Technische Universität Graz
Institut für Analysis und Zahlentheorie
Marc Technau

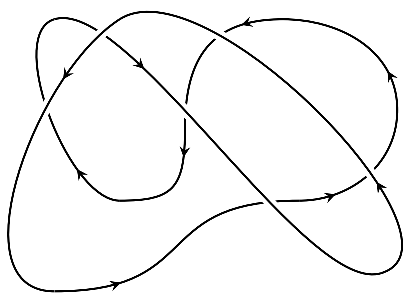
Wintersemester 2020/21
Graz, den 22.10.2020

3. Übung zur Einführung in die komplexe Analysis

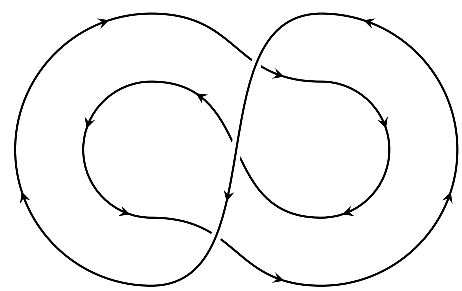
3.1. *(Windungszahl)* (4 Punkte)

Die folgenden Abbildungen zeigen (bei gutwilliger Interpretation) zwei geschlossene Wege: γ_1 und γ_2.

γ_1:



γ_2:



Berechnen Sie $\operatorname{Ind}_{\gamma_k}(z_0)$ für alle $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{tr}(\gamma)$ und $k \in \{1, 2\}$.

3.2. *(Zum Lemma von Goursat)* (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Aussage vom Lemma von Goursat (Lemma 2.12) i.Allg. falsch wird, wenn man in dessen Formulierung (siehe Skriptum!)

$$„f : U \to \mathbb{C} \text{ sei } [\dots] \text{ holomorph auf } U \setminus \{p\}“$$

durch

$$„f : U \to \mathbb{C} \text{ sei } [\dots] \text{ reell total-differenzierbar auf } U \setminus \{p\}“$$

ersetzt.

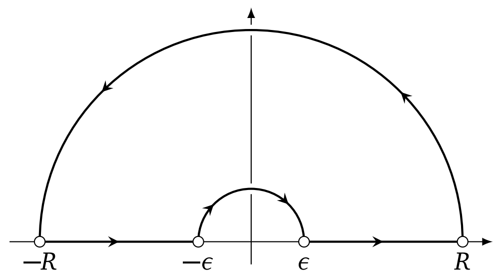
(b) Erklären Sie, wo der in der Vorlesung besprochene Beweis von Lemma 2.12 schief geht, wenn man die Ersetzung aus der vorherigen Teilaufgabe vornimmt.
(Hinweis: Natürlich wird es dort scheitern, wo man sich auf Holomorphie berufen möchte; Freilich sollen Sie aber auch erklären können, weshalb reelle totale Differenzierbarkeit i.Allg. als Ersatz nicht hinreicht.)

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 29.10.2020, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=3113`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2020-w-einf-kompl-analysis.html`

3.3. *(Ein reelles Integral)*
Zeigen Sie, dass das folgende reelle Integral existiert und berechnen Sie dessen Wert:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Vielleicht mag es helfen zunächst für Parameter $0 < \epsilon < R$ das komplexe Wegintegral mit Integrand $(1-\exp(\mathrm{i}z))/z^2$ über den folgenden Weg zu berechnen:



(Hinweis: Sie können sich an Beispiel 2.13 orientieren. Falls Sie keine Dreiecke sehen, rektifizieren Sie!)

3.4. *(Satz von Cauchy für Kreiswege mittels Green/Stokes)*
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ in jedem Punkt von U n-mal stetig komplex-differenzierbar (mit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ so klein wie Ihnen möglich, aber so groß wie sie möchten). Ferner sei $\overline{B}(z_0, r) \subset U$ eine abgeschlossene Kreisscheibe in U und $\gamma : [0,1] \to U$, $t \mapsto z_0 + r\exp(2\pi \mathrm{i} t)$ der bekannte Kreisweg. Zeigen Sie dann

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

indem Sie Real- und Imaginärteil des fraglichen Wegintegrals mit dem Integralsatz von Green berechnen.
(Hinweis: Nach Anwendung des Integralsatzes von Green mögen ggf. die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen helfen. Besonderen Ruhm und Ehre bekommen Sie, falls Sie die Aufgabe in die Sprache der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten übersetzen, $f(z)\,\mathrm{d}z$ passend als komplexwertige Differentialform interpretieren und mit dem allgemeinen Integralsatz von Stokes–Cartan arbeiten. Sie sollten sich natürlich auch jeweils überlegen, ob dies erlaubt ist.)