20
Graz, den 09.01.2020

12. Übung zur Algebra

12.1. *(Artinsche Moduln)* (4 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring. Ein R-Modul M heißt *artinsch*, falls jede fallende Kette $M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots$ von Untermoduln $M_0, M_1, \dots$ von M ab einem gewissen (ggf. von der Kette abhängigen) Index n stationär wird:

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_{n-1} \supseteq M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \dots \quad \text{(ab hier nur noch Gleichheit!)}.$$

(Im Gegensatz zu der Noether-Eigenschaft, wo von aufsteigenden Ketten die Rede ist, geht es hier um absteigende Ketten.) Zeigen Sie:

(a) Für jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ von R-Moduln ist M genau dann artinsch, wenn dies auf M' und M'' zutrifft.
(Hinweis: Sie können sich am Beweis von Proposition 7.2 (1) orientieren.)

(b) Ist der kommutative Ring R als Modul über sich selbst artinsch, so ist jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R ein maximales Ideal.
(Hinweis: Folgern Sie zunächst unter der Annahme, dass R artinsch ist, dass auch der Integritätsbereich $R/\mathfrak{p}$ artinsch ist und betrachten Sie in diesem zu einem Element $x \neq 0_{R/\mathfrak{p}}$ die Kette $\langle x \rangle \supseteq \langle x^2 \rangle \supseteq \langle x^3 \rangle \supseteq \dots$ und folgern Sie, dass x in $R/\mathfrak{p}$ invertierbar ist. Was sagt Ihnen das nun über das Primideal $\mathfrak{p}$?)

12.2. *(Smith Normalform bestimmen, Teil I)* (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Smith-Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$$

d.h. finden Sie ganze Zahlen $d_1, \dots, d_4 \in \mathbb{Z}$ derart, dass es (in $\mathbb{Z}^{4\times4}$) invertierbare Matrizen $S, T \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ mit

$$SAT = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & d_3 & \\ & & & d_4 \end{pmatrix}$$

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen am 16.01.2020 um 12:15 Uhr vor der Vorlesung. Bitte versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Sie dürfen auch zu zweit abgeben. Mehrere Blätter sind zu tackern. Mehr Informationen finden Sie auf der Webseite zur Vorlesung:
https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2019-w-algebra.html

gibt und die Teilbarkeitsbedingung $d_i \mid d_{i+1}$ für $i = 1, 2, 3$ erfüllt ist.
(Hinweis: Der Beweis von Satz 7.5 liefert Ihnen ein Verfahren, welches dem aus der linearen Algebra bekannten Verfahren zur Rangbestimmung einer Matrix ähnelt, und Sie auf die gewünschte Diagonalgestalt bringt. Die in der Vorlesung noch nicht besprochenen Schritte des Beweises können Sie schon jetzt im Vorlesungsskriptum nachlesen.)

12.3. *(Smith Normalform bestimmen, Teil II)* (4 Punkte)
Wir behalten die Notation aus Aufgabe 12.2 bei. Bestimmen Sie zusätzlich zu den Zahlen $d_1, \ldots, d_4$, die Sie in Ihrer Lösung zu Aufgabe 12.2 bestimmt haben, auch zugehörige Matrizen S und T wie in der Angabe von Aufgabe 12.2.
(Hinweis: Betrachten Sie die Blockmatrix $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & A \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{8\times 8}$, wobei $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ die Nullmatrix und $\mathbf{1} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ die Einheitsmatrix bezeichne. Führen Sie an dieser ganzen Matrix nun Umformungen durch, welche den A-Teil auf Smith-Normalform D bringen und erhalten Sie so eine Blockmatrix $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & T \\ S & D \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{8\times 8}$; Die Blöcke S und T sollten nun das Gewünschte leisten.—Können Sie sich das erklären? Einen Spezialfall dieses Verfahrens kennen Sie sicher schon aus der linearen Algebra zur Bestimmung der Inversen einer quadratischen Matrix B mit Einträgen aus einem Körper. Hierbei betrachtet man auch die Blockmatrix $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & B \end{pmatrix}$ und formt mit Zeilenumformungen um, bis aus dem B-Teil die Einheitsmatrix geworden ist. Im Block daneben steht dann bekanntlich die gesuchte Inverse B^{-1}.)

Evaluierung: Bitte denken Sie daran, Vorlesung und Übung auf TUGRAZonline zu bewerten. Dies ist bis zum 1. Februar 2020 möglich.