TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2019/20
Graz, den 07.10.2019

1. Tutorium zur Algebra

T1.1. *(Ringhomomorphismen)*
Zeigen Sie, dass jeder Ringhomomorphismus $f: K \to R$ von einem Körper K in einen Ring R injektiv ist, sofern es sich bei R nicht um "den" Nullring handelt. Bleibt die Aussage richtig, wenn man Ringhomomorphismen $R \to K$ betrachtet?

T1.2. *(K-Homomorphismen)*

(a) Seien $\iota: \mathbb{Q} \to L$ und $\iota': \mathbb{Q} \to L'$ zwei Körpererweiterungen und $f: L' \to L$ ein Körperhomomorphismus. Zeigen Sie, dass f ein $\mathbb{Q}$-Homomorphismus ist.
(Zur Erinnerung: Es ist zu zeigen, dass f bezüglich der durch ι' bzw. ι auf L' bzw. L induzierten $\mathbb{Q}$-Vektorraumstruktur linear ist.)

(b) Es bezeichne $\mathbb{Q}(i)$ den kleinsten Teilkörper von $\mathbb{C}$, der i enthält, nämlich $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Überlegen Sie sich, dass es einen Körperhomomorphismus

$$f: \mathbb{Q}(i) \to \mathbb{Q}(i) \quad \text{mit} \quad f(i) = -i$$

gibt. Handelt es sich bei f um einen $\mathbb{Q}(i)$-Homomorphismus, wenn man $\mathbb{Q}(i)$ jeweils als die triviale Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}(i)$ auffasst?

T1.3. *(Körper mit genau vier Elementen)*
In Beispiel 1.4 (2) wurde von *dem Körper* $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, x, y\}$ mit $\#\mathbb{F}_4 = 4$, $1 + 1 = 0$, $x + 1 = y$ und $x^2 = y$ gesprochen.

(a) Zeigen Sie, dass es tatsächlich eine und nur eine Körperstruktur auf der Menge $\{0, 1, x, y\}$ gibt derart, dass die obigen Gleichungen gelten.
(*Hinweis*: Für die Eindeutigkeit kann man die obigen Gleichungen benutzen, um unter Annahme der Körperaxiome die Additionstabelle und Multiplikationstabelle für $\mathbb{F}_4$ aufzustellen. Die Existenz könnte man dann mühsam dadurch klären, indem man die Körperaxiome für die so bestimmten Verknüpfungen nachrechnet, aber deutlich eleganter geht es, wenn man den Faktorring $\mathbb{F}_2[X]/\langle X^2 + X + 1\rangle$ mit $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ betrachtet.)

(b) Bestimmen Sie die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}(\mathbb{F}_4)$ von $\mathbb{F}_4$.

(c) Zu welcher/welchen der folgenden Gruppen ist $\operatorname{Aut}(\mathbb{F}_4)$ isomorph?

$$\{0\}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \quad ((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times, \cdot).$$

(Bei allen bis auf die letzte Gruppe ist als Verknüpfung die offensichtliche Addition gemeint; Die letzte Gruppe bezeichnet die *Einheitengruppe* von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ mit Multiplikation als Verknüpfung.)