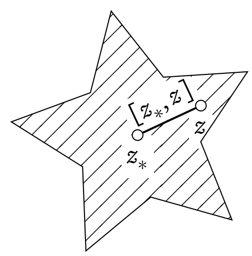
TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE
Marc Technau

Wintersemester 2020/21
Graz, den 29.10.2020

4. Übung zur Einführung in die komplexe Analysis

4.1. *(Satz von Cauchy für Sterngebiete)* (4 Punkte)
Eine Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt *sternförmig*, falls es einen Punkt $z_0 \in U$ gibt derart, dass für jedes $z \in U$ das gesamte Geradenstück $[z_*, z] = \{ (1-t)z_* + tz \in \mathbb{C} : t \in [0,1] \}$ in U enthalten ist. (Einen Punkt z_* mit der eben genannten Eigenschaft nennt man auch *Sternpunkt* von U.)



Zeigen Sie, dass Satz 2.14 auch gültig bleibt, wenn man die Voraussetzung „konvex" durch „sternförmig" ersetzt, d.h. sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sternförmig und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig auf U und holomorph auf $U \setminus \{p\}$ für ein $p \in U$. Zeigen Sie, dass ein holomorphes $F : U \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$ existiert.

4.2. *(Variante vom Satz von Liouville)* (4 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass entweder $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt, oder f konstant ist.

4.3. *(Legendre-Polynome)*
Die *Legendre-Polynome* P_n sind definiert durch

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - 1)^n.$$

Zeigen Sie für $x \in (-1, 1)$ die Integraldarstellung

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x + \mathrm{i}\sqrt{1 - x^2} \cos(t) \right)^n \mathrm{d}t.$$

(Hinweis: P_n ist *beinahe* schon als Taylor-Koeffizient einer gewissen Funktion definiert. Wie man an so etwas mittels Integration ran kommen kann, sollte Ihnen aus Kapitel 3 bekannt sein. Anschließend hilft nur noch stoisches Rechnen ...)

Geben Sie Ihre Lösung bitte digital bis zum 05.11.2020, 23:55 Uhr, im zugehörigen TeachCenter-Kurs ab. Dort und auf der Vorlesungswebseite finden Sie auch weitere Informationen.
`https://tc.tugraz.at/main/course/view.php?id=3113`
`https://www.math.tugraz.at/~mtechnau/teaching/2020-w-einf-kompl-analysis.html`

4.4. *(Anwendungen der Cauchyschen Abschätzungen)*
Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die folgenden beiden Ungleichungen:

(a) $n! \geq (n/e)^n$, mit $e := \exp(1)$;

(b) $\binom{2n}{n} \leq 4^n$.
(Historische Notiz: Die vorliegende Ungleichung war instrumental in einem frühen Durchbruch in der Theorie der Primzahlverteilung durch Čebyšëv, dem es 1851/52 mittels der Beobachtung, dass $\binom{2n}{n}$ von allen Primzahlen im Intervall $(n, 2n]$ geteilt wird, zu zeigen gelang, dass für die Anzahl $\pi(x)$ aller Primzahlen $\leq x$ eine Ungleichungskette $c\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq C\frac{x}{\log x}$ mit geeigneten Konstanten $0 < c < C$ besteht.)

(Hinweis: Man sollte für die Ungleichung relevante Zahlen als Taylor-Koeffizienten einer holomorphen Funktion auffassen. Der Rest vom Hinweis steht dann im Titel.)