TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2020/21
Graz, den 08.10.2020

1. Übung zur Einführung in die komplexe Analysis

1.1. *(Kettenregel und Umkehrregel)* (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie die (komplexe) *Kettenregel*: Es seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ zwei offene Mengen, $f : U \to V$ und $g : V \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen, und f sei in $z_0 \in U$ komplex-differenzierbar, sowie g in $f(z_0)$. Dann ist auch $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ in z_0 komplex-differenzierbar und es gilt $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.

(b) Beweisen Sie die folgende *Umkehrregel*: $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ und $f' : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei stetig und stets von Null verschieden. Dann gibt es zu jedem $z_0 \in U$ eine offene Umgebung V auf der f injektiv ist und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(V) \to V$ von $f|_V : V \to f(V)$ im Punkt $w_0 = f(z_0)$ komplex-differenzierbar ist und $(f^{-1})'(w_0) = 1/f'(z_0)$ erfüllt.
(Hinweis: Die schwierige Kern dieser Aussage ist Ihnen bereits aus der reellen Analysis als *Satz über lokale Umkehrbarkeit* bekannt. Hauptaufgabe ist es hier also nur noch zwischen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ geeignet zu übersetzen.)

1.2. *(Logarithmus)*
Beweisen Sie $\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{n} z^n\right) = 1 + z$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.
(Hinweis: Bestimmen Sie die Ableitung des Quotienten beider Seiten.)

1.3. *(Spiegelung)* (4 Punkte)
Es sei U offen, $\overline{U} = \{\,\overline{z} : z \in U\,\}$ das Bild von U unter der komplexen Konjugation $\overline{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x + \mathrm{i}y \mapsto x - \mathrm{i}y$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Betrachten Sie die Abbildung $\tilde{f} : \overline{U} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\tilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\overline{\cdot}"] \\ \overline{U} \arrow[u, "\overline{\cdot}"] \arrow[r, "\tilde{f}"] & \mathbb{C}\,. \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$ holomorph ist. (Hinweis: Reelle Kettenregel in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.)

1.4. *(Möbius-Transformationen)*
Für ein Symbol $\infty \notin \mathbb{C}$ setze man $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Für komplexe Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 15.10.2020, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=3113
https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2020-w-einf-kompl-analysis.html

$ad - bc \neq 0$ nennt man die Abbildung

$$T = T^{a,b}_{c,d} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & \text{falls } z \notin \{-d/c, \infty\}, \\ \infty & \text{falls } z = -d/c, \\ a/c & \text{falls } z = \infty \end{cases}$$

eine *Möbius-Transformation*. (Im Fall $c = 0$ sind in der obigen Definition und im Rest der Aufgabe $-d/c$ und a/c jeweils als ∞ zu verstehen.) Zeigen Sie:

(a) Für geeignete $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ hat man $T = T^{\alpha,\gamma}_{0,1} \circ T^{0,1}_{1,0} \circ T^{1,\beta}_{0,1}$, also ein kommutatives Diagramm

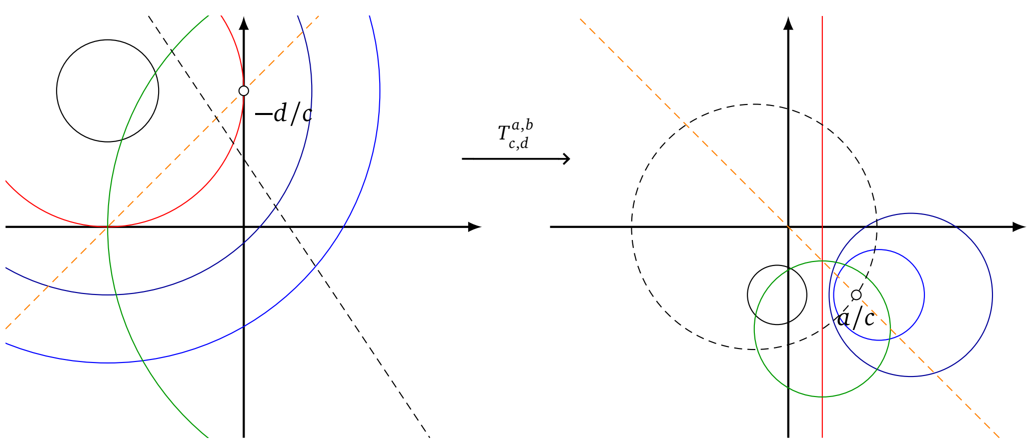
$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathbb{C}} \arrow[rrr, "T"] \arrow[dr, "T^{1,\beta}_{0,1}=(z\mapsto z+\beta)"'] & & & \hat{\mathbb{C}}. \\
& \hat{\mathbb{C}} \arrow[r, "T^{0,1}_{1,0}=(z\mapsto 1/z)"] & \hat{\mathbb{C}} \arrow[ur, "T^{\alpha,\gamma}_{0,1}=(z\mapsto \alpha z+\gamma)"'] &
\end{tikzcd}$$

(b) T bildet $\hat{\mathbb{C}}$ bijektiv auf $\hat{\mathbb{C}}$ ab.

(c) $T|_{\mathbb{C}\setminus\{-d/c\}} : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ ist holomorph mit nirgends verschwindender Ableitung.

(d) Unter einer *Kreislinie* $\mathscr{K}$ verstehen wir den Rand einer Kreisscheibe und unter einer *Geraden* $\mathscr{L}$ *mit* ∞ verstehen wir die Vereinigung von einem eindimensionalen affinen $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}$ mit $\{\infty\}$. Dann induziert T eine Selbstabbildung der Menge von Kreislinien und Geraden; Präziser gilt für $\mathscr{X} \in \{\mathscr{K}, \mathscr{L}\}$

$$T(\mathscr{X}) \text{ ist eine } \begin{cases} \text{Kreislinie} & \text{falls } -d/c \notin \mathscr{X}, \\ \text{Gerade mit } \infty & \text{falls } -d/c \in \mathscr{X}. \end{cases}$$



(Hinweis: Überzeugen Sie sich, dass es dank der ersten Teilaufgabe im Wesentlichen genügt, den Fall $(a, b, c, d) = (0, 1, 1, 0)$ genauer zu untersuchen; Hierbei hilft vielleicht die Kreisgleichung $z\overline{z} + z\overline{\beta} + \beta\overline{z} + r = 0$.)