TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2019/20
Graz, den 28.10.2019

3. Tutorium zur Algebra

T3.1. *(Der Frobenius-Endomorphismus)*
Sei R ein beliebiger Ring und $f_R\colon \mathbb{Z} \to R$ der (eindeutig bestimmte) Ringhomomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach R. Der Kern von f_R ist ein Hauptideal von $\mathbb{Z}$, also von der Form $c\mathbb{Z}$ mit einer ganzen Zahl $c \geq 0$. Diese heißt *Charakteristik von R*.

(a) Finden Sie einen Ring R, dessen Charakteristik positiv, aber keine Primzahl ist.

(b) Welche Werte sind für die Charakteristik eines Integritätsbereichs möglich?

(c) Sei p eine Primzahl und R ein kommutativer Ring mit Charakteristik p (z.B. ein endlicher Körper, oder der Polynomring über einem Körper mit Charakteristik p). Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : R \longrightarrow R, \quad x \longmapsto x^p$$

ein Ringhomomorphismus ist (der sogenannte *Frobenius-Endomorphismus*).
(Hinweis: Überzeugen Sie sich nur, dass eigentlich alles bis auf die Additivität von ϕ trivial ist, Sie letztere aber im Wesentlichen schon aus Beispiel 3.2 kennen.)

(d) Zeigen Sie: Ist K ein endlicher Körper, so ist der zugehörige Frobenius-Endomorphismus sogar ein Automorphismus.

T3.2. *(Endliche Körper sind perfekt)*
Ein Körper K heißt *perfekt* (oder *vollkommen*), falls jedes irreduzible Polynom über diesem automatisch separabel ist. Laut Korollar 3.6 ist jeder Körper mit Charakteristik 0 perfekt. Sei also K ein Körper mit Charakteristik $p \neq 0$ und $\phi : K \to K$, $x \mapsto x^p$ der Frobenius-Endomorphismus. Zeigen Sie:

(a) K ist genau dann perfekt, wenn der Frobenius-Endomorphismus surjektiv ist.
(Hinweis: Für die eine Richtung können Sie Korollar 3.6 und die Surjektivität von ϕ benutzen, um ein etwaiges separables Polynom zu zerlegen. Ist hingegen ϕ *nicht* surjektiv, so betrachten Sie zu $a \in K \setminus \phi(K)$ das Polynom $X^p - a \in K[X]$ und zeigen, dass dieses irreduzibel aber *nicht* separabel ist. Sie können die Überlegungen aus Beispiel 3.2 benutzen.)

(b) Folgern Sie, dass jeder endliche Körper perfekt ist.