TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2020/21
Graz, den 15.10.2020

2. Übung zur Einführung in die komplexe Analysis

2.1. *(Fundamentalsatz der Algebra)* (4 Punkte)

Es sei $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$ eine Polynomfunktion (mit $n\in\mathbb{N}$ und Koeffizienten $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$). Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra (Satz 1.2), indem Sie nacheinander die folgenden Aussagen beweisen:

(a) Die reellwertige Funktion $|f|:\mathbb{C}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, $z\mapsto|f(z)|$ nimmt ein Minimum an.
(Hinweis: Kompaktheit könnte helfen, aber leider ist $\mathbb{C}$ nicht kompakt...)

(b) Für jedes $z_0\in\mathbb{C}$ mit $f(z_0)\neq 0$ gibt es ein $\zeta\in\mathbb{C}$ mit $|f(z_0+\zeta)|<|f(z_0)|$.
(Hinweis: Schreiben Sie $f(z_0+\zeta)=f(z_0)+b_k\zeta^k+\ldots+b_{n-1}\zeta^{n-1}+\zeta^n$ mit geeigneten $k\in\{1,\ldots,n\}$ und Koeffizienten $b_k,\ldots,b_{n-1},b_n\in\mathbb{C}$ und beachten Sie $f(z_0+\zeta)\approx f(z_0)+b_k\zeta^k$ für sehr kleine $|\zeta|$. — Welche Wahl von ζ bietet sich nun an, um die Behauptung zu zeigen? Beachten Sie Korollar 1.8.)

(c) Es gibt ein $z_0\in\mathbb{C}$ mit $f(z_0)=0$.

2.2. *(Beweisen oder widerlegen)* (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorph, so auch $z\mapsto|\exp(f(z))|$.

(b) Für $z\in\mathbb{C}$ ist $\sin(\pi z)=0$ genau dann wenn $z\in\mathbb{Z}$.

(c) Jede Bildmenge $\{\sin(z):z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z)=c\}$, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ist ein Kreis.

2.3. *($\mathbb{C}$-Linearität des Wegintegrals)*

Es sei $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ ein Integrationsweg und f und g zwei stetige auf $\mathrm{tr}(\gamma)$ definierte komplexwertige Funktionen, sowie $\lambda\in\mathbb{C}$. Zeigen Sie

$$\int_\gamma (f(z)+\lambda g(z))\,\mathrm{d}z=\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z+\lambda\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z.$$

2.4. *(Windungszahl für einen Kreisweg)*

Für $z_0\in\mathbb{C}$ und $r>0$ sei $\zeta\in B(z_0,r)$ und $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$, $t\mapsto z_0+r\exp(2\pi it)$ der bekannte

---

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 22.10.2020, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=3113`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2020-w-einf-kompl-analysis.html`

Kreisweg. Zeigen Sie die bereits aus Korollar 2.10 bekannte Formel

$$\operatorname{Ind}_\gamma(\zeta) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{z-\zeta} \, \mathrm{d}z = 1$$

durch eine alternative Rechnung, indem Sie $\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}$ in eine geometrische Reihe entwickeln und sich überlegen, dass Sie gliedweise integrieren dürfen.