TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2019/20
Graz, den 16.01.2020

13. Übung zur Algebra

13.1. *(Der Hauptsatz und $\mathbb{Z}$-Moduln)* (4 Punkte)
Betrachten Sie die Untermoduln $U = \mathbb{Z}(1-3i)$ und $V = \mathbb{Z}(2+6i)$ des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}[i]$ aus Aufgabe 11.3. Bestimmen Sie für $M = \mathbb{Z}[i]/U$ bzw. $M = \mathbb{Z}[i]/V$ jeweils Zahlen $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ und Ideale $\mathbb{Z}[i] \supset \mathfrak{a}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{a}_\ell \supset \{0\}$ (wie aus Satz 8.2 (1)) mit

$$M \cong \mathbb{Z}^k \oplus \bigoplus_{i=1}^{\ell} (\mathbb{Z}/\mathfrak{a}_i).$$

(Hinweis: Zumindest für U kann man die Lösung eigentlich auch schon direkt aus Aufgabe 11.3 entnehmen. Tatsächlich wäre es hier aber eher im Sinne des Aufgabenstellers, wenn Sie einen $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$ mit $M \cong \mathbb{Z}^2/\operatorname{im} f$ fänden und die gesuchten Kenngrößen an der Smith-Normalform von $[f]_1^2 \in \mathbb{Z}^{2\times 1}$ abläsen.)

13.2. *(Erzeuger und Relationen)* (4 Punkte)
Stellen Sie sich ein Szenario vor, bei dem Sie (aus irgendwelchen Gründen) an einer abelschen Gruppe $(G, +)$ interessiert sind. Im Zuge Ihrer bisherigen Untersuchungen konnten Sie feststellen, dass sich G von den drei (nicht notwendigerweise verschiedenen) Elementen $a, b, c \in G$ erzeugen lässt, und zwischen diesen die folgenden Beziehungen gelten:

$$2a + c = 0, \quad 8b - c = 0, \quad a - 3c = 0, \quad a - c = 0.$$

(0 bezeichne hier das neutrale Element in G und Ausdrücke wie $2a$ sind natürlich als $a + a$ zu verstehen.) Bestimmen Sie alle möglichen Isomorphietypen von G (im Sinne von Beispiel 6.1), welche die obigen Voraussetzungen erfüllen!
(Hinweis: Sie sollten erwarten hier mehrere mögliche Isomorphietypen zu erhalten, denn immerhin erfüllt schon die einelementige Gruppe alle obigen Voraussetzungen. Wenn man günstig argumentiert, genügt es *eine* Smith-Normalform auszurechnen, um gewissermaßen *das allgemeinste* G zu finden, welches die obigen Voraussetzungen erfüllt, und dann alle gesuchten Isomorphietypen durch Faktorbildung aus diesem allgemeinsten G abzulesen.)

13.3. *(So technisch, dass es wohl ein Hilfssatz sein muss . . .)* (4 Punkte)
Sei K ein Körper und $B \in K^{n\times n}$ eine beliebige quadratische Matrix. Wir fassen B auch als

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen am 23.01.2020 um 12:15 Uhr vor der Vorlesung. Bitte versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Sie dürfen auch zu zweit abgeben. Mehrere Blätter sind zu tackern. Mehr Informationen finden Sie auf der Webseite zur Vorlesung:
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2019-w-algebra.html`

Matrix über $K[X]$ auf und betrachten die Matrix

$$A = X\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix} - B = \begin{pmatrix} X-B_{11} & \ddots & & -B_{1n} \\ -B_{21} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -B_{(n-1)n} \\ -B_{n1} & & & X-B_{nn}\end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} | & & | \\ A_{\bullet 1} & \cdots\cdots & A_{\bullet n} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

mit Spalten $A_{\bullet 1}, \dots, A_{\bullet n}$. Sei nun $P = (P_1, \dots, P_n) \in (K[X])^n$ ein beliebiges Element. Zeigen Sie, dass es Polynome $Q_1, \dots, Q_n \in K[X]$ und Körperelemente $r_1, \dots, r_n \in K$ gibt derart, dass

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} Q_j A_{\bullet j} + \begin{pmatrix} r_1 X^0 \\ \vdots \\ r_n X^0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 X^0 \\ \vdots \\ r_n X^0 \end{pmatrix}$$

(Hinweis: Führen Sie eine Induktion über $\max_{1 \le i \le n} \deg P_i$. Für den Induktionsschritt können Sie Polynomdivision benutzen: Ziehen Sie ein geeignetes (polynomielles) Vielfaches einer geeigneten Spalte $A_{\bullet j}$ von P ab, um den Grad eines der P_j-Einträge zu verringern.)

13.4. *(In Richtung Jordan-Normalform)* (4 Punkte)
Es sei K ein Körper und $B \in K^{n \times n}$. Dann wird der K-Vektorraum $V = K^n$ wie in Aufgabe 10.2 zu einem $K[X]$-Modul (den wir zur Unterscheidung als V_B notieren), wobei die Skalarmultiplikation von X mit $v \in V_B$ wie Anwenden der Matrix B auf den Vektor v wirkt. Betrachten Sie den $K[X]$-Modulhomomorphismus $g\colon (K[X])^n \to V_B$, welcher für $i = 1, \dots, n$ den i-ten Standardeinheitsvektor von $(K[X])^n$ auf den i-ten Standardeinheitsvektor in V_B abbildet.

(a) Für $K = \mathbb{Q}$, $n = 2$ ist $g(X, 0)$ die erste Spalte von B.—Wieso? Beschreiben Sie in ähnlicher Weise auch, wie das Element $g(X^2 + 1, X - 3) \in V_B$ aussieht.

(b) Zeigen Sie, dass g surjektiv ist, und der Kern von g von den Spalten der Matrix $A \in (K[X])^n$ aus Aufgabe 13.3 erzeugt wird:

$$\ker g = \operatorname{span}_{K[X]}\left\{ \begin{pmatrix} | \\ A_{\bullet 1} \\ | \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} | \\ A_{\bullet n} \\ | \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{im}\begin{pmatrix} (K[X])^n \to (K[X])^n \\ Q \mapsto A \cdot Q \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Mit dem richtigen Hilfssatz ist die Aufgabe fast schon trivial ...)

(Bemerkung: Die Aufgabe impliziert $V_B \cong (K[X])^n / \operatorname{im}(v \mapsto Av)$. Dies ermöglicht es, den Isomorphietyp von V_B anhand der Smith-Normalform von A abzulesen.)

Wichtige Bemerkung: In der letzten Jänner-Woche (27.01.–02.02.2020) entfallen die Übung und die Vorlesung (beide Termine!); Dieses Blatt wird also *nicht besprochen*. Ihre korrigierten Bearbeitungen können Sie am 28.01.2020 zwischen 11–12 Uhr im Raum 02.018 in der Kopernikusgasse 24/II abholen. Das aktuelle Blatt erhöht die zur Notenberechnung herangezogene Gesamtpunktzahl nicht; Die hier erzielten Punkte sind also alle *Bonuspunkte*.

Evaluierung: Bitte denken Sie daran, Vorlesung und Übung auf TUGRAZonline zu bewerten. Dies ist bis zum 1. Februar 2020 möglich.