Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

Wintersemester 2019/20
Graz, den 20.01.2020

6. Tutorium zur Algebra

T6.1. *(Das Schlangenlemma)*
Notation: Im Folgenden schreiben wir zu gegebenem R-Modulhomomorphismus $\phi : A \to B$ oft $\operatorname{coker}\phi = B/\operatorname{im}\phi$ und mit der Abbildung $B \to \operatorname{coker}\phi$ ist die kanonische Projektion $b \mapsto b + \operatorname{im}\phi$ gemeint. Unter etwaig auftretenden Abbildungen $\ker A \to A$ ist außerdem natürlich die Inklusion $\mathrm{id}_A|_{\ker A}$ gemeint.

Gegeben sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi'"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Phi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\Phi''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\tilde{f}"] & N \arrow[r, "\tilde{g}"] & N'' & \end{tikzcd}$$

von R-Moduln und R-Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen.

(a) Überlegen Sie sich, dass sich obiges Diagramm wie folgt erweitern lässt:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ & \ker\Phi' \arrow[r, "f|_{\ker\Phi'}"] \arrow[d] & \ker\Phi \arrow[r, "g|_{\ker\Phi}"] \arrow[d] & \ker\Phi'' \arrow[d] & \\ & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi'"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Phi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\Phi''"] & 0, \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & N \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\ & \operatorname{coker}\Phi' \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}\Phi \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}\Phi'' \arrow[d] & \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

wobei auch hier wieder alles kommutiert und alle Zeilen und Spalten exakt sind; Die Abbildung zwischen den Cokernen erhalten Sie aus Lemma 8.1, wenn Sie das Blatt um 90° drehen.
(Hier sind viele Kleinigkeiten zu prüfen; Zum Beispiel: Weshalb bildet $f|_{\ker\Phi'}$ auf $\ker\Phi$ ab? Weshalb kommutieren die neu hinzugefügten Quadrate, etc.?—Prüfen Sie

nur so viel, bis bei Ihnen das Gefühl entsteht, dass alle hier behaupteten Aussagen trivial sind, und bearbeiten Sie dann die nächste Teilaufgabe!)

(b) Konstruieren Sie einen R-Modulhomomorphismus $d\colon \ker\Phi'' \to \operatorname{coker}\Phi'$ derart, dass die Sequenz

$$\ker\Phi' \longrightarrow \ker\Phi \longrightarrow \ker\Phi'' \overset{d}{\dashrightarrow} \operatorname{coker}\Phi' \longrightarrow \operatorname{coker}\Phi \longrightarrow \operatorname{coker}\Phi''$$

exakt ist. Starten Sie Ihre Konstruktion mit einem Element $x'' \in \ker\Phi''$, bilden es mit $\mathrm{id}_{M''}|_{\ker\Phi''}$ auf $x'' \in M''$ ab[1] und wählen Sie ein g-Urbild $x \in M$ von $x'' \in M''$. Fahren Sie so fort. Der Pfad der Element, die Sie bei Ihrer Konstruktion betrachten werden, ähnelt vermutlich einer Schlange (daher der Name „*Schlangenlemma*“):

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \ker\Phi' \arrow[r, "f|_{\ker\Phi'}"] \arrow[d] & \ker\Phi \arrow[r, "g|_{\ker\Phi}"] \arrow[d] & \ker\Phi'' \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, rounded corners, "\exists d"] & \\
 & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi'"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Phi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\Phi''"] & 0\,. \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & N \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{coker}\Phi' \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}\Phi \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}\Phi'' \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

(c) Folgern Sie: Ist Φ'' injektiv und Φ surjektiv, so ist auch Φ' surjektiv.

[1]Das ändert an x'' natürlich nichts, aber falls Sie auf Ihr Diagramm schauen, haben Sie sich von $\ker\Phi''$ nach M'' „bewegt“.