Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Wintersemester 2019/20
Graz, den 18.11.2019

# 4. Tutorium zur Algebra

**T4.1.** *(Elementarsymmetrische Polynome)*
Im Folgenden sei $n \in \mathbb{N}$ und $T_1, \dots, T_n, X$ seien verschiedene Variablen. Wir schreiben zur Abkürzung $\boldsymbol{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$. Die *elementarsymmetrischen Polynome* $E_1, \dots, E_n \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{T}]$ seien definiert durch

$$P := \prod_{u=1}^{n} (X - T_u) =: X^n - E_1 X^{n-1} \pm \dots + (-1)^n E_n X^0 \in (\mathbb{Z}[\boldsymbol{T}])[X].$$

Für $n = 3$ hat man beispielsweise

$$E_1 = T_1 + T_2 + T_3, \quad E_2 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3, \quad E_3 = T_1 T_2 T_3.$$

Sei $K$ ein Körper. Wir betrachten den Körper $L = \operatorname{Quot}(K[\boldsymbol{T}])$ als Körpererweiterung von $K$ und darin den Zwischenkörper $k = K(E_1, \dots, E_n)$.

Die symmetrische Gruppe $\operatorname{Sym}(\boldsymbol{T})$ operiert auf $L$ durch Vertauschen der Variablen. Ein Element von $L$ heißt *symmetrisch*, falls es invariant unter dieser Operation ist.

(a) Welche der folgenden Elemente von $L$ sind symmetrisch? (Hier sei $n = 3$.)

$$1_L, \quad E_2, \quad T_1 T_2 + T_3, \quad \frac{T_1 + T_2 + T_3}{4(T_1 T_2 T_3)^9}, \quad \operatorname{disc}(P) = \prod_{1 \le u < v \le n} (T_u - T_v)^2.$$

(b) Zeigen Sie, dass $L/k$ eine Galois-Erweiterung ist.
(Hinweis: Betrachten Sie $P$.)

(c) Zeigen Sie: Die Operation von $P$ auf den Nullstellen von $P$ (also auf $\boldsymbol{T}$) induziert einen Gruppenisomorphismus $\operatorname{Gal}(L/k) \cong \operatorname{Sym}(\boldsymbol{T})$.
(Hinweis: Es ist im Wesentlichen nur einzusehen, dass jede Permutation der Unbekannten durch ein Element der Galois-Gruppe bewirkt werden kann. Konstruieren Sie ein solches Element; Starten Sie dafür mit einem geeigneten Ringhomomorphismus $K[\boldsymbol{T}] \to L$.)

(d) Zeigen Sie $k = \{f \in L : f \text{ ist symmetrisch}\}$.
(Hinweis: $\operatorname{Fix}(\operatorname{Gal}(L/k))$.)

(e) Was hat diese Aufgabe mit der Formel

$$\operatorname{disc}(X^3 + bX^2 + cX + d) = b^2c^2 - 4c^3 - 4b^3 d - 27d^2 + 18bcd \quad (b, c, d \in K)$$

aus Aufgabe 7.3 zu tun? (Hinweis: Betrachten Sie $P$ und $E_1, \dots, E_n$.)

**T4.2.** *(Semidirekte Produkte)*

Seien $(N,\star)$ und $(H,*)$ zwei Gruppen und $\psi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus ($\mathrm{Aut}(N)$ bezeichnet hier die Gruppe der Gruppenautomorphismen von $N$ mit Komposition von Abbildungen als Verknüpfung). Dann ist das *semidirekte Produkt* $N \rtimes_\psi H$ definiert als das (mengentheoretische) kartesische Produkt $N \times H$, zusammen mit der Verknüpfung

$$(n,h)\cdot(n',h') := (n \star \psi(h)(n'), h * h').$$

(a) Zeigen Sie, dass das semidirekte Produkt von $N$ und $H$ eine Gruppe bildet.
(Hinweis: Die Assoziativität der Verknüpfung nachzurechnen ist ein bisschen lästig. Bearbeiten Sie lieber zuvor die anderen Aufgaben.)

(b) Zeigen Sie, dass $N \times \{1_H\}$ ein Normalteiler von $N \rtimes_\psi H$ ist, und $\{1_N\} \times H$ eine Untergruppe von $N \rtimes_\psi H$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\{1_N\} \times H$ genau dann ein Normalteiler von $N \rtimes_\psi H$ ist, wenn $\psi(h) = \mathrm{id}_N$ für alle $h \in H$ ist.

(d) Sei nun $G$ eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler von $G$ und $H \leq G$ eine Untergruppe von $G$. Ferner gelte $N \cap H = \{1_G\}$ und es sei $\psi(h) = (n \mapsto hnh^{-1}) \in \mathrm{Aut}(N)$ für $h \in H$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Psi\colon N \rtimes_\psi H \longrightarrow NH$, $(n,h) \longmapsto nh$ ein Gruppenisomorphismus ist.

**T4.3.** *(Gruppen mit genau* 6 *Elementen)*

Es sei $G$ eine Gruppe mit genau 6 Elementen.

(a) Zeigen Sie, dass $G$ eine normale 3-Sylowgruppe $N$ besitzt und $G \cong N \rtimes H$ mit einer beliebigen 2-Sylowgruppe $H$ von $G$ gilt.

(b) Bestimmen Sie alle Gruppenhomomorphismen $C_2 \to \mathrm{Aut}(C_3)$, wobei $C_n$ eine zyklische Gruppe mit genau $n$ Elementen bezeichne.

(c) Folgern Sie, dass es bis auf Isomorphie genau zwei verschiedene Gruppen $G$ mit genau 6 Elementen gibt: eine abelsche und eine nicht-abelsche.
(Hinweis: Diese Folgerung kennen Sie natürlich schon aus **??**, aber hier geht es primär darum, das Arbeiten mit semidirekten Produkten zu üben.)

**T4.4.** *(Gruppen mit genau* 12 *Elementen)*

Es sei $G$ eine Gruppe mit genau 12 Elementen und $U_p$ für $p = 2,3$ je eine $p$-Sylowgruppe von $G$.

(a) Benutzen Sie semidirekte Produkte, um für jede der folgenden Eigenschaften eine Gruppe $G$ zu konstruieren, die diese erfüllt:

(1) $U_2 \trianglelefteq G$ und $U_3 \trianglelefteq G$; (2) $U_2 \ntrianglelefteq G$ und $U_3 \trianglelefteq G$; (3) $U_2 \trianglelefteq G$ und $U_3 \ntrianglelefteq G$.

(Hinweis: Bestimmen Sie alle Gruppenhomomorphismen $\psi\colon C_q \to \mathrm{Aut}(C_p)$ für $p,q \in \{2,3\}$ und $p \neq q$. Betrachten Sie dann alle möglichen semidirekten Produkte $C_p \rtimes_\psi C_q$.)

(b) Zeigen Sie, dass mindestens eine der Untergruppen $U_2$ oder $U_3$ ein Normalteiler von $G$ ist.
(Hinweis: Welche Anzahlkombinationen von $p$-Sylowgruppen sind in $G$ möglich? Zählen Sie Elemente!)